

Descomposición fundamental de matrices y equivalencia entre representaciones

Fundamental matrix decomposition and representations equivalence

Carlos A. Hernández

Universidad de los Andes, Colombia

RESUMEN. En este artículo definimos un espacio modular de matrices llamado dominio fundamental y lo empleamos para estudiar la equivalencia entre la forma canónica de Jordan y la descomposición en valores singulares. En la sección 2 resolveremos esta cuestión algebraicamente para dimensión 2, en la sección 3 lo haremos de forma geométrica en un caso más general. Por último ilustramos esta equivalencia en el caso de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ en la sección 4.

Palabras clave: Equivalencia ortogonal, valores propios, valores singulares.

ABSTRACT. In this article, we define a modular space of matrices called the fundamental domain and use it to study the equivalence between Jordan's canonical form and the singular value decomposition. In Section 2, we solve this matter in algebraic terms for dimension 2. In Section 3, we give a geometrical way in a more general case, at the end we illustrate these equivalence cases of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ in Section 4.

Key words: Orthogonal equivalence, eigenvalues, singular values.

2010 AMS Mathematics Subject Classification: 15A21; 15A18; 15A04.

1. Introducción

Pese a que una matriz cuadrada no siempre es diagonalizable, sí admite ser representada mediante la forma canónica de Jordan y, también, admite una descomposición en valores singulares (ver [1] capítulos 7 y 8, también [5] secciones 6.7 y 7.1). Cada una de estas representaciones tiene sus ventajas, por ejemplo, para calcular potencias de matrices

en el caso de Jordan o para evitar el uso de números complejos al representar una matriz real en el otro. Mas aún, cada una tiene un claro significado geométrico.

Al contar con ambas representaciones para cualquier matriz cuadrada (real o compleja), podemos compararlas, considerando que ambas nos dan descripciones geométricas diferentes (por lo general) de la misma transformación. Solo en el caso de las matrices simétricas semidefinidas positivas es posible hacer que ambas representaciones coincidan. En el caso general, veremos cómo y en qué medida se puede explicar la equivalencia entre ambas representaciones tanto algebraica como geoméricamente.

En este trabajo se propone el concepto de *dominio fundamental*, como un conjunto de parámetros para describir espacios matriciales, lo cual corresponde con la noción de un espacio modular, en donde los puntos representan objetos matemáticos o clases de equivalencia de dichos objetos. Son ejemplos de espacios modulares el Grassmaniano $Gr(k, V)$ de un espacio vectorial V , la variedad de Chow y el esquema de Hilbert. El dominio fundamental propuesto aquí describe las clases equivalentes de matrices ortogonalmente similares.

En la siguiente sección, además de definir el dominio fundamental para matrices 2×2 , este se estudia en detalle mediante parámetros fundamentales. En particular, se estudian las propiedades espectrales y descomposiciones en términos de estos parámetros. En la tercera sección se estudia el dominio fundamental para el caso de matrices cuadradas de cualquier dimensión, contexto en el cual la imposibilidad de factorizar el polinomio característico hace necesario abordar el problema desde un punto de vista geométrico.

Finalmente, en la última sección, se considera el caso de un grupo de Lie matricial y se describe la descomposición fundamental para las matrices de $Sl(2, \mathbb{R})$. En el contexto de la teoría de Lie la forma canónica de Jordan se generaliza mediante la de Jordan-Chevalley (ver [2]) mientras la descomposición en valores singulares corresponde con la descomposición de Iwasawa (ver [6]).

Los resultados de este artículo, en general, en particular los teoremas y sus corolarios, así como la mayor parte de los lemas y definiciones, son originales del autor. Los resultados importantes que no son originales del autor se encuentran citados, bien sea en el enunciado o en la demostración.

2. Dominio fundamental

Recordemos que una matriz simétrica M con entradas reales es llamada *semidefinida positiva* si $\vec{x}^T \cdot M \cdot \vec{x} \geq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1. *Sea M una matriz real simétrica. Entonces:*

- a) *Es ortogonalmente diagonalizable con valores propios reales y dicha forma diagonal corresponde con la forma canónica de Jordan.*
- b) *Si M es semidefinida positiva, esta forma coincide también con la descomposición en valores singulares.*

c) Si M tiene algún valor propio negativo, es posible transferir ese menos a la correspondiente fila de la matriz de cambio de base a la derecha (o la columna correspondiente de la matriz de la izquierda) para convertir los valores propios en singulares y así recuperar la descomposición en valores singulares.

Demostración. Se sigue de [5], página 374, teorema 6.17 (ver también [1]). $\square$

Definición 1. Sea M' una matriz 2×2 con entradas reales, llamaremos a M' *sesquisimétrica* si puede expresarse como la suma de una matriz antisimétrica y una matriz escalar.

En particular, si consideramos una matriz normal, vemos que la forma canónica de Jordan es diagonal pero puede incluir valores propios complejos y matrices unitarias. Analizándolo por bloques, vemos que podemos obtener una matriz sesquisimétrica a partir de una matriz unitaria, su adjunta y una matriz diagonal de vectores propios conjugados, obteniendo el siguiente resultado:

Lema 2. Sea N una matriz normal (i.e. $N^T N = N N^T$) con entradas reales 2×2 que no es simétrica. Entonces N tiene una descomposición en valores singulares de la forma

$$N = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \Theta' \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde Θ' denota una matriz ortogonal. Además, su descomposición en bloques de Jordan (diagonal en este caso) está dada por

$$N = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Demostración. La primera identidad se sigue al considerar:

$$\Theta' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

y observar que es ortogonal. La segunda se sigue directamente, al efectuar el producto matricial de las tres matrices al lado derecho. El hecho de que toda matriz normal 2×2 que no sea simétrica sea sesquisimétrica es algo que se evidenciará más adelante. $\square$

Observación 1. Si N' es una matriz normal 2×2 con entradas reales y determinante negativo, entonces es ortogonalmente diagonalizable, por lo tanto N' es una matriz simétrica. Esto puede evidenciarse ya que un determinante negativo no puede corresponder con el producto de dos valores propios complejos conjugados.

Antes de abordar una perspectiva general, conviene considerar otros dos casos particulares. Por un lado podemos considerar una matriz ortogonalmente similar a un bloque de Jordan y por otra parte, tenemos que ocuparnos de las matrices cuyos espacios propios no son ortogonales entre sí.

Ejemplo 1. Consideremos ahora el caso de matrices cuyos espacios propios no son ortogonales entre si. En particular, si M_θ es una matriz de la forma:

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

sus valores propios son 1 y $\sin \theta$, sus vectores propios, $(1, 0)$ y $(\cos \theta, 1 - \sin \theta)$ no son ortogonales, salvo que θ sea $\pi/2$ ó $3\pi/2$. En este caso, los valores singulares de M_θ son $\sigma = \sqrt{1 \pm \cos \theta}$, a su vez, los vectores propios de $M_\theta^T M_\theta$ que se utilizan en la descomposición en valores singulares, en este caso son de la forma $v = (\cos \theta \mp 1, -\sin \theta)$ que ya siendo ortogonales sólo falta normalizarlos. Así, la descomposición en valores singulares es:

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\sin \theta}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} & \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} & \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Por otra parte, la descomposición en bloques de Jordan (diagonal en este caso) está dada por:

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & 1 - \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta - 1} \\ 0 & \frac{1}{1 - \sin \theta} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ejemplo 2. Sea

$$M_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

entonces sus valores singulares están dados por:

$$\sigma = \sqrt{a^2 + 1/2 \pm \sqrt{a^2 + 1/4}}.$$

A su vez, la base ortogonal de vectores propios de $M_a^T M_a$ que se emplea en la descomposición en valores singulares, en este caso viene dada por los vectores:

$$v = \left(1/2 \pm \sqrt{a^2 + 1/4}, -a \right)$$

que ya siendo ortogonales falta normalizarlos.

Demostración. Vemos que:

$$M_a^T M_a = \begin{bmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 + 1 \end{bmatrix},$$

de modo que los valores singulares de M_a son justamente las raíces cuadradas de las raíces del polinomio característico $|M_a^T M_a - \lambda I| = \lambda^2 - (2a^2 + 1)\lambda + a^4$, lo cual permite verificar la primera parte del teorema. El resto se sigue al reemplazar los valores de λ y resolver el sistema homogéneo asociado a la matriz $M_a^T M_a - \lambda I$. $\square$

2.1. Dominio fundamental en dimensión dos

Ahora veremos que es más conveniente describir los valores propios a partir de los singulares y no al revés, empleando la forma polar:

Proposición 1. *Toda matriz real 2×2 con determinante no negativo es ortogonalmente similar a una matriz de la forma:*

$$M' = \Theta \Sigma = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos \theta & -\sigma_2 \sin \theta \\ \sigma_1 \sin \theta & \sigma_2 \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

donde σ_1 y σ_2 son los valores singulares de M' .

Demostración. Por la descomposición en valores singulares, sean O y $\tilde{O}$ matrices ortogonales tales que $M' = O \Sigma \tilde{O} = \tilde{O}^T (\tilde{O} O) \Sigma \tilde{O}$, ya que M' y Σ tienen determinante no negativo, podemos asumir que $\Theta = \tilde{O} O$ es una rotación. $\square$

Proposición 2. *Sea M una matriz 2×2 con entradas reales. Por la proposición 1 M puede descomponerse como:*

$$M = \Phi \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 |r_1| & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{bmatrix} \Phi^{-1}, \quad (7)$$

donde Φ es una matriz ortogonal con determinante positivo.

Demostración. Como en la proposición 1, podemos usar la descomposición en valores singulares y sin pérdida de generalidad asumir Φ con determinante positivo. Si el determinante de M fuese negativo Θ resultaría ser una inversión, en tal caso, al multiplicar tanto Σ como Θ por la matriz diagonal autoinversa con coeficientes -1 y 1 obtenemos la descomposición deseada. $\square$

Definición 2. *A la expresión (7) la llamamos descomposición fundamental de M . Llamamos valores fundamentales a los parámetros $r_i \in \mathbb{R}$ (donde $r_i^2 = \sigma_i$ son los valores singulares de M) y a θ lo llamamos ángulo fundamental. Estos tres son los parámetros fundamentales y pertenecen al dominio:*

$$D = \{(r_1, r_2, \theta) \mid r_2 \geq |r_1|, \theta \in (-\pi, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad (8)$$

el cual recibirá el nombre de dominio fundamental.

Observación 2. *Las matrices reales 2×2 que son ortogonalmente similares poseen los mismos parámetros fundamentales, salvo tal vez por el signo del ángulo fundamental, el cual se invierte $\theta \mapsto -\theta$ cuando el determinante de la matriz de conjugación Φ es menos uno.*

Observación 3. *Conjugar la representación fundamental con Φ igual a la rotación inversa (con ángulo $-\theta$), equivale a intercambiar el orden de la matriz diagonal y la rotación, sin pérdida de generalidad conservamos la rotación a la izquierda.*

Observación 4. *Transponer una matriz también cambia el orden de la matriz diagonal y la rotación, pero al mismo tiempo invierte el signo del ángulo fundamental $\theta \mapsto -\theta$ salvo que $\theta = \pi$ (o si escogiéramos otro dominio). En particular, cuando θ es igual a cero o a π , $M = M^T$. Para invertir una matriz en términos del dominio fundamental tenemos que transponerla y luego invertir los valores propios $\lambda_i \mapsto 1/\lambda_i$.*

Por último, al multiplicar una matriz por su transpuesta el ángulo fundamental se vuelve cero, los valores fundamentales quedan elevados al cuadrado y la matriz Φ de conjugación, dependiendo del orden de los factores, o bien permanece idéntica, o se modifica multiplicando por derecha la matriz de rotación del ángulo fundamental.

Calculamos los valores propios a partir del dominio fundamental para establecer las relaciones que buscamos. Es clave resaltar que las características geométricas de una transformación lineal en las que estamos interesados, tales como los valores propios, los valores singulares y las bases implicadas, al igual que las relaciones entre ellas, son invariantes para transformaciones ortogonalmente similares. Los valores propios λ_i de M son:

$$|M - \lambda I| = \lambda^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\cos\theta\lambda + \sigma_1\sigma_2 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + \sigma_2)\cos\theta \pm \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2\cos^2\theta - 4\sigma_1\sigma_2} \right]. \quad (10)$$

Esta fórmula puede reescribirse en términos de los parámetros fundamentales:

Theorem 1. *Los valores propios de una matriz real M de tamaño 2×2 pueden obtenerse a partir de los parámetros fundamentales mediante la fórmula:*

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[(r_1 |r_1| + r_2^2) \cos \theta \pm \sqrt{(r_1 |r_1| + r_2^2)^2 \cos^2 \theta - 4r_1 |r_1| r_2^2} \right]. \quad (11)$$

Interpretando el resultado anterior, es posible identificar de inmediato las regiones del espacio (r_1, r_2, θ) que corresponden con ciertos tipos de matrices, por ejemplo las matrices singulares corresponden con las superficies $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$.

Observación 5. *En el espacio (r_1, r_2, θ) las matrices simétricas corresponden con las superficies $\theta = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ y con la superficie $r_1 = -r_2$, mientras las demás matrices normales están representadas en la superficie $r_1 = r_2$. Las matrices antisimétricas corresponden con las rectas $r_1 = r_2$ cuando $\theta = (n + 1/2)\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Las matrices ortogonales se identifican con las rectas $r_2 = 1 = \pm r_1$ y las matrices escalares se encuentran en las rectas $r_1 = r_2$ para $\theta = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que cuando $r_1 = r_2 = \sqrt{\sigma}$ la fórmula para los valores propios se convierte en $\lambda = \sigma \cos \theta \pm i\sigma \sin \theta$.*

Mas importante será la ubicación de las matrices tipo Jordan, que podemos hallar mediante el discriminante del polinomio característico $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \cos^2 \theta - 4\sigma_1\sigma_2$. El siguiente corolario justifica la escogencia de los nuevos parámetros r_i en lugar de σ_i .

Corolario 1. *Dentro del dominio fundamental, para un valor fijo del parámetro θ , las matrices tipo Jordan corresponden con rectas en el plano (r_1, r_2) . De este modo, las matrices tipo Jordan corresponden con una superficie reglada dentro del dominio fundamental (ver figura 1).*

Demostración. Si el discriminante es cero los dos valores propios son iguales a:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \cos \theta,$$

y por lo tanto, si la matriz no es escalar no puede diagonalizarse, pues si fuera diagonal sería escalar e invariante por conjugación. En este caso, las matrices tipo Jordan pueden ser vistas como la frontera entre las matrices de valores propios reales y las de valores propios complejos. Es crucial determinar bien esta frontera, donde la condición $\lambda_1 = \lambda_2$ implica $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \cos^2 \theta = 4\sigma_1\sigma_2$ y por lo tanto:

$$\cos \theta = \pm \frac{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (12)$$

Sea $\sigma_1 = r_1^2$, $\sigma_2 = r_2^2$, $r_1 = r \cos \alpha$ y $r_2 = r \sin \alpha$, entonces:

$$\cos \theta = \pm \frac{2r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2} = \pm \sin 2\alpha,$$

por lo cual:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1}(\pm \cos \theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \pm \theta \right]. \quad (13)$$

□

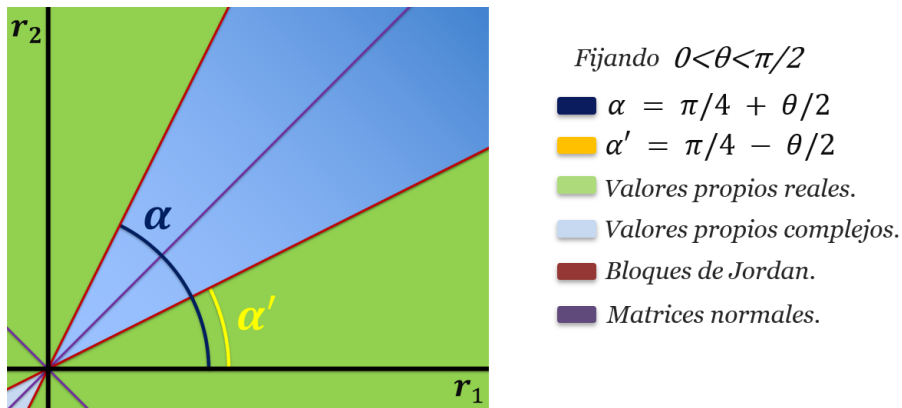


Figura 1

Lo único que falta considerar para aclarar por completo la escogencia del dominio fundamental, es la manera más apropiada de restringir los parámetros de tal forma que podamos representar todas las clases de matrices de forma inyectiva, tanto como sea posible, pues hay ciertas singularidades, por ejemplo cuando $r_1 = r_2 = 0$ el ángulo fundamental puede tomar cualquier valor y la matriz en cuestión seguirá siendo la misma.

Primero, respecto a r_1 y r_2 , hay que notar que intercambiar los valores singulares corresponde con cierto tipo de conjugación ortogonal (rotar $\pi/2$), por lo tanto sólo nos

vamos a interesar en el semiplano $r_2 \geq r_1$. Además multiplicar una matriz por menos uno es equivalente a remplazar $\theta \mapsto \theta + \pi$, en este caso podríamos restringir el parámetro θ al dominio $[0, \pi)$, pero en cambio preferimos restringir más r_i mediante $|r_1| \leq r_2$ y tomar $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Por supuesto que hay muchas otras formas de definir este dominio que funcionan igual de bien. Escogimos esta por consideraciones e interpretaciones de tipo geométrico que se darán a conocer al momento de emplear un cuarto parámetro ϕ para identificar las distintas matrices que se producen por conjugación dentro de cada clase de equivalencia.

Note que al restringir $\theta = 0$, toda pareja (r_1, r_2) en el dominio fundamental corresponde con una matriz que se diagonaliza con valores propios reales, iguales a $r_i |r_i|$. Mientras que cuando restringimos $\theta = \pm\pi/2$, por el contrario, sólo es posible diagonalizar con reales en los casos donde $r_1 < 0$, ya que en otro caso $\lambda = \pm ir_1 r_2$, a su vez, en este caso las matrices tipo Jordan se hallan sobre el eje $r_1 = 0$ y corresponden con todas las matrices nilpotentes. Debido a la simetría del coseno al cuadrado, lo que ocurre con el discriminante entre $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$ y el resto del intervalo, es un reflejo de lo que ocurre entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Observación 6. *Toda matriz 2×2 de entradas reales con determinante negativo es diagonalizable. En efecto, vemos que si $r_1 < 0$ el discriminante es siempre positivo.*

Observemos primero cómo expresar los vectores propios en términos de los valores singulares asumiendo que la matriz tiene determinante positivo. En realidad aparecen dos fórmulas, una asociada a cada fila de la matriz singular $M - \lambda I$ y se obtienen rotando los vectores fila $\pi/2$, veamos una de ellas. Las coordenadas de los vectores propios en esta sección se dan siempre en términos de la base ortonormal dada por las columnas de Φ :

$$\vec{v} = \left\langle \sigma_2 \sin \theta, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \theta \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \cos^2 \theta - 4\sigma_2 \sigma_2} \right\rangle. \quad (14)$$

Aquí aparece el seno del ángulo fundamental, de modo que no en vano incluimos los valores $\theta \in (-\pi, 0)$ en el dominio fundamental, como hubiéramos podido pensar observando los valores propios, que sólo dependen del coseno.

Theorem 2. *Es posible describir los vectores propios de una matriz real 2×2 a partir de los parámetros fundamentales mediante la fórmula:*

$$\vec{v} = \left\langle r_2^2 \sin \theta, \frac{r_1 |r_1| - r_2^2}{2} \cos \theta \mp \frac{1}{2} \sqrt{(r_1 |r_1| + r_2^2)^2 \cos^2 \theta - 4r_1 |r_1| r_2^2} \right\rangle. \quad (15)$$

Veamos algunos casos particulares:

Observe que cuando $r_1 = 0$:

$$\vec{v} = r_2^2 \left\langle \sin \theta, \frac{\mp 1 - 1}{2} \cos \theta \right\rangle. \quad (16)$$

A su vez $\theta = \pi/2$ implica:

$$\vec{v} = \left\langle r_2^2, \mp r_2 \sqrt{-r_1 |r_1|} \right\rangle. \quad (17)$$

Y si $r_1 = r_2 = r$ tenemos:

$$\vec{v} = r^2 \langle \sin \theta, \mp i \sin \theta \rangle. \quad (18)$$

Para las matrices tipo Jordan:

$$\vec{v} = \left\langle \sigma_2 \sin \theta, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \theta \right\rangle. \quad (19)$$

En breve realizaremos los cálculos para hallar el vector propio generalizado. Otro caso particular que es fácil de observar es $\theta = 0$. En estos ejemplos podríamos obtener vectores nulos o paralelos. Como se mencionó antes existe otra fórmula, la cual debemos usar en tal caso:

$$\vec{v} = \left\langle \frac{r_1 |r_1| - r_2^2}{2} \cos \theta \pm \frac{1}{2} \sqrt{(r_1 |r_1| + r_2^2)^2 \cos^2 \theta - 4r_1 |r_1| r_2^2}, r_1 |r_1| \sin \theta \right\rangle. \quad (20)$$

Ahora, resolviendo el sistema $(M - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}$:

Corolario 2. *Es posible asociar a todas las matrices tipo Jordan en el dominio fundamental un mismo vector propio generalizado $\vec{w} = \langle 0, -1 \rangle$.*

Demostración. Asumiendo que el discriminante del valor propio es igual a cero, que $\vec{v}$ es un vector propio, λ el valor propio, que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ y que M viene dada en términos de sus valores fundamentales, según las fórmulas que hemos obtenido, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \theta & -\sigma_2 \sin \theta \\ \sigma_1 \sin \theta & \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2 \sin \theta \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde $\vec{w} = \langle x, y \rangle$. Es posible verificar que la matriz en efecto es singular y que el sistema es consistente, obteniendo:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \theta \right) x + (-\sigma_2 \sin \theta) y = \sigma_2 \sin \theta, \quad (22)$$

y en conclusión, $\vec{w} = \langle 0, -1 \rangle$. □

En el caso de las matrices tipo Jordan, la fórmula obtenida para el valor propio en términos de los valores singulares es inversa a las obtenidas anteriormente (ver lema 2).

Corolario 3. *La traza y el determinante de una matriz $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a partir de los parámetros fundamentales, están dadas por $\text{tr}(M) = (r_1 |r_1| + r_2^2) \cos \theta$ y $\det(M) = r_1 |r_1| r_2^2$.*

2.2. Dominio fundamental expandido

Ahora definimos un cuarto parámetro ϕ para distinguir todas las matrices y no sólo las clases de equivalencia, expandiendo así el dominio fundamental. En el contexto de

la descomposición fundamental, consideremos las siguientes cuatro posibilidades para definir la matriz de conjugación Φ :

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}.$$

Estas cuatro matrices pueden obtenerse unas a partir de las otras multiplicándoles a la derecha matrices diagonales y ortogonales (es decir con unos y menos unos en la diagonal), las cuales son sus propias inversas y conmutan con cualquier otra matriz diagonal, en particular, con la matriz diagonal de la descomposición fundamental. Si el ángulo fundamental no es cero y Φ tiene determinante negativo, es necesario multiplicar el ángulo fundamental por -1 si queremos conmutar la matriz de rotación fundamental con alguna matriz diagonal y ortogonal con determinante negativo.

Lema 3. *Si el ángulo fundamental es cero, las cuatro posibles matrices Φ recién mencionadas producen exactamente el mismo efecto al conjugar. Si el ángulo fundamental no es cero, las dos matrices de determinante negativo sólo le cambian el signo respecto a las otras.*

Como ya dijimos que Φ debe tener determinante positivo, escojemos trabajar siempre con la primera matriz, y gratuitamente obtenemos el dominio del nuevo parámetro $\phi \in [0, \pi)$. Esto significa que en el dominio fundamental el signo del determinante depende solo de r_1 .

Como los elementos en la región $r_1 = r_2$ del dominio fundamental, son los únicos invariantes ante este tipo de conjugaciones (ortogonales), tiene perfecto sentido geométrico colapsar el eje θ en el dominio fundamental e imaginar que el cuadrante $|r_1| \leq r_2$ gira en torno a la semirrecta $r_1 = r_2$ al variar el nuevo parámetro ϕ , hasta caer en el cuadrante opuesto, al pasar de $\phi = 0$ a $\phi = \pi/2$. Lo anterior es consistente con el hecho de que la conjugación que corresponde al ángulo $\phi = \pi/2$, equivale a intercambiar los valores fundamentales.

Mientras intercambiar los valores fundamentales es equivalente a reflejar sobre la semirrecta $r_1 = r_2$, multiplicarlos ambos por menos uno en principio significa rotar un ángulo π , pero debido a la identificación de los dos semiplanos mediante ϕ , al ignorar este parámetro vemos que multiplicar por -1 a la larga puede entenderse como reflejar sobre la semirrecta $r_1 = -r_2$, desde el punto de vista de las clases de equivalencia. Lo anterior nos lleva a contemplar un hecho muy particular.

La conjugación deja quietos a los elementos en las clases donde $r_1 = r_2$. Si en cambio ignoramos el parámetro ϕ y variamos θ (desde cero), podemos imaginarnos que estamos rotando el cuadrante $|r_1| \leq r_2$ sobre la semirrecta $r_1 = -r_2$ (cuando llegamos a π el cuadrante se halla reflejado en el cuadrante opuesto), pues las clases en dicha semirrecta no están cambiando al variar θ , ya que no dependen de θ , los elementos dentro de las clases sin embargo, si se están reordenando entre tanto, a diferencia del caso anterior, como lo ilustra el siguiente lema.

Lema 4. Para las matrices cuyos valores fundamentales satisfacen $r_1 = -r_2$, multiplicar a izquierda por Θ es equivalente a conjugar con Φ , de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \Phi^{-1}, \quad (23)$$

donde $\phi = \theta/2$ y

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Demostración. Para conmutar el producto de la matriz diagonal con la matriz Φ^{-1} , se debe multiplicar por -1 la i -ésima fila y columna, por las propiedades de simetría y antisimetría del coseno y del seno, esto es equivalente a invertir la matriz Φ^{-1} al momento de pasar la matriz diagonal al lado derecho, de modo que $\Theta = \Phi^2$. $\square$

En este sentido, notamos que las clases de equivalencia en el dominio fundamental no siempre están representadas de manera única aun tras colapsar el eje θ .

Según lo que hemos visto, existen muchas posibilidades para definir el dominio fundamental expandido, restringiendo en mayor o menor medida los ángulos y en forma contraria los valores fundamentales. Por ejemplo podemos restringir al máximo los ángulos y no restringir los valores fundamentales en lo absoluto, así el dominio fundamental expandido sería:

$$\tilde{E} = \{(r_1, r_2, \theta, \phi) \mid \theta \in [-\pi/2, \pi/2), \phi \in [0, \pi/2), (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (25)$$

En cambio, resulta conveniente definir el dominio fundamental expandido restringiendo al máximo los valores fundamentales, al restringir los ángulos lo menos posible:

$$E = \{(r_1, r_2, \theta, \phi) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \phi \in [0, \pi), |r_1| \leq r_2\}. \quad (26)$$

El segundo dominio parece más apropiado para ser interpretado geométricamente.

Para tratar de entender la geometría del dominio fundamental expandido empezamos considerando el cuadrante $|r_1| \leq r_2$ del plano $\theta = \phi = 0$, imaginemos entonces que al variar ϕ desde cero hasta π estamos rotando dicho cuadrante alrededor de la semirrecta $r_1 = r_2$ hasta que regresa a su sitio, así describe una figura Ω que corresponde con la mitad de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano $r_1 = -r_2$ donde $\theta = 0$.

Ahora consideremos esta figura Ω como la mitad de un subespacio tridimensional inmerso en $\mathbb{R}^4$, variar θ puede verse entonces como una doble rotación, que deja invariante el plano $\{r_1 = -r_2\} \subset \Omega$ mientras lo rota un ángulo $-\theta$; entre tanto Ω hace un barrido dentro de la cuarta dimensión, de modo que cuando $\theta = \pi$, Ω se ha convertido en el medio subespacio opuesto (la mitad opuesta de Ω).

Esto luce un poco como las coordenadas esféricas en el espacio tridimensional, pero al fijar los ángulos, en lugar de obtener semirrectas obtenemos cuadrantes, por lo cual estamos parametrizando a $\mathbb{R}^4$ y no a $\mathbb{R}^3$. Esta interpretación sobre la geometría del dominio está contenida en el siguiente teorema.

Theorem 3. *El dominio fundamental expandido:*

$$E = \{(r_1, r_2, \theta, \phi) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \phi \in [0, \pi), |r_1| \leq r_2\}, \quad (27)$$

puede identificarse con una parametrización de $\mathbb{R}^4$, donde al fijar un ángulo y variar el otro, variar ϕ fija el plano $\{r_1 = r_2\} \subset E$ mientras hace invariante al plano $\{r_1 = -r_2\} \subset E$, por otra parte variar θ también hace invariantes a los planos $\{r_1 = \pm r_2\} \subset E$ pero no fija a ninguno de ellos.

Demostración. Es fácil notar que las matrices cuyos valores fundamentales son iguales, son invariantes por conjugación, de modo que ϕ fija el plano $\{r_1 = r_2\} \subset E$. Aplicando el lema 4 vemos a la vez que ϕ y θ hacen invariante al plano $\{r_1 = -r_2\} \subset E$. Por último, como ϕ fija el plano $\{r_1 = r_2\} \subset E$, los únicos grados de libertad que quedan son r_1 y θ , de modo que la acción de θ también hace invariante a este plano. $\square$

El nuevo parámetro podría llamarse *ángulo de conjugación* o *ángulo de base*, ya que es el único que depende por completo de la escogencia de los ejes de coordenadas (con la condición de que sean perpendiculares entre si y con una escala fija) y en este sentido es relativo al punto de vista del observador.

3. Descomposición Fundamental para matrices en dimensión n

Evidentemente el método anterior no puede generalizarse demasiado, ya que los polinomios de grado cinco o mayor no pueden resolverse por radicales (ver [4], sección 56, capítulo 10) y esto implica que, en dimensiones superiores, nunca vamos a tener fórmulas explícitas para factorizar el polinomio característico. Es posible definir el dominio fundamental, pero en general, resultará imposible dar fórmulas para los valores propios directamente a partir de los parámetros fundamentales.

Tal vez sea posible, sin embargo, obtener fórmulas explícitas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, no obstante, podemos resolver el problema de forma más general (mas no de forma explícita) desde un punto de vista geométrico. El número de valores y ángulos fundamentales puede calcularse fácilmente. Es claro que una matriz $n \times n$ debe tener n valores fundamentales, uno por cada valor singular. La matriz depende de n^2 parámetros, y ya tenemos n ; de los $n(n-1)$ parámetros restantes sólo la mitad corresponde con rotaciones fundamentales, pues la otra mitad son para definir la matriz de conjugación.

Podemos definir la descomposición fundamental para una matriz real M de tamaño $n \times n$ mediante la fórmula:

$$M = \Phi \Theta \Sigma \Phi^T, \quad (28)$$

donde Φ y Θ son matrices ortogonales con determinante positivo y Σ es la matriz diagonal:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} r_1 |r_1| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n^2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

definiendo los valores fundamentales r_i a partir de los valores singulares σ_i mediante $r_i^2 = \sigma_i$, y con la condición $|r_1| \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_n$.

Un toro maximal en un grupo de Lie compacto es un subgrupo de Lie conexo, compacto y abeliano maximal (ver [3], página 152). En el caso de las matrices ortogonales de dimensión par, el toro maximal corresponde (o es isomorfo) con las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_n} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

donde

$$R_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}. \quad (31)$$

En el caso de las matrices ortogonales de dimensión impar, las matrices del toro maximal son prácticamente iguales:

$$\begin{bmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

No es difícil notar que toda matriz ortogonal con determinante positivo es ortogonalmente similar a una matriz del toro maximal, única si ordenamos los ángulos de menor a mayor. De este modo podemos definir $n/2$ ángulos fundamentales en el caso par y $(n-1)/2$ en el caso impar. Como sabemos que Θ depende de $n(n-1)/2$ parámetros, los parámetros restantes, servirán para definir un espacio invariante de dimensión $n-2$ asociado a cada ángulo fundamental.

A continuación se presenta un enfoque donde no será necesario definir la matriz de rotación fundamental explícitamente a partir de parámetros. Lo que haremos es volver a darle un vistazo a los resultados anteriores y profundizar en el análisis.

Ejemplo 3. Consideremos la descomposición fundamental cuya matriz diagonal es:

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Ahora queremos entender como la matriz Σ' intercambia entre sí los subespacios de dimensión uno, es decir que en general, queremos estudiar la acción de las matrices diagonales $n \times n$ reales sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Supongamos además que $\sigma > 1$. Consideremos el subespacio unidimensional definido a partir de un parámetro $t \in \mathbb{R}$ y un parámetro fijo $\alpha > \sigma$ como $\langle \alpha t, t \rangle$ (es decir, conformado por los puntos $\langle x, y \rangle = \langle \alpha t, t \rangle$).

En este caso estamos suponiendo que $r_1 = 1$. El caso general se reduce a este mediante $\sigma = \sigma_2 / (r_1 |r_1|)$, cambiando de igual forma la escala de los valores propios y singulares pero no las características geométricas de los espacios propios en el escenario de la descomposición fundamental.

Lema 5. En el ejemplo anterior, el ángulo entre las rectas $\langle \alpha t, t \rangle$ y $\langle \alpha t, \sigma t \rangle$ coincide con el ángulo entre $\langle \sigma t, \alpha t \rangle$ y $\langle t, \alpha t \rangle$, pues cada pareja es el reflejo de la otra sobre la recta $\langle t, t \rangle$. Esto a su vez implica que la acción inducida por Σ' preserva el ángulo entre $\langle \alpha t, t \rangle$ y $\langle \sigma t, \alpha t \rangle$, pues es igual al ángulo entre sus imágenes $\langle \alpha t, \sigma t \rangle$ y $\langle t, \alpha t \rangle$ (ver figura 2).

Demostración. Al aplicar la acción inducida por Σ' a la recta $\langle \alpha t, t \rangle$, esta se convierte en $\langle \alpha t, \sigma t \rangle$, si reflejamos esta imagen sobre la recta parametrizada por $\langle t, t \rangle$ obtenemos la recta $\langle \sigma t, \alpha t \rangle$. Si ahora aplicamos la acción inducida por Σ' a la recta $\langle \sigma t, \alpha t \rangle$ obtenemos la recta $\langle t, \alpha t \rangle$ y si la reflejamos sobre la recta $\langle t, t \rangle$ volvemos a obtener el subespacio original $\langle \alpha t, t \rangle$. $\square$

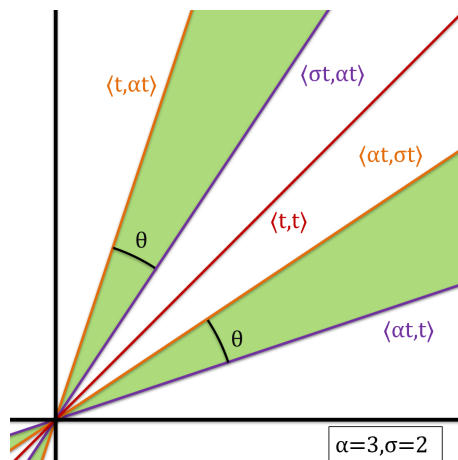


Figura 2

Esto revela claramente la naturaleza de la correspondencia que existe entre la descomposición en valores singulares y la forma canónica de Jordan a un nivel muy general.

Theorem 4. *Sea Σ una matriz diagonal con determinante positivo de tamaño $n \times n$. Consideremos todas la tuplas maximales de subespacios unidimensionales linealmente independientes, tales que los ángulos entre ellos permanezcan invariantes mediante la acción inducida por Σ :*

- a) *Para cada una de estas tuplas, existe al menos una rotación fundamental Θ que lleva a las imágenes mediante Σ de estos espacios de regreso a sus preimágenes, convirtiéndolos, mediante la descomposición fundamental, en espacios propios.*
- b) *El número de rotaciones fundamentales asociadas a una tupla es finito cuando esta tiene al menos $n - 1$ elementos.*
- c) *Todas las tuplas con menos de n elementos corresponden, mediante la descomposición fundamental, con matrices que no se pueden diagonalizar, ya que tienen asociados bloques de Jordan no triviales.*
- d) *Por otra parte, las rotaciones fundamentales que no corresponden de manera precisa con alguna tupla, definen matrices con valores propios complejos, mediante la descomposición fundamental.*

Demostración. (a) Para cada tupla, como Σ preserva los ángulos entre los subespacios y la orientación, es posible rotarlos de vuelta a su lugar y sin duda esto los convierte en espacios propios.

(b) Ahora consideremos una tupla con $n - 1$ elementos. Sea Ω el subespacio de dimensión $n - 1$ que contiene a todos los elementos de la tupla, y sea Γ el subespacio de dimensión $n - 1$ que contiene a todas las imágenes mediante Σ de los elementos de la tupla. Cualquier rotación fundamental asociada a dicha tupla tiene que mandar a Γ en Ω a la vez que lleva las imágenes mediante Σ de los elementos de la tupla de regreso a sus preimágenes, por ello, si los signos de los valores propios estuvieran predeterminados (por ejemplo si tuvieran que ser todos positivos) no podría existir más de una rotación fundamental correspondiente. En efecto, supongamos que los signos de los valores propios están predeterminados, consideremos una base ortonormal para Γ e incluyamos, de último, un elemento más para convertirla en una base ortonormal de todo el espacio.

En tal caso, como la matriz de rotación fundamental siempre tiene determinante positivo, la acción inducida por esta matriz no cambia la orientación de la base, y las imágenes de los primeros $n - 1$ elementos de la base ya están determinadas por asumir que los signos de los valores propios están predeterminados. El último elemento de la base tiene que tener una imagen perpendicular a todas las demás, de magnitud uno y que preserve la orientación de la base, lo que nos deja con una única posibilidad. Por lo tanto, en este caso, sólo puede existir una rotación fundamental Θ_0 . En general sólo existen un número finito de maneras de preestablecer los signos de los valores propios, luego solo existe un número finito de rotaciones asociadas a la tupla en cuestión.

(c) Como las tuplas son maximales, aquellas que tienen menos de n elementos corresponden con casos degenerados, donde dos o más de los elementos de la tupla se encuentran colapsados, lo que da lugar a los bloques de Jordan.

(d) Si consideramos una matriz de rotación fundamental que no corresponde de manera precisa con ninguna tupla, no será posible hallar los vectores propios para construir la forma canónica de Jordan sin usar complejos. $\square$

En el caso de una matriz con determinante negativo, necesitamos que se invierta la orientación en lugar de preservarse, al tiempo que se preservan los ángulos de las tuplas. El teorema muestra que el problema en cuestión se reduce a identificar las tuplas asociadas a una matriz diagonal dada, lo cual pudimos hacer en $\mathbb{R}^2$, pero en $\mathbb{R}^3$ este problema es mucho más complicado.

Algunos casos particulares en $\mathbb{R}^3$, sin embargo, pueden reducirse al caso de $\mathbb{R}^2$, esto ocurre cuando el eje de la rotación fundamental coincide con uno de los ejes coordenados, pues dicho eje es invariante mediante la rotación y la acción de la matriz diagonal Σ , correspondiendo con un espacio propio, mientras que lo que ocurre en el complemento ortogonal de dicho eje, el cual también es invariante bajo la rotación y la acción de Σ , luce exactamente como el caso que ya resolvimos explícitamente en $\mathbb{R}^2$. Esto nos permite identificar una gran cantidad de tuplas en $\mathbb{R}^3$ con la característica de que un elemento es perpendicular a los otros dos.

Consideremos ahora otros casos particulares de $\mathbb{R}^3$ que podemos entender desde $\mathbb{R}^2$. Retomemos el ejemplo que dio pie al lema. Anteriormente asumimos $\alpha > \sigma$ y vimos que teníamos un par de elementos distintos del espacio proyectivo asociados a este valor α , y hay otro par de elementos, las imágenes del par anterior mediante Σ' , donde el ángulo entre las rectas se preserva. Si en cambio suponemos $\alpha = \sigma$ no tenemos dos pares de rectas, pues la imagen de una coincide con la otra, que es justamente la diagonal $\langle t, t \rangle$, por lo cual en este caso sólo hay tres rectas.

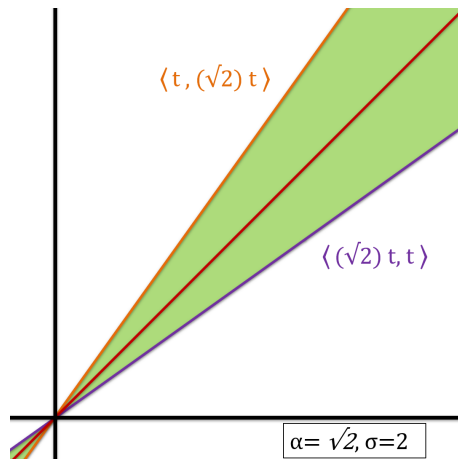


Figura 3

Si en cambio tomamos $\alpha = \sqrt{\sigma}$, tampoco tenemos dos pares de rectas, pero en este caso, no coinciden una imagen con una preimagen, sino que coinciden las dos imágenes

y las dos preimágenes, así que ahora sólo tenemos dos rectas que son, un elemento y su imagen mediante Σ' , y cada una coincide con la otra al reflejarlas sobre $\langle t, t \rangle$ (ver figura 3). Este es el caso degenerado donde los espacios propios se colapsan (bloques de Jordan), las rotaciones fundamentales que van más allá de este punto corresponden con valores propios complejos mediante la descomposición fundamental.

A partir de este caso podemos encontrar por construcción nuevas tuplas, para otros casos particulares de $\mathbb{R}^3$, pues habiendo colapsado dos espacios propios, podemos tomar como eje de rotación aquel que es perpendicular a los dos espacios propios que quedan y reducir este caso a $\mathbb{R}^2$. De este modo podemos conocer muchas otras tuplas con la característica de no tener más de dos elementos. Ahora nos enfocamos en estudiar el caso doblemente degenerado donde se colapsan los tres espacios propios.

Corolario 4. *En el contexto del lema 5, donde las rectas $\langle \alpha t, t \rangle$ y $\langle \sigma t, \alpha t \rangle$ se convierten simultáneamente en espacios propios mediante la rotación fundamental que les corresponde, es posible calcular los valores propios correspondientes en términos de los parámetros α y σ mediante las fórmulas:*

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sigma^2}{\alpha^2 + 1}}, \quad (34)$$

y

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 \sigma^2 + \sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}}. \quad (35)$$

En particular, $\alpha = \sqrt{\sigma}$ corresponde con un único valor propio $\lambda = \sqrt{\sigma}$ y podemos verificar que en este caso ambas fórmulas coinciden.

Demostración. Calculemos los valores propios en términos de los parámetros α y σ de manera general. Al hacerlo obtenemos:

$$\lambda_1 \|\langle \alpha, 1 \rangle\| = \|\langle \alpha, \sigma \rangle\| \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sigma^2}{\alpha^2 + 1}}, \quad (36)$$

y

$$\lambda_2 \|\langle \sigma, \alpha \rangle\| = \|\langle \sigma, \alpha \sigma \rangle\| \Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 \sigma^2 + \sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}}. \quad (37)$$

□

Ahora sabemos que $\alpha = \sqrt{\sigma}$ corresponde con un único valor propio $\lambda = \sqrt{\sigma}$.

Ejemplo 4. Consideremos la matriz (donde $1 < a < b$):

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Consideremos también una rotación fundamental que se pueda descomponer en dos, la primera rotación que sea aquella que fija el eje r y que corresponde con el caso donde

los otros dos espacios propios se colapsan; y la segunda rotación, que sea una que fije el eje perpendicular, tanto al eje r como al otro espacio propio colapsado, y tal que colapse todos los espacios propios en uno. Para entender cómo actuó la segunda rotación, debemos considerar la matriz:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \sqrt{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad (39)$$

donde $c = b/\sqrt{a}$. Debemos tener presente que la última matriz no corresponde con la base canónica, sino con la base $\{(1/\sqrt{a+1})\langle\sqrt{a}, 1, 0\rangle, \langle 0, 0, 1\rangle\}$. Aplicando el mismo razonamiento de antes encontramos el espacio propio tres veces colapsado, es decir, la tupla de un sólo elemento; este es el espacio generado por el vector:

$$\left\langle \sqrt{b}, \sqrt{b/a}, \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{a^{-1}}} \right\rangle. \quad (40)$$

Como esta fórmula no luce del todo simétrica, con respecto a los parámetros a y b , queremos observar qué pasa si incluimos el tercer parámetro que obviamos, sustituyendo la matriz diagonal.

Corolario 5. En el escenario del teorema 4, la matriz diagonal (donde $0 < a < b < c$):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (41)$$

tiene asociada una tupla con un único elemento, el cual es el espacio generado por el vector:

$$\left\langle \sqrt{c/a}, \sqrt{c/b}, \sqrt{\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}} \right\rangle. \quad (42)$$

Como la fórmula sigue sin ser del todo simétrica, tenemos que asumir que no hemos hallado una sola tupla con un único elemento, sino tres de estas monotuplas, y que corresponden sólo con el primer y último octante, por lo tanto, tenemos al menos doce de estas tuplas solitarias.

Demostración. El resultado se obtiene mediante el mismo razonamiento aplicado en ejemplo 4, al reemplazar la matriz Σ . $\square$

Observación 7. La expresión para el vector del último corolario se simplifica considerablemente al escribirse en términos de los parámetros fundamentales, mediante la asociación obvia $a = r_1^2$, $b = r_2^2$, $c = r_3^2$:

$$\left\langle \frac{r_3}{r_1}, \frac{r_3}{r_2}, \sqrt{\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}} \right\rangle, \quad (43)$$

lo cual revela una vez más la conveniencia de emplear al dominio fundamental en este contexto.

Aquí la meta es hallar un criterio geométrico general para identificar las tuplas, como lo podemos hacer en $\mathbb{R}^2$ de manera muy simple, reflejando sobre la diagonal la imagen mediante Σ de un subespacio, para encontrar el compañero con el cual formar una tupla. Si encontráramos una forma de generalizar esta idea a $\mathbb{R}^n$, podríamos tener una respuesta explícita para esta tesis, mediante un criterio geométrico, sin acarrear un bulto de parámetros.

4. El dominio fundamental y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Para aplicar de forma sencilla nuestro entendimiento del dominio fundamental a la teoría de Lie, consideremos el grupo de Lie $Sl(2, \mathbb{R})$ de las matrices 2×2 con determinante uno junto con el producto usual de matrices, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ conformada por las matrices 2×2 de traza cero y donde el corchete de Lie es el conmutador.

Desde el punto de vista de los parámetros fundamentales, que la traza de una matriz sea igual a cero quiere decir que $(r_1 |r_1| + r_2^2) \cos \theta = 0$ (corolario 3). De este modo podemos identificar en qué región del dominio fundamental se encuentra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Vemos que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = D_1 \cup D_2$, donde D_1 corresponde con las matrices tales que $r_1 = -r_2$ y D_2 con aquellas donde $\theta = \pm\pi/2$. Por la observación 5 vemos que D_1 está conformado por matrices simétricas, y por lo tanto la correspondencia entre las descomposiciones en tal caso está dada por el lema 1. El siguiente teorema ilustra lo que ocurre en D_2 .

Theorem 5. Para $M \in D_2 \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, donde el ángulo fundamental es $\theta = \pm\pi/2$, tenemos:

$$M = \pm \Phi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 |r_1| & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{bmatrix} \Phi^{-1} = \pm \Phi \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ r_1 |r_1| & 0 \end{bmatrix} \Phi^{-1}, \quad (44)$$

donde el signo $\pm$ en la matriz es igual al signo $\pm$ de θ , sin pérdida de generalidad podemos asumir $\theta = \pi/2$, olvidarnos del menos y asumir $\Phi = I$ para escoger un representante adecuado de la clase de equivalencia del dominio fundamental a la que pertenece M .

La fórmula para los valores propios en este caso es $\lambda = \pm r_2 \sqrt{-r_1 |r_1|}$, por lo cual este caso a su vez se divide en tres casos:

- a) Cuando $r_1 = 0$, tenemos que M es nilpotente y por lo tanto similar a un bloque de Jordan:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

- b) Cuando $r_1 < 0$ la matriz M puede diagonalizarse con valores propios reales:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ -r_1^2 & 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -r_1 r_2 & 0 \\ 0 & r_1 r_2 \end{bmatrix} A^{-1}, \quad (46)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} r_2 & r_2 \\ r_1 & -r_1 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

c) Por último, cuando $r_1 > 0$ los valores propios de M son complejos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ r_1^2 & 0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -ir_1r_2 & 0 \\ 0 & ir_1r_2 \end{bmatrix} B^{-1}, \quad (48)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} r_2 & r_2 \\ ir_1 & -ir_1 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Demostración. Mediante cálculo directo, se comprueban las identidades:

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ -r_1^2 & 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -r_1r_2 & 0 \\ 0 & r_1r_2 \end{bmatrix} A^{-1}, \quad (50)$$

y

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 \\ r_1^2 & 0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -ir_1r_2 & 0 \\ 0 & ir_1r_2 \end{bmatrix} B^{-1}. \quad (51)$$

□

El teorema anterior sugiere que los parámetros fundamentales son particularmente adecuados para describir $SL(2, \mathbb{R})$. Para concluir, pese a que el enfoque geométrico de la sección 3 es el más general, este resultado no es tan explícito como el obtenido mediante el enfoque algebraico de la sección 2. No obstante, dicho enfoque algebraico podría generalizarse un poco en un futuro, para dimensiones tres y cuatro. Por otra parte, para dimensiones superiores, el enfoque geométrico, tal vez, podría darnos un criterio para deducir resultados algebraicos. Por último, en un contexto más general, podría estudiarse la relación entre la descomposición de Jordan-Chevalley y la descomposición de Iwasawa.

Agradecimientos

Quisiera agradecer al doctor Alexander Cardona por apoyarme como director de este trabajo de maestría, retroalimentando mis avances, ampliando mi conocimiento e invitándome a considerar perspectivas más generales, también por su contribución como asesor en la edición preliminar de este artículo. Así mismo extender mis agradecimientos a los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes por ser guías e inspiración en la búsqueda del conocimiento.

Referencias

- [1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, second edition, Springer, New York, 1997.
- [2] L. Cagliero and F. Szechtman, *Jordan-Chevalley Descomposition in Finite Dimensional Lie Algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 139, Number 11, November 2011, pages 3909-3913. Electronic publication March 31, 2011.
- [3] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Lie Groups*, Springer, Berlin, 2000.

- [4] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, seventh edition, Addison Wesley, Boston, 2003.
- [5] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, fourth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [6] S. Jana, *Cartan and Iwasawa Deesompositions in Lie theory*, Masters' 1st year, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada V6T1Z2

Recibido en noviembre de 2024. Aceptado en septiembre de 2025.

CARLOS A. HERNÁNDEZ
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: ca.hernandezg@uniandes.edu.co