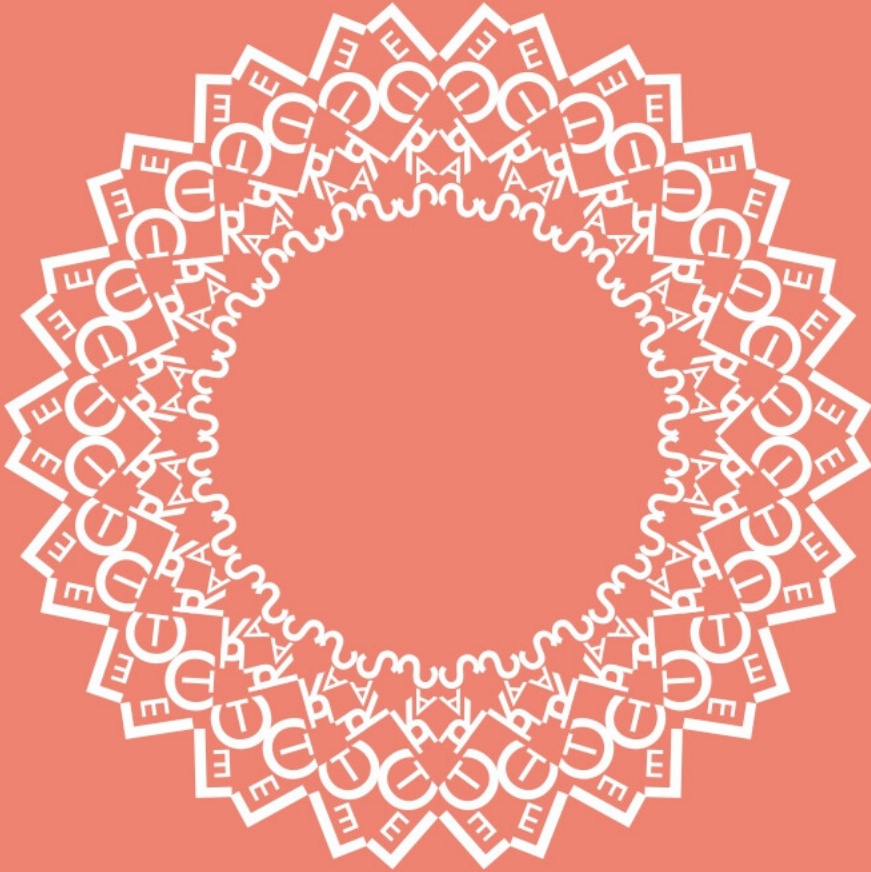


ISSN 0120-1980



Lecturas Matemáticas

Vol 45 - No.1 Junio 2024

Summability of a Fourier series

Sumabilidad de una serie de Fourier

Josefina Alvarez

New Mexico State University, U.S.A.

ABSTRACT. In this expository article we discuss the notion of summability, in a historical context, focusing on two methods, Cesàro's and Abel's. We apply these methods to Fourier series, analyzing in detail the summability results they provide.

Key words: Cesàro summability, Abel summability, Fourier series, Fejér kernel, Poisson kernel, good kernels, Shakarchi's and Stein's conditions.

RESUMEN. En este artículo expositivo estudiamos la noción de sumabilidad en un contexto histórico, concentrándonos en dos métodos, el de Cesàro y el de Abel. Además aplicamos estos métodos a las series de Fourier, analizando en detalle los teoremas de sumabilidad que resultan.

Palabras clave: Método de sumabilidad de Cesàro, método de sumabilidad de Abel, series de Fourier, núcleo de Fejér, núcleo de Poisson, núcleos buenos, las condiciones de Shakarchi y Stein.

2020 Mathematics Subject Classification: 40A05, 40D05, 40G05, 40G10, 42A16, 42A24.

1 Introduction

The purpose of this expository article is to discuss, in a historical context, two summability methods, Cesàro's and Abel's, and to apply them to the Fourier series of a 2π -periodic function that is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.

The present article continues with and extends the topics presented in [1], where we studied results of convergence *à la Cauchy*, for the Fourier series of a 2π -periodic function satisfying appropriate conditions.

The organization is as follows: In Section 2 we collect a number of historical observations on how the treatment of series evolved over time. Section 3 is dedicated to two summability methods, Cesàro's and Abel's. Their properties and the relation of one to the other are illustrated with numerous examples. Next, we apply these two summation methods to the Fourier series of a 2π -periodic function that is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. As it is the case of convergence, each summation method is associated with an integral operator defined by an appropriate kernel, Fejér for Cesàro's method and Poisson for Abel's method. To calculate these two kernels is the subject of Section 3. In Section 4 we use the notion of good kernel, discussed by Rami Shakarchi and Elias M. Stein in [18], to prove that both, Cesàro's method and Abel's method, sum the Fourier series to the value of the function, at every point of continuity. We also show that the Fejér kernel and the Abel kernel satisfy the condition stated by Antoni Zygmund in ([21], p. 88). Finally, in the last section, we go over a brief discussion of convergence versus summability, for a Fourier series.

2 Convergent series and divergent series

We begin with a series $\sum_{j \geq 0} a_j$ of real terms a_j . It converges, or it is convergent, if the sequence of its partial sums $\sum_{0 \leq j \leq n} a_j$ has a finite limit as the index n goes to infinity. In other words, if there is a real number a so that, for each $\varepsilon > 0$ there is $N = N(\varepsilon) \geq 1$ for which

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j - a \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

for all $n \geq N_\varepsilon$. If this is the case, we write

$$\sum_{j \geq 0} a_j = a$$

and we call a the sum of the series. The limit of a sequence, if it exists, is unique. Therefore, when a exists, it is unique. If a does not exist, we say that the series diverges, or that it is divergent. As a consequence of the definition of convergent series, the general term a_j of a convergent series goes to zero as $j \rightarrow \infty$.

These definitions and results appear in Augustin-Louis Cauchy's *Analyse Algébrique*, published in Paris in 1821.

It is permissible to say, for instance, that the series $\sum_{j \geq 1} j$ "goes" to infinity, or that it diverges to infinity, because its partial sums increase without bound as n increases. However, since ∞ is not a number, the series is divergent, according to Cauchy's definition.

The Cauchy's condition, which appears in p. 125 of *Analyse Algébrique* and is part of the Calculus canon, allows us to decide whether a series is convergent or not, without having to identify its sum.

According to ([20], p. 11), John Wallis had already formulated, in 1655, a definition of convergence equivalent to (1). The expression "convergent series" is due to James Gregory,

who began to use it in 1668 ([20], p. 16). As for the expression “divergent series”, the same source states that it was coined by Nicolaus (I) Bernoulli in 1713.

Nevertheless, Cauchy was the first to make a rigorous study of series, focused on convergence ([17], Cauchy’s biography).

Divergent series puzzled and challenged mathematicians for many centuries. For instance, Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz, who were the first to manipulate series systematically, had little inclination to deal with divergent series, although, as Godfrey Harold Hardy puts it ([8], p. 1), “Leibniz sometimes played with them.” Still, regardless of how careless their manipulations look today, even in Arquimedes’s time, mathematicians had a pretty good idea of whether a series was convergent or divergent. Moreover, the great masters just seemed to know what manipulations were “permissible”, no matter how devoid of meaning they appeared to be. As an example, Hardy uses the work of Leonhard Euler on the series $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ (see [8], p. 14):

For $0 \leq r < 1$,

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j r^j = \frac{1}{1+r}. \quad (2)$$

The right-hand side of (2) can be rightfully evaluated for $r = 1$. Therefore,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{j \geq 0} (-1)^j r^j = \frac{1}{2}.$$

Taking $r = 1$ on the left-hand side of (2) we have, formally, the series $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Euler’s conclusion is that

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Leibniz had already this result, using “probability and metaphysics” ([8], p. 14).

Be that as it may, mathematicians of different periods did not fail to notice that reckless manipulations of divergent series often led to interesting conclusions, which sometimes could be verified by other means. Hardy cites Euler as saying ([8], p. 15) that “the controversies excited by the use of divergent series are largely ‘verbal’.” Hardy goes on to saying: “Here, as elsewhere, Euler was substantially right. The puzzles of the time about divergent series arose mostly, not from any particular mystery in divergent series as such, but from disinclination to give formal definitions and from the inadequacy of the current theory of functions.”

Indeed, before Cauchy insisted on the need for explicit definitions, even the most illustrious mathematicians were not inclined to ask “What *is the definition* of, say, $1 - 1 + 1 - \dots$?”, but rather they asked the entirely different question “What *is* $1 - 1 + 1 - \dots$?” ([8], p. 6).

After Euler, Joseph Fourier and Simeón Denis Poisson were the analysts who used divergent series most ([8], p. 17). Nevertheless, with Cauchy’s definition, the attention was placed on convergent series, with divergent series being gradually removed from analysis. However, in the last quarter of the nineteenth century, they made a dramatic

reentrance, with the works of Henri Jules Poincaré, Thomas Jan Stieltjes and Ernesto Cesàro. Poincaré, in an article published in 1886 in *Acta Mathematica*, used particular divergent series to approximate the solutions of ordinary differential equations, near irregular points. Stieltjes, in his doctoral dissertation, published the same year in *Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieur*, showed how certain divergent series could give excellent approximations for important special functions. It is in the work of Poincaré and Stieltjes, that the general notion of asymptotic expansion appeared. To be sure, quite a few mathematicians, among them Euler, Abraham de Moivre, James Stirling, Pierre-Simon Laplace and Adrien-Marie Legendre, had used asymptotic expansions in particular cases. Nevertheless, the formal concept of asymptotic expansion began with Stieltjes and Poincaré ([5], p. 1; [20], p. 151) and it is now used also in algebraic equations and partial differential equations, of interest in the applied sciences.

As for Ernesto Cesàro, he worked in a completely different direction, arguing, in an article published in 1890 in the *Bulletin des Sciences Mathématiques*, that summing a divergent series could mean something altogether different from Cauchy's definition.

It is Cesàro's approach that is relevant in our context. We will discuss it in the next section.

3 A divergent series can have a sum

We begin with a definition.

Definition 1. A series $\sum_{j \geq 0} a_j$ is summable according to Cesàro's method, or it is Cesàro summable, if there is a number a such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1} = a, \quad (3)$$

where $s_n = \sum_{0 \leq j \leq n} a_j$ for $n \geq 0$.

If the series is Cesàro summable, we write

$$\sum_{j \geq 0} a_j = a \ (C, 1),$$

and we say that a is the Cesàro sum of the series, or the $(C, 1)$ sum of the series.

Since a is the limit of a sequence, a is uniquely determined.

Let us observe that the average

$$c_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1}$$

for $n \geq 0$, provides a way of finding the terms of the sequence $\{c_n\}_{n \geq 0}$ recursively:

$$\begin{aligned} c_0 &= s_0 = a_0, \\ c_n &= \frac{n}{n+1} c_{n-1} + \frac{s_n}{n+1} = \frac{nc_{n-1} + s_n}{n+1} \text{ for } n \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Example 1. The partial sums of the series $\sum_{j \geq 0} (-1)^j = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ form the sequence $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$, which does not converge. By using (4) with $c_0 = a_0 = 1$, we have

n	c_n	n	c_n	n	c_n
1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{3}{5}$	6	$\frac{4}{7}$

and so on. Therefore, we guess that

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 2k + 1, k \geq 0 \\ \frac{k+1}{2k+1} & \text{for } n = 2k, k \geq 1 \end{cases},$$

which can be verified by a simple inductive argument on k .

Since the sequence $\{c_n\}_{n \geq 0}$ converges to $\frac{1}{2}$ as $n \rightarrow \infty$, we conclude that

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j = \frac{1}{2} (C, 1),$$

which gives a rigorous justification to Leibniz's result.

Example 2. For the series $\sum_{j \geq 0} j$, which diverges to infinity,

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n j \stackrel{\text{induction}}{=} \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$$

for $n \geq 0$.

Thus, $c_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. According to Definition 1, the series $\sum_{j \geq 0} j$ is not $(C, 1)$ summable.

Example 3. We consider the series $\sum_{j \geq 0} (-1)^j (j+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

The sequence of its partial sums is $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$, which diverges.

From the values

n	c_n	n	c_n	n	c_n
0	1	4	$\frac{3}{5}$	8	$\frac{5}{9}$
1	0	5	0	9	0
2	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{4}{7}$	10	$\frac{6}{11}$
3	0	7	0	11	0

we guess that

$$c_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2k+1} & \text{for } n = 2k, k \geq 0 \\ 0 & \text{for } n = 2k+1, k \geq 0 \end{cases},$$

which can be verified by induction.

The sequence $\{c_{2k}\}_{k \geq 0}$ converges to $\frac{1}{2}$ as $k \rightarrow \infty$, while the sequence $\{c_{2k+1}\}_{k \geq 0}$ is identically zero. So, the sequence $\{c_n\}_{n \geq 0}$ diverges, from which we conclude that the series $\sum_{j \geq 0} (-1)^j (j+1)$ is not $(C, 1)$ summable.

Hardy attributes to Cauchy the following result ([8], p. 10):

If a series $\sum_{j \geq 0} a_j$ converges to a , the average $\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$ also converges to a as $n \rightarrow \infty$. In the context of $(C, 1)$ summability, Cauchy's result is stated as follows:

Theorem 1. *Cesàro's method is regular. That is, if $\sum_{j \geq 0} a_j$ converges to a , then $\sum_{j \geq 0} a_j = a$ $(C, 1)$.*

Proof. If we fix $n_0 \geq 1$ and consider $n > n_0$, we can write

$$\begin{aligned} |c_n - a| &\leq \frac{|s_0 - a| + \dots + |s_{n_0} - a|}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=n_0+1}^n |s_j - a| \\ &\leq \frac{n_0+1}{n+1} \max_{0 \leq j \leq n_0} |s_j - a| + \frac{n-n_0}{n+1} \sup_{j \geq n_0+1} |s_j - a| \\ &\leq C \frac{n_0+1}{n+1} + \sup_{j \geq n_0+1} |s_j - a|, \end{aligned}$$

where $C = \sup_{j \geq 0} |s_j - a|$, which is finite because the sequence $\{s_j\}_{j \geq 0}$, being convergent, is also bounded.

If we fix $\varepsilon > 0$, according to (1) there is $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ so that

$$\sup_{j \geq n_0+1} |s_j - a| \leq \varepsilon.$$

Therefore,

$$|c_n - a| \leq \underbrace{C \frac{n_0+1}{n+1}}_{(i)} + \varepsilon,$$

for all $n > n_0$.

Since there is $N = N(\varepsilon) > n_0$ such that $(i) \leq \varepsilon$ for $n \geq N$, we can say that

$$|c_n - a| < 2\varepsilon$$

for all $n \geq N$.

This completes the proof of the theorem. □

Cauchy's definition of convergence can be viewed as a particular summability method, which we call Cauchy's method.

As we showed in Example 2, the series $\sum_{j \geq 0} j$ is not $(C, 1)$ summable. Nevertheless, it constitutes an example of the following general phenomenon ([8], p. 10):

If the series $\sum_{j \geq 0} a_j$ diverges to infinity, then the sequence $\{c_n\}_{n \geq 0}$ goes to infinity as $n \rightarrow \infty$. That is, Cesàro's method is regular in this extended sense, called complete regularity.

The method also enjoys other natural and useful properties.

Theorem 2. (for the proof, see [8], p. 95, Theorem 40).

1. The $(C, 1)$ method is linear: If $\sum_{j \geq 0} a_j = a (C, 1)$ and $\sum_{j \geq 0} b_j = b (C, 1)$, then

$$\alpha \sum_{j \geq 0} a_j + \beta \sum_{j \geq 0} b_j = \alpha a + \beta b (C, 1),$$

for all numbers α, β .

2. The $(C, 1)$ method is stable: $\sum_{j \geq 0} a_j = a (C, 1)$ if, and only if, $\sum_{j \geq 1} a_j = a - a_0 (C, 1)$.

As a consequence of 2) in Theorem 2, we can conclude, inductively, that

$$\sum_{j \geq 0} a_j = a (C, 1) \text{ if, and only if, } \sum_{j \geq k+1} a_j = a - a_0 - \cdots - a_k (C, 1), \quad (5)$$

for any $k \geq 0$ fixed.

The convergence of a series is linear and stable. Furthermore, the convergence of a series and its sum, or its divergence, does not change if we “dilute” the series. That is, if we insert any number of zeros as terms of the series, in any way ([8], p. 59, Section 3.9).

From (5), the $(C, 1)$ summability of the series $\sum_{j \geq 0} a_j$ does not change if we add a finite number of zeros.

Indeed, let us suppose that the series $\sum_{j \geq 0} a_j$ is $(C, 1)$ summable to a and that all the zeros are inserted before a_0 and between a_0 and a_k for some $k \geq 0$. According to (5), the series $\sum_{j \geq k+1} a_j$ is $(C, 1)$ summable to $a - a_0 - \cdots - a_k$, which remains the same if we reinsert all the zeros in the appropriate places.

However, adding an infinite number of zeros, can destroy the summability or change the sum, of a $(C, 1)$ summable series ([8], p. 60). For example,

Example 4. We claim that

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \cdots = \frac{1}{3} (C, 1), \quad (6)$$

while we showed in Example 1 that $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2} (C, 1)$.

To verify (6), we begin by calculating a few partial sums

n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n
0	1	3	1	6	1	9	1
1	0	4	0	7	0	10	0
2	0	5	0	8	0	11	0

from which it can be proved by induction on k that

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 3k & \text{for } k \geq 0 \\ 0 & \text{if } n = 3k + 1 & \text{for } k \geq 0 \\ 0 & \text{if } n = 3k + 2 & \text{for } k \geq 0. \end{cases}$$

Therefore, if $n = 3k$ for $k \geq 0$,

$$c_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{k+1}{3k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3},$$

if $n = 3k+1$ for $k \geq 0$,

$$c_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{k+1}{3k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3},$$

and, if $n = 3k+2$ for $k \geq 0$,

$$c_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{k+1}{3k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

The sets $\{3k\}_{k \geq 0}$, $\{3k+1\}_{k \geq 0}$ and $\{3k+2\}_{k \geq 0}$ consist of the numbers that, when divided by 3, have a remainder equal to 0, 1, and 2, respectively. That is to say, these sets are the three congruence classes modulo 3, which, therefore, form a partition of the natural numbers.

Hence, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Daniel Bernoulli had already applied the $(C, 1)$ method, in 1713, to some specific type of series ([8], p. 8). The method had also been used by Ferdinand George Frobenius in an article published in the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle's Journal) in 1880 ([8], pp. 8 and 389). Actually, it was already known in Euler's time that averaging the terms of a sequence, could improve its behavior ([15], p. 4). Still, all these observations were made in specific cases. The idea of defining the sum of a general divergent series rests firmly with Cesàro.

Cesàro's method is denoted $(C, 1)$, rather than (C) , because in its 1890 article, Cesàro actually defines a whole family of summation methods, (C, k) , by iteration. More precisely, the method (C, k) for $k \geq 2$ consists of iterating the partial sum k times, with the result being divided by a number depending on n and k , that is equal to $n+1$ when $k = 1$ (see [8], Section 5.4). Since we will restrict ourselves to the method $(C, 1)$, no more will be said about the (C, k) method for $k \neq 1$.

Euler's work on the series $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ suggests the following summability method.

Definition 2. If the series $\sum_{j \geq 0} a_j r^j$ converges for $0 \leq r < 1$ with sum $f(r)$ and there is $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = a$, we say that the series $\sum_{j \geq 0} a_j$ is Abel summable with sum a or

$$\sum_{j \geq 0} a_j = a \quad (A).$$

For instance,

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j (j+1) = \frac{1}{4} \quad (A), \quad (7)$$

which is a particular case of the following example:

Example 5. We claim that, for each $n \geq 1$,

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j (j+1)^n = - \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+1}{i} (j-i)^n \right) (-1)^j}{2^{n+1}} \quad (A). \quad (8)$$

For $0 < |c| < 1$ we consider the series

$$\sum_{j \geq 0} (j+1)^n c^j = \frac{1}{c} \sum_{k \geq 1} k^n c^k.$$

The series $\sum_{k \geq 1} k^n c^k$ has a long and distinguished history, beginning with Euler's investigations on the series

$$- \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^s}{j^s}$$

for $s = -1, -2, -3, \dots$, which was later named Dirichlet's eta function, after the mathematician Peter Gustav Lejeune-Dirichlet.

The sum of the series $\sum_{k \geq 1} k^n c^k$, in the sense of convergence, was calculated in [2], using purely analytic methods:

$$\sum_{k \geq 1} k^n c^k = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+1}{i} (j-i)^n \right) c^j}{(1-c)^{n+1}} \quad (9)$$

for $n \geq 1$, $|c| < 1$.

Such a proof might not be expected. Indeed, the answer involves the so-called Euler's polynomials, whose coefficients have a combinatorial meaning in the context of permutations, as it is explained in ([2], Section 5). Therefore, the traditional proof of (9) is combinatorial in nature.

In any case, we do have the sum of the series and that is all we need here.

Now, we can write, for $c = -r$, $0 < r < 1$,

$$\sum_{j \geq 0} (j+1)^n (-r)^j = - \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+1}{i} (j-i)^n \right) (-r)^j}{r (1+r)^{n+1}}. \quad (10)$$

The right-hand side of (10) has limit, when $r \rightarrow 1^-$, equal to

$$- \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+1}{i} (j-i)^n \right) (-1)^j}{2^{n+1}}.$$

Therefore, we have verified (8). Finally, when $n = 1$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n+1}{i} (j-i)^n \right) (-r)^j &= - \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{2}{i} (1-i) \\ &= -1, \end{aligned}$$

which gives us (7).

It seems strange that a summation method would carry the name of Niels Erik Abel, an ardent admirer of Cauchy, and a fierce opponent to the use of divergent series.

Indeed, in Abel's words, written in 1828, "divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever." ([8], preface by John Edensor Littlewood).

The reason for the association is Abel's theorem (for the proof see, for instance, [6], p. 330, Theorem 7.26 and p. 331, Corollary 7.28):

Theorem 3. *If the series $\sum_{j \geq 0} a_j$ converges, then the series $\sum_{j \geq 0} a_j r^j$ converges for $0 \leq r \leq 1$ and*

$$\sum_{j \geq 0} a_j = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{j \geq 0} a_j r^j.$$

Abel's theorem guarantees that the Abel method is regular, in the sense of Theorem 1.

A result which assures the convergence of some kind of average assuming the summability of a certain series by Cauchy's method of convergence, is called an Abelian theorem.

The converse of an Abelian theorem is usually false. In fact, a summation method for which the converse is true is a trivial method since it only sums convergent series. However, modified versions of the converse can be true and of great interest. As an example, we mention a result due to Hardy.

Theorem 4. *If $\sum_{j \geq 0} a_j = a(C, 1)$ and the sequence $\{ja_j\}_{j \geq 0}$ is bounded, then $\sum_{j \geq 0} a_j$ converges to a .*

Hardy proves Theorem 4 in [8] as a particular case of a more general result ([8], p. 121, Theorem 63).

A proof of Theorem 4 attributed to Littlewood, is given in ([20], p. 156).

Modified converses of Abelian theorems are called Tauberian theorems, because it was the mathematician Alfred Tauber who proved the first one:

Theorem 5. *If $\sum_{j \geq 0} a_j = a(A)$ and the sequence $\{ja_j\}_{j \geq 0}$ converges to zero as $j \rightarrow \infty$, then $\sum_{j \geq 0} a_j$ converges to a .*

A proof of this result is in ([8], p. 149, Theorem 85).

Examples 3 and 5 show that there are (A) summable series that are not $(C, 1)$ summable. On the other hand,

Theorem 6. (for the proof see, for instance, [8], p. 108, Section 5.12) Cesàro summability $(C, 1)$ implies Abel summability (A) , with the same sum.

That is, (A) summability is strictly stronger than $(C, 1)$ summability, meaning that it sums more series.

Having investigated the two methods that interest us, it is now time to turn our attention to Fourier series, as an excellent ground where to test them. To be sure, much more can be said about summation methods, for which we refer to [8], as well as to the book by Lloyd Leroy Smail [19] which discusses every one of the many results on summability published up to 1925.

For completeness, we begin our discussion of Fourier series recounting briefly the genesis of the subject and the first convergence result (for more details, see [1]).

4 Fourier series and Dirichlet's result

Before Joseph Fourier, the nature of heat was not well understood. Indeed, in 1736, the French Academy called for essays on the topic “The nature and the propagation of ‘fire’”, where the word ‘fire’ was meant to signify ‘heat’. All the submissions, including Euler’s, missed the point and attempted to explain how fires develop ([10], p. 5).

Nevertheless, according to Umberto Bottazzini ([3], p. 59), by the end of the eighteenth century, heat was starting to be perceived as a form of energy that could aid in production. There was an ever increasing use of steam engines in industrial processes, particularly in England and France. “But if it is the *practical interests* that are best expressed in the English textile mills, it is the *theoretical aspects* that particularly engaged the French scientists.” ([3], p. 59).

Under the title *The Analytical Theory of Heat*, Fourier published in 1822 two pieces, written in 1807 and 1811. In a radical departure from the work of others, Fourier developed a mathematical model for the propagation of heat, a differential equation known as heat equation.

To solve the heat equation, Fourier used certain series, now called Fourier series. At the time, the heat equation was viewed as Fourier’s crowning achievement, while the series “were considered a disgrace.” ([10], p. 6).

The topic of Fourier series basically rests upon the formulas

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n \neq 0, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n \neq 0. \quad (14)$$

Fourier shows in several particular cases, that the series converges to the function f , meaning that the series converges pointwise to $f(x)$, for each x . Then, he proceeds to state that “all the series converge”. Later on, he says “we must remark that our demonstration applies to an entirely arbitrary function.” ([10], p. 12).

In spite of these rather exuberant statements, the following question persisted: Does the series on the right hand side of (11) really converge to $f(x)$ for all x ? After several mathematicians of the time, including Cauchy, produced more or less faulty proofs, Dirichlet showed pointwise convergence under rather general conditions. His work was published in 1829 in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle’s Journal).

In Jean-Pierre Kahane’s words ([10], p. 31), “The article of Dirichlet on Fourier series is a turning point in the theory and also in the way mathematical analysis is approached and written. Its intention is simply to give a correct statement and a correct proof of the convergence of Fourier series. The result is a paradigm of what is correctness in analysis.”

Kahane reproduces the full article in pages 36 to 46 of [10]. A discussion of Dirichlet’s work, and much more, is found in the 2009 reprint of a monograph by Henri Lebesgue [16]. It makes for an instructive reading, since “[the] book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.”

Here is Dirichlet’s result (for the proof see, for instance, [15], Theorem 16.4, p. 61):

Theorem 7. (Dirichlet) *Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic function that is continuous and has a bounded continuous derivative, except, possibly, at a finite number of points in each interval of length 2π . Then, the equality (11) holds at every $x \in \mathbb{R}$ where f is continuous.*

That is to say, under these assumptions, the Fourier series of f is summable to f in the sense of pointwise convergence, what we called before, Cauchy’s method. This result and its ramifications, were discussed at length in [1], so we proceed now to the core of our work.

5 Fejér and Abel meet Fourier

For quite sometime after Dirichlet proved his convergence result, there was hope that the hypotheses could be weakened to the extent of proving the convergence of the Fourier series at any point of continuity.

However, these hopes were dashed in 1873, when Paul du Bois-Reymond constructed a 2π -periodic and continuous function whose Fourier series does not converge at zero (for the details see, for instance, [15], Chapter 18). Consequently, a new question was posed: If a function is 2π -periodic and continuous, is there a way of recovering the function from the coefficients a_n and b_n given by (12), (13) and (14)?

At the tender age of nineteen, Leopold Fejér showed, in a note published in 1900 in the *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, that the answer is yes. The full article appeared in *Mathematische Annalen* in 1904.

Theorem 8. (Fejér) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic function that is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Then,

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x) \quad (C, 1),$$

at every $x \in \mathbb{R}$ where f is continuous.

If f is continuous on $\mathbb{R}$, the convergence of the Cesàro means $\{C_k(x)\}_{k \geq 0}$ to $f(x)$ is uniform on $x \in \mathbb{R}$. That is,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |C_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Theorem 6 gives us immediately the following result:

Theorem 9. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic function that is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Then,

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x) \quad (A),$$

at every $x \in \mathbb{R}$ where f is continuous.

As in the case of Dirichlet's convergence result, the proof of Theorem 8 rests upon the possibility of having a convenient representation for the Cesàro means, as an integral operator of the form

$$f \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt. \quad (15)$$

Likewise, a direct proof of Theorem 9 depends on having a similar representation for the Abel means.

Remark 1. The function $\mathcal{K}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called the kernel of the operator (15). Later on, we will be able to work under the assumption that, for each $n = 0, 1, 2, \dots$, the kernel $\mathcal{K}_n$ is 2π -periodic, and, at least, continuous. So, from now on, we will make such assumption. In doing so, we follow Yitzhak Katznelson (see [12], p. 9, Definition 2.2).

We state now a lemma concerning the formula appearing in (15).

Lemma 1. The following statements hold:

1. Let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic. Then, for each $k \in \mathbb{Z}$ different from zero, $2k\pi$ is also a period.
2. Let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic, and Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. If $x \in \mathbb{R}$ is fixed, the function $y \rightarrow F(x-y)$ is 2π -periodic, and Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.
3. Let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic. Then, F takes the same values on any interval of length 2π .

4. Let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic, and Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Then,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} F(x - y) dy$$

for every $x \in \mathbb{R}$ fixed.

5. Let $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic functions that are Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Then, for each $x \in \mathbb{R}$ fixed, the functions $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ and $y \rightarrow f(y)g(x - y)$ are Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$ and

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy.$$

The statements made in Lemma 1 about Riemann integrability, can be found in many textbooks (for instance, see [7], Chapter 5, and [18], Appendix, pp. 280-288). As for the other statements, we sketch the proof next.

Proof. By the 2π -periodicity of F , if $y \in \mathbb{R}$,

$$F(y) = F(y - 2\pi + 2\pi) = F(y - 2\pi),$$

$$F(y + 2k\pi) = F(y + 2(k - 1)\pi + 2\pi) = F(y + 2(k - 1)\pi)$$

for $k = 2, 3, \dots$, and

$$F(y + 2k\pi) = F(y + 2(k + 1)\pi - 2\pi) = F(y + 2(k + 1)\pi)$$

for $k = -2, -3, \dots$

Therefore, 1) follows by induction. As for 2), if $x \in \mathbb{R}$ is fixed,

$$F(x - (y + 2\pi)) = F(x - y - 2\pi) = F(x - y).$$

So, we have 2).

For 3), we fix an arbitrary interval $[-\pi + a, \pi + a]$ for $a \in \mathbb{R}$ fixed. We only need to observe that given $t \in [-\pi + a, \pi + a]$, there is $y \in [-\pi, \pi]$ so that $F(t) = F(y)$ and reciprocally.

To prove 4), we fix $x \in \mathbb{R}$. Then,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) dy &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(y) dy \stackrel{y \rightarrow s=-y}{=} - \int_{\pi-x}^{-\pi-x} F(-s) ds \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(-s) ds \stackrel{s \rightarrow y=x+s}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(x - y) dy, \end{aligned}$$

where we have used 3) in (i).

Finally, if $x \in \mathbb{R}$ is fixed, let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the function $y \rightarrow f(x - y)g(y)$. As we proved in 4),

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} F(x - y) dy,$$

or

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy$$

which is 5).

This completes the proof of the lemma. $\square$

Part 5) in Lemma 1, shows that the operation

$$(f, g) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y) dy$$

is commutative. It is called the periodic convolution of f and g . It gives a function, denoted $f * g$, which is 2π -periodic, and continuous from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ (see [18], pp. 45-48, Proposition 3.1 (v), Lemma 3.2). Under the assumptions in Remark 1, Lemma 1 applies to the formula appearing in (15).

6 The Fejér kernel and the Poisson kernel

Let us recall that the n th partial sum S_n in Cauchy's method for the series in (11) is

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx),$$

where the coefficients are given by the formulas (12), (13) and (14), with $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 2π -periodic function, Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.

For convenience, we will use complex exponentials, although “they were not used in Fourier series until well into the twentieth century” ([10], p. 2). The identities

$$\begin{aligned} \cos jx &= \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2}, \\ \sin jx &= \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i} \end{aligned}$$

give

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \left(a_j + \frac{b_j}{i} \right) e^{ijx} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \left(a_j - \frac{b_j}{i} \right) e^{-ijx},$$

where

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(a_j + \frac{b_j}{i} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} f(t) dt, \\ \frac{1}{2} \left(a_j - \frac{b_j}{i} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} f(t) dt, \end{aligned}$$

for $j \geq 1$.

Therefore,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n e^{ij(x-t)} \right] f(t) dt, \quad (16)$$

As it was proved in [1], manipulating the expression $\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n e^{ij(x-t)}$ we can write

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(x-t) f(t) dt$$

where the real function $\mathcal{D}_n(t)$, called the Dirichlet kernel, is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} & \quad \text{if } t \neq 0 \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \quad \text{if } t = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Definition 3. We state here the definition of partial sum for each of the two summation methods, Cesàro's and Abel's.

1. The n th partial sum C_n in Cesàro's method is

$$C_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(x).$$

2. Abel's method is a little different. The partial sum is defined as

$$A_r(x) = a_0 + \sum_{j \geq 1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) r^j,$$

indexed by a continuous parameter r , $0 \leq r < 1$. As we will see, this difference does not cause any trouble and actually can be avoided.

Now, we are ready to prove that each of these partial sums can be written as an integral operator of the form (15). We will assume that the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is 2π -periodic and Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.

Lemma 2. The n th partial sum C_n in Cesàro's method can be written as

$$C_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(x-t) f(t) dt,$$

where the real function $\mathcal{F}_n(t)$, called Fejér kernel, is, for $|t| \leq \pi$,

$$\mathcal{F}_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t} & \text{if } t \neq 0 \\ \frac{n+1}{2\pi} & \text{if } t = 0 \end{cases} \quad (18)$$

or, equivalently,

$$\mathcal{F}_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} & \text{if } t \neq 0 \\ \frac{n+1}{2\pi} & \text{if } t = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Proof. We have, for $0 < |t| \leq \pi$,

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \mathcal{D}_j(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{j=0}^n \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Using the identity

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

with $\alpha = \left(j + \frac{1}{2}\right)t$ and $\beta = \frac{t}{2}$, we can write

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{j=0}^n \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{j=0}^n \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)t \sin \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^n (\cos(j+1)t - \cos jt) \\ &= \frac{1}{4\pi(n+1)} \frac{1 - \cos(n+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Since

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

we have

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}.$$

Alternatively, if we write

$$\cos(n+1)t = \cos\left(\frac{n+1}{2}t + \frac{n+1}{2}t\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{n+1}{2}t,$$

we have

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

By L'Hôpital's rule, we define

$$\mathcal{F}_n(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}_n(t) = \frac{n+1}{2\pi}.$$

The proof of the lemma is complete. □

Remark 2. Extended by periodicity, the function $\mathcal{F}_n$, from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, is 2π -periodic, non-negative, even, and it is continuous with continuous derivatives of all orders.

Lemma 3. *The partial sum A_r in Abel's method can be written as*

$$A_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(x-t) f(t) dt,$$

where the real function $\mathcal{P}_r(t)$, called Poisson kernel after the mathematician Siméon Denis Poisson, is, for $|t| \leq \pi$,

$$\mathcal{P}_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}.$$

Proof. Using (16), we write, for $0 \leq r < 1$,

$$\begin{aligned} A_r(x) &= \sum_{j \geq 0} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) r^j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &+ \sum_{j \geq 1} \frac{r^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ij(x-t)} f(t) dt + \sum_{j \geq 1} \frac{r^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij(x-t)} f(t) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

The general term of each series is bounded by Br^j , uniformly on t , where

$$B = \sup_{|t| \leq \pi} |f(t)|. \quad (21)$$

Therefore, using Weierstrass's M-test (see, for instance, [7], p. 219, Theorem 7.2), we can interchange the series with the integral. Thus,

$$\begin{aligned} A_r(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j \geq 1} e^{-ij(x-t)} r^j + \sum_{j \geq 0} e^{ij(x-t)} r^j \right) f(t) dt \\ &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{re^{-i(x-t)}}{1-re^{-i(x-t)}} + \frac{1}{1-re^{i(x-t)}} \right) f(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{re^{-i(x-t)} (1-re^{i(x-t)}) + 1-re^{-i(x-t)}}{(1-re^{-i(x-t)})(1-re^{i(x-t)})} f(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-t) + r^2} f(t) dt, \end{aligned}$$

where we have used in (i) the formula for the sum of a geometric series.

This completes the proof of the lemma. □

Remark 3. *Extended by periodicity, the function $\mathcal{P}_n$, from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, is 2π -periodic, positive, even, and it is continuous with continuous derivatives of all orders.*

In the next section we introduce the notion of good kernel, discussed by Rami Shakarchi and Elias M. Stein in [18], and investigate its importance.

7 Good kernels

We begin with the following definition:

Definition 4. ([18], p. 48) *Given an integral operator of the form (15), the kernel $\mathcal{K}_n$ is called a good kernel if it satisfies the following conditions:*

1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(t) dt = 1$$

for all $n \geq 0$.

2. There is $C > 0$ so that

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_n(t)| dt \leq C$$

for all $n \geq 0$.

3. For each $0 < \delta < \pi$ fixed, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(t)| dt = 0.$$

The significance of Definition 4 is shown in the result that follows.

Theorem 10. ([18], p. 49, Theorem 4.1) *Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic function that is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Then,*

a) *if $\mathcal{K}_n$ is a good kernel, there is*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt = f(x)$$

at each $x \in \mathbb{R}$ where the function f is continuous, and

b) *the limit is uniform on $x \in \mathbb{R}$, when f is continuous everywhere.*

Proof. According to Lemma 1,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt \stackrel{t \rightarrow s=x-t}{=} - \int_{x+\pi}^{x-\pi} \mathcal{K}_n(s) f(x-s) ds \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} \mathcal{K}_n(s) f(x-s) ds, \end{aligned}$$

Also by Lemma 1, the above is equal to

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) f(x-s) ds. \quad (22)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt - f(x) \right| \stackrel{(ii)}{=} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) f(x-s) ds - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) ds \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) (f(x-s) - f(x)) ds \right|, \end{aligned}$$

where we have used 1) in Definition 4, in (ii).

If the function f is continuous at x , given $\varepsilon > 0$, there is $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, which we can choose smaller than π , so that

$$|f(x-s) - f(x)| \leq \varepsilon$$

for $|s| < \delta$.

Then, we can write

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) (f(x-s) - f(x)) ds \right| &\leq \varepsilon \int_{|s| < \delta} |\mathcal{K}_n(s)| ds \\ &\quad + 2 \sup_{|t| \leq \pi} |f(t)| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(s)| ds \\ &\stackrel{(iii)}{\leq} C\varepsilon + 2B \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(s)| ds, \end{aligned}$$

where $B = \sup_{|t| \leq \pi} |f(t)|$ and we have used 2) in Definition 4, in the first term of (iii).

Finally, 3) tells us that there is $N = N(\varepsilon) \geq 1$ so that

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(s)| ds \leq \varepsilon$$

for $n \geq N$.

This completes the proof of a).

As for b), we only need to observe that when f is continuous everywhere, it is uniformly continuous on $[-\pi, \pi]$, and also on $\mathbb{R}$ because f is periodic. Then, δ can be chosen independently of x and, therefore,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(s) (f(x-s) - f(x)) ds \right| \leq (C + 2B) \varepsilon.$$

So, we have proved b).

This completes the proof of the theorem. $\square$

Remark 4. The three conditions in Definition 4, only require that the function $\mathcal{K}_n$ is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. In fact, that is the only assumption made by Shakarchi and Stein, with no reference to periodicity. As a consequence, they are forced to define the

convolution as in (22), which is no longer a commutative operation. In our setting, under the assumptions stated in Remark 1, the expression (22) is an easy consequence of how the convolution $\mathcal{K}_n * f$ is defined.

The conditions in Definition 4, are already considered in ([12], p. 9), where kernels satisfying those conditions are called summability kernels. In ([21], pp. 85-86), the third condition in Definition 4, appears in the following form:

For each $0 < \delta < \pi$ fixed, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(t)| = 0. \quad (23)$$

Actually, in [12], 3) in Definition 4 is written in the following manner:

For each $0 < \delta < \pi$ fixed, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt = 0.$$

We claim that for each $0 < \delta < \pi$ fixed,

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(t)| dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt$$

assuming, as we have done, that $\mathcal{K}_n$ is 2π -periodic. Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(t)| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_n(t)| dt - \int_{|t| < \delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt \\ &\stackrel{(iv)}{=} \int_{-\pi+\pi-\delta}^{\pi+\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt - \int_{|t| < \delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt \\ &= \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt - \int_{-\delta}^{\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt \\ &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)| dt, \end{aligned}$$

where we have used Lemma 1 in (iv).

In view of Theorem 10, it will be of interest to test Definition 4, on each of the kernels $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_r$.

Lemma 4. *The kernel $\mathcal{F}_n$ is a good kernel.*

Proof. We start by observing that the kernel $\mathcal{D}_n$ satisfies 1) in Definition 4. Indeed, when the function f is identically equal to one,

$$S_n(t) = a_0$$

for every $n \geq 0$. Since

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1,$$

we have

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(t) dt = 1 \quad (24)$$

for every $n \geq 0$.

Hence,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \mathcal{D}_j(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_j(t) dt \stackrel{(i)}{=} 1,$$

where we have used (24), in (i). Therefore, the kernel $\mathcal{F}_n$ satisfies 1). Since $\mathcal{F}_n$ is a non-negative function, 2) follows.

As for 3), if we fix $0 < \delta < \pi$, we have $\cos t \leq \cos \delta$ for $\delta \leq |t| \leq \pi$.

Using (18),

$$0 \leq \mathcal{F}_n(t) \leq \frac{1}{2\pi(1 - \cos \delta)} \frac{1}{(n+1)} \quad (25)$$

for $\delta \leq |t| \leq \pi$. So,

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \mathcal{F}_n(t) dt \leq \frac{2}{(1 - \cos \delta)} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

and 3) holds.

This completes the proof of the lemma. □

Lemma 5. *The kernel $\mathcal{P}_r$ is a good kernel.*

Proof. Since the definition of good kernel has been formulated for kernels depending on a discrete parameter n , a clarification is in order. We can proceed in two ways:

We could make an obvious reinterpretation of Definition 4 and Theorem 10 in terms of the parameter r , for $0 \leq r < 1$. Or, we could fix an arbitrary sequence $\{r_n\}_{n \geq 1}$ with $0 \leq r_n < 1$ for all n , converging to one as $n \rightarrow \infty$, testing Definition 4 on the kernel $\mathcal{P}_{r_n}$.

We choose the first option.

According to (20), the partial sum A_r is identically one when f is identically one. So,

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x-t) + r^2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_r(t) dt.$$

Therefore, 1) is satisfied. Since $\mathcal{P}_r$ is positive, 2) is satisfied as well.

To verify 3), we begin by observing that

$$\mathcal{P}_r(t) \leq \mathcal{P}_r(\delta) \quad (26)$$

for $\delta \leq t \leq \pi$. Indeed,

$$\mathcal{P}'_r(t) = -\frac{(1-r^2)2r \sin t}{(1-2r \cos t + r^2)^2},$$

which is non-positive, for $\delta \leq t \leq \pi$.

Since $\mathcal{P}_r$ is an even function, (26) is true for $\delta \leq |t| \leq \pi$.

Furthermore, there is

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{P}_r(t) = 0, \quad (27)$$

for each $0 < |t| < \pi$.

Because (26) holds for $\delta \leq |t| \leq \pi$, the limit in (27) is uniform on $\delta \leq |t| \leq \pi$. So, we can take the limit under the integral sign, and 3) holds.

This completes the proof of the lemma. $\square$

The fact that $\mathcal{D}_n$ is not a good kernel while $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_r$ are, sets pointwise convergence apart from Cesàro summability and Abel summability.

Remark 5. If $\mathcal{K}_n$ is a good kernel, given $0 < \delta < \pi$ fixed,

$$\int_0^\delta |\mathcal{K}_n(t)| dt = \int_0^\pi |\mathcal{K}_n(t)| dt - \int_\delta^\pi |\mathcal{K}_n(t)| dt$$

can be made arbitrarily close to $\frac{C}{2}$, for n large enough, where C is the constant in 2) of Definition 4.

This observation applies, in particular, to the kernels $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_r$ but, as observed in ([1], Remark 4), it does not apply to the kernel $\mathcal{D}_n$.

Remark 6. A careful perusal of Lemma 4, specifically of estimate (25), would reveal that the kernel $\mathcal{F}_n$ satisfies (23). That is,

For each $0 < \delta < \pi$, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{F}_n(t)| = 0. \quad (28)$$

Likewise, since $\mathcal{P}_r$ is even, using (26) in Lemma 5, there is, for each $0 < \delta < \pi$,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{P}_r(t)| = 0. \quad (29)$$

It should be clear that each of (28) and (29) implies the appropriate version of 3) in Definition 4.

Lemma 4 and Lemma 5 tell us that the kernels $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_n$ satisfy the conclusion of Theorem 10, therefore proving Theorem 8 and Theorem 9.

Theorem 4 (resp. Theorem 5) provides a qualified converse for Theorem 8 (resp. Theorem 9).

Theorem 10 can be extended to certain points of discontinuity. More precisely,

Definition 5. A 2π -periodic function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is *piecewise continuous* if, on each interval of length 2π , is continuous except at a finite number of points, and at each of the points x of discontinuity, the $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ and the $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ exist, with finite values denoted $f(x^-)$ and $f(x^+)$, respectively.

It is plain that a 2π -periodic and piecewise continuous function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is bounded, and it is Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$ and, of course, on any interval of length 2π .

Here is the version of Theorem 10 that goes with Definition 5. It should be clear that it holds true for the kernels $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_r$.

Theorem 11. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic and piecewise continuous function.

A) Let $\mathcal{K}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a good kernel that is also even and non-negative.

Then, there is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad (30)$$

at each $x \in \mathbb{R}$.

b) The limit is uniform on $x \in \mathbb{R}$, when f is continuous everywhere.

Proof. It should be clear that A) implies a) in Theorem 10, at each point x where the function f is continuous. Moreover, b) has already been proved, as part of Theorem 10. So, we fix a point $x \in \mathbb{R}$ where f is discontinuous in the sense of Definition 5.

The parity of the kernel implies that

$$\int_{-\pi}^0 \mathcal{K}_n(t) dt = \int_0^{\pi} \mathcal{K}_n(t) dt = \frac{1}{2},$$

so,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t) dt - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \right| &= \left| \int_{-\pi}^0 \mathcal{K}_n(t) (f(x-t) - f(x^+)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} \mathcal{K}_n(t) (f(x-t) - f(x^-)) dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^0 \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^+)| dt \\ &\quad + \int_0^{\pi} \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^-)| dt = (i) + (ii). \end{aligned}$$

For $0 < \delta < \pi$ fixed, we write

$$(i) = \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^0 \right) \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^+)| dt,$$

where

$$\left| \int_{-\delta}^0 \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^+)| dt \right| = \int_0^\delta \mathcal{K}_n(t) |f(x+t) - f(x^+)| dt.$$

Given $\varepsilon > 0$, there is $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ so that $|f(x+t) - f(x^+)| \leq \varepsilon$ when $0 < t < \delta$. Therefore, for this value of δ , we can write

$$\int_0^\delta \mathcal{K}_n(t) |f(x+t) - f(x^+)| dt \leq \varepsilon.$$

Since f is bounded, using 3) in Definition 4,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{-\delta} \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^+)| dt \\ & \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \mathcal{K}_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Hence, there is $N = N(\varepsilon) \geq 1$ such that

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \mathcal{K}_n(t) |f(x-t) - f(x^+)| dt \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \varepsilon,$$

for $n \geq N$.

With a very similar argument,

$$(ii) \leq \left(1 + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right) \varepsilon$$

for $n \geq N$.

This completes the proof of the theorem. $\square$

Remark 7. If we assign to f the value $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ at each point x of discontinuity, we can say that the limit in (30) is $f(x)$, for every $x \in \mathbb{R}$.

8 Summability versus convergence

As we have seen, that the kernels $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{P}_n$ are good in the sense of Definition 4, implies that Theorems 8 and 9 have fairly straightforward proofs as particular cases of Theorem 10. On the other hand, it was proved in [1] that the Dirichlet kernel does not satisfy 2) nor 3) in Definition 4, therefore showing that $\mathcal{D}_n$ is definitely not a good kernel. This badness justifies the difficulty, that persisted for a very long time, of establishing pointwise convergence results for the Fourier series, under minimal conditions. The problem was settled by Lennart Carleson, in the 1960s.

Theorem 12. [4] Let $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lebesgue square integrable function on $[-\pi, \pi]$. Then, there is a set $E \subset [-\pi, \pi]$ of Lebesgue measure zero so that

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x)$$

for $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$.

In the *Mathematical Reviews*, MR 199631, Kahane refers to the results in Carleson's article as "spectacular" and catalogs the proofs as "very difficult" and "very delicate". Carleson's result was extended to p -integrable functions on $[-\pi, \pi]$, for $1 < p \leq \infty$, by Richard A. Hunt [9]. Let us observe that Hölder's inequality reduces the case $2 < p \leq \infty$ to Carleson's theorem.

As for the case $p = 1$, Andrey Kolmogorov had constructed already in [14] a function, Lebesgue integrable on $[-\pi, \pi]$, whose Fourier series diverges almost everywhere. Kolmogorov's result was improved by Yitzhak Katznelson (see [12], p. 59), who constructed a function, Lebesgue integrable on $[-\pi, \pi]$, for which the Fourier series diverges everywhere.

It is natural to wonder about the nature of the null sets where the Fourier series of 2π -periodic and continuous functions can diverge. In this respect, Katznelson [13], and Kahane and Katznelson [11], proved that given $E \subset [-\pi, \pi]$ of Lebesgue measure zero, there is a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodic and continuous, whose Fourier series diverges at every point of E .

In closing, we refer to ([21], Chapter VIII) for other results and examples on the divergence of Fourier series.

References

- [1] J. Álvarez and M. Guzmán-Partida, Properties of the Dirichlet kernel, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11 (1) (January 2023) 96-110. <https://ejmaa.journals.ekb.eg>
- [2] J. Álvarez and S. Locke, Let's sum this series (in Spanish), *Lecturas Matemáticas*, 36 (2) (2015) 181-194. scm.org.co/archivos/revista/Articulos/1174.pdf
- [3] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, (translated by W. V. Egmond), Springer-Verlag 1986.
- [4] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Mathematica*, 116 (1966) 135-157. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485889479
- [5] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press 1967.
- [6] G. B. Folland, *Advanced Calculus*, Prentice Hall 2002.
- [7] E. D. Gaughan, *Introduction to Analysis, Fifth Edition*, Brooks/Cole Publishing Co. 1998.

- [8] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford 1949. Second edition by Chelsea Publishing Co. 1991. Reprinted by the American Mathematical Society in 2000 and 2013.
- [9] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series, *Proceedings of the Conference on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*, Southern Illinois University Press 1968, pp. 234-255.
- [10] J.-P. Kahane and P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publishers 1995.
- [11] J.-P. Kahane and Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, *Studia Mathematica*, 26 (3) (1965) 305-306. Open access at <https://www.impan.pl/en/publishing-house/journal-and-series>
- [12] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publications 1976. First published by John Wiley & Sons 1968. Third corrected edition, Cambridge University Press 2004.
- [13] Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, *Studia Mathematica*, 26 (3) (1965) 301-304. Open access at <https://www.impan.pl/en/publishing-house/journal-and-series>
- [14] A. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergent presque partout, *Fundamenta Mathematicae*, 4 (1923) 324-328. Open access at <https://www.impan.pl/en/publishing-house/journal-and-series>
- [15] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press 1988. First paperback edition 1989, reprinted 1990.
- [16] H. Lebesgue, *Leçons sur les Séries Trigonométriques*. This edition first published 1906. This digitally printed version, Cambridge University Press 2009.
- [17] J. J. O'Connor and E. F. Roberts, *The MacTutor History of Mathematics archive*. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
- [18] R. Shakarchi and E. M. Stein, *Princeton Lectures in Analysis I: Fourier Analysis, An Introduction*, Princeton University Press 2003.
- [19] L. L. Smail, *History and Synopsis of the Theory of Summable Infinite Processes*, University of Oregon Publications, 2 (8), February 1925.
- [20] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, reprint of the fourth and last edition, 1927. New York: The MacMillan Company, Cambridge: At the University Press, 1945. Reissued by Cambridge University Press 1996. First edition, authored by E. T. Whittaker and published in 1902, available at https://books.google.com/books?id=_hoPAAAAIAAJ

- [21] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Second Edition, Volumes I & II Combined*, Cambridge University Press 1959. First paperback edition 1988, reprinted 1990. Third edition 2003.

Recibido en mayo de 2023. Aceptado para publicación en febrero de 2024.

J. ALVAREZ
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
LAS CRUCES, USA
e-mail: jalvarez@nmsu.edu

Los dos grandes tesoros de la Geometría y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables

The two great treasures of Geometry and the discovery of incommensurability

José María Ayerbe Toledano

Universidad de Sevilla, España

RESUMEN. El teorema de Pitágoras y la división de un segmento en extrema y media razón son, según Kepler, los dos grandes tesoros de la Geometría. En este artículo se estudia cómo son tratadas ambas cuestiones en los Elementos de Euclides, se analiza la contribución de la escuela pitagórica al desarrollo de la matemática griega y se profundiza en el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, un hecho muy vinculado a los dos tesoros de la Geometría que provocó la primera gran crisis en la historia de las matemáticas.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, extrema y media razón, magnitudes inconmensurables, Teeteto, Eudoxo de Cnido, Euclides, Jámblico, Proclo.

ABSTRACT. The Pythagoras theorem and the division of a segment into extreme and mean ratio are, according to Kepler, the two great treasures of Geometry. This paper studies how both issues are treated in Euclid's Elements, analyzes the contribution of the Pythagorean school to the development of Greek mathematics and delves into the discovery of incommensurability, a fact closely linked to the two treasures of Geometry that caused the first great crisis in the history of mathematics.

Key words: Pythagoras theorem, extreme and mean ratio, incommensurability, Theaetetus, Eudoxus of Cnidus, Euclid, Iamblichus, Proclus.

2020 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 01A20.

1. Introducción

Johannes Kepler, que vivió a caballo entre los siglos XVI y XVII, legó a la posteridad la siguiente cita que podemos considerar como un tributo de admiración a la primera matemática griega [5, pág. 81]:

“La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya”.

La cita de Kepler, como vemos, se refiere al teorema de Pitágoras y a la división de un segmento en extrema y media razón como los dos grandes tesoros de la Geometría y, en efecto, son dos resultados de una enorme belleza y múltiples aplicaciones que han inspirado a muchos matemáticos a lo largo de la historia. Ambos resultados son atribuidos, de acuerdo con la tradición griega, a la escuela pitagórica que, como es sabido, consideraba que el número era el principio o la esencia de todas las cosas.

En este artículo estudiamos cómo son tratadas ambas cuestiones en los Elementos de Euclides, incidiendo en los aspectos históricos asociados al desarrollo de la matemática en los primeros siglos del periodo griego. En este sentido se analiza la contribución que Pitágoras y sus seguidores hicieron para la consolidación de la matemática como disciplina científica de carácter deductivo y racional, se profundiza en el descubrimiento de las magnitudes incommensurables, un acontecimiento muy vinculado a los dos tesoros de la Geometría que vino a tirar por tierra toda la filosofía pitagórica, y se estudia la solución que los matemáticos griegos de la Academia de Platón idearon para superar las dificultades surgidas como consecuencia de la aparición de dichas magnitudes.

Como se señala en [10, pág. 242] el descubrimiento de la incommensurabilidad es uno de los logros más asombrosos y de mayor alcance de las primeras matemáticas griegas. Es tanto más asombroso cuanto que, según la tradición antigua, el descubrimiento se produjo en una época en que la ciencia matemática griega estaba aún en pañales y aparentemente se ocupaba de los problemas más elementales, mientras que las matemáticas egipcias y babilonias, que desde un enfoque práctico habían elaborado con anterioridad métodos muy sofisticados para la resolución de cuestiones aritméticas, algebraicas y geométricas, jamás sospecharon siquiera la existencia del problema. Esto demostraría el punto de vista radicalmente distinto respecto de sus predecesores que adoptaron los griegos al encarar el estudio de la matemática y de la ciencia en general.

El descubrimiento de las magnitudes incommensurables supuso un revés importantísimo para la matemática griega ya que afectaba a los fundamentos de la misma. La creencia intuitiva de que los números naturales y, a partir de ellos, los racionales podían medirlo todo exactamente era una simple ilusión. Este hecho tuvo como consecuencia la sustitución de la concepción aritmética del mundo, propia de la escuela pitagórica original, por una concepción geométrica plasmada de manera magistral en los Elementos de Euclides. Dado que no disponían de un sistema adecuado para la representación y tratamiento de los números irracionales, los griegos renunciaron al álgebra, desarrollando en su lugar una

compleja teoría de magnitudes inconmensurables con ropaje geométrico.

Los Elementos de Euclides [8], un compendio en trece Libros escrito hacia el año 300 a. C. que recoge lo fundamental de la matemática griega de su época, será una de las referencias principales de este artículo. A lo largo del mismo citaremos algunas proposiciones de ese tratado notando primero el Libro al que pertenecen y después el número de cada proposición. Así, la proposición I.47 será la proposición 47 del Libro I de los Elementos. Se ha procurado ser fiel a las pruebas de las proposiciones recogidas en dicho texto si bien, en algunas ocasiones, se ha recurrido al álgebra actual para evitar la penosidad de las demostraciones aritméticas de Euclides. Tampoco se han eludido las referencias a longitudes y áreas cuando resulta conveniente, aunque ha de tenerse en cuenta que estas nociones son ajenas a los Elementos que únicamente hacen alusión a medidas relativas o razones entre segmentos o figuras. En todo caso se ha tratado de no desvirtuar los aspectos esenciales de las demostraciones y construcciones incluidas en la gran obra del maestro alejandrino.

2. La aportación de la escuela pitagórica al desarrollo de la matemática griega

Hacia el siglo VIII antes de Cristo los egipcios y mesopotamios, que dieron los primeros pasos en el desarrollo de una matemática todavía de carácter meramente instrumental para la resolución de problemas prácticos concretos, ceden el testigo al mundo griego que inicia un proceso de desarrollo cultural sin precedentes en la historia de la humanidad que va a conducir a la matemática, y en general a todos los ámbitos de la cultura, a su mayoría de edad. Este proceso permite a la matemática abandonar su carácter empírico para convertirse en una ciencia teórica y abstracta que, superando los casos particulares, busca verdades generales y universales.

Sobre el origen de la palabra “Matemáticas” -“Mathema” en griego-, Proclo recoge una larga explicación en [19, Comentarios 45-47] en la que señala que, en su opinión, tal designación no es accidental, como sucede con la mayoría de los nombres, sino que éste deja claro qué tipo de función realiza esta ciencia, que no es otra que desarrollar la competencia para aprender y conocer. Así afirma que la matemática “estimula nuestro innato conocimiento, despierta nuestra inteligencia, purga nuestro entendimiento, saca a la luz los conceptos que nos pertenecen esencialmente, aleja el olvido y la ignorancia que tenemos desde el nacimiento y nos libera de las ataduras de la sinrazón”.

Aun cuando la matemática alcanzó en el periodo griego un grado de desarrollo digno de admiración, el proceso no pudo ser repentino sino que se fue materializando de manera gradual. Más que del “milagro griego”, que encierra la poco afortunada idea de un surgimiento de la ciencia, del arte y de la filosofía como por ensalmo, se debe hablar de una época en la que las nuevas culturas que se van desarrollando vigorosamente en las costas del Mediterráneo beben de los pueblos orientales, en especial de Egipto y Mesopotamia, para, a partir de ese conocimiento, crear su propio saber.

La dificultad fundamental con la que se encuentra el historiador al estudiar el desarrollo de la matemática en este periodo es la escasez de documentos originales o copias fieles de las contribuciones matemáticas concretas realizadas por los personajes de la época. Este

hecho contrasta poderosamente, por ejemplo, con la abundancia de tablillas cuneiformes con contenido matemático de origen babilonio que han llegado hasta nuestros días, a pesar de ser mucho más antiguas. Aunque en menor medida, también se dispone de documentación original de la matemática egipcia que se desarrolló entre los años 2.000 y 500 a. C. Sin embargo, de las no muy numerosas producciones matemáticas griegas que han sobrevivido hasta la actualidad, solo disponemos de copias, compilaciones o comentarios tardíos, a veces posteriores en varios siglos, cuando no de meras traducciones cuyo grado de fiabilidad con el original es difícil de evaluar. Como se señala en [21, pág. 36] “esto es particularmente cierto para la matemática del periodo helénico (siglos VI al IV a. C.), ya que de los escritores anteriores a Euclides no se conoce sino el fragmento relativo a las lúnulas de Hipócrates, de la Historia de la matemática de Eudemo de Rodas [escrita hacia el año 320 a. C.] que, a su vez, se conoce mediante una reproducción no muy fiel, aparecida en un comentario aristotélico de Simplicio del s. VI, es decir, de un milenio después”.

Esta sequía documental explica que la historia de la matemática del periodo helénico sea ciertamente insegura ya que ha debido ser reconstruida a partir de fuentes escasas, dispersas y, en algunos casos, poco fiables por diferir muchos cientos de años de las contribuciones originales. De entre ellas una de las más importantes viene dada por el conjunto de referencias históricas que aparece en “Los comentarios al libro I de los Elementos de Euclides” de Proclo de Licia (410-488 d. C.) [19], texto al que nosotros nos referiremos reiteradamente en este artículo. Aunque tiene menos interés matemático, es muy útil para conocer el estilo de vida de los seguidores de Pitágoras la obra de Jámblico (aprox. 250-325 d. C.) “Vida Pitagórica” [15], si bien los datos biográficos que se recogen en la misma deben ser tomados con cautela pues las imprecisiones son muy frecuentes.

En orden cronológico, el primer matemático griego relevante del que tenemos noticia fue Thales (aprox. 624-548 a. C.), uno de los denominados “siete sabios de Grecia” y al que de hecho se le llama “el primer matemático”, pues es la primera persona a la que se le atribuyen resultados matemáticos concretos. En efecto, Proclo recoge en [19, Comentario 157] que “el famoso Thales se dice que fue el primero en demostrar que el círculo es biseccionado por su diámetro” y en [19, Comentario 251] señala que “fue el primero en observar y afirmar que en cada triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales”. Asimismo, en [19, Comentario 299] se apunta que el resultado según el cual si dos rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí, “fue primero descubierto por Thales, pero solo se consideró digno de una demostración científica con el autor de los Elementos” y en [19, Comentario 352] se afirma que “Eudemo, en su historia de la geometría, atribuye este teorema a Thales¹, señalando que el método utilizado por éste para medir la distancia de los barcos a la costa muestra que Thales debe haberlo usado”.

También Proclo [19, Comentario 65], a continuación de unas observaciones introductorias sobre el origen de la geometría en Egipto y su vinculación con la medida de las tierras, informa de que Thales “fue el primero en introducir esta ciencia en Grecia”

¹Se refiere al teorema que demuestra que son iguales dos triángulos que tienen dos ángulos iguales y también igual el lado correspondiente a dichos ángulos o el que subtiende a alguno de ellos.

y que “descubrió por sí mismo muchas proposiciones e instruyó a sus sucesores en los principios en que se basan muchas otras, siendo su método de ataque en algunos casos más general y en otros más empírico”. Así, de acuerdo con una tradición firmemente asentada, Thales sería el primero que abrió el camino que condujo a la organización deductiva de la geometría y, por ello, se considera convencionalmente que con él finaliza la etapa precientífica y comienza el periodo del saber crítico y objetivo, esto es, de la ciencia tal como la conocemos hoy.

Thales fundó la Escuela Jónica en la ciudad de Mileto, un importante núcleo comercial ubicado en las costas de Asia Menor que entonces era un lugar de encuentro de múltiples razas y culturas, lo que sin duda favoreció el intercambio de ideas y de conocimiento. En este sentido se afirma en [20, pág. 77-78] que en Mileto “los prejuicios y supersticiones primitivos estaban atenuados por el trato con muchos otros pueblos”. A la Escuela Jónica pertenecieron los filósofos Anaximandro, Anaxímenes y Anaxágoras, pero nosotros, a los efectos que interesan a este artículo, nos detendremos en Pitágoras que, quizás, también fue discípulo de dicha Escuela. En este sentido se recoge en [15, pág. 33] que “[Thales] lo acogió complacido [...] y le hizo partícipe de cuantos conocimientos pudo”.

Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático griego que habría vivido a lo largo de gran parte del siglo VI antes de Cristo y que habría recibido una sólida formación científica y religiosa en Egipto y Babilonia. En [15, pág. 36] se recoge que permaneció veintidós años en Egipto “estudiando astronomía y geometría [...] e iniciándose en todos los rituales de los dioses” y doce años en Babilonia donde “aprendió perfectamente el culto de los dioses, llegando junto a ellos a la cumbre de la aritmética, de la música y de las demás disciplinas”.

Después de estos viajes y sin perjuicio de la dudosa exactitud de las precisiones cronológicas recogidas en [15], Pitágoras regresó a Samos, “a la edad de cincuenta y seis años” según se afirma en el mencionado texto, y no fue hasta posteriormente que se trasladó al sur de Italia fundando, en la colonia griega de Crotona, su propia escuela, una asociación que era, a la vez, escuela filosófica y congregación religiosa.

El pitagorismo era ante todo una forma de vida por la que los miembros de la secta debían adaptar su proceder a las reglas establecidas por el sabio de Samos, lo que incluía la convivencia en comunidad y la donación del patrimonio propio a la orden. Además la escuela participó de forma activa en la política y el gobierno de las ciudades del sur de Italia donde se formaron comunidades, desplegando al mismo tiempo una importante actividad tanto religiosa como científica y filosófica. En [14, pág. 32] se recoge en este sentido que “el principal objeto de la doctrina pitagórica era la purificación del alma o catarsis mediante la permanente prosecución de los estudios filosóficos y matemáticos como base moral para la dirección de la vida con la finalidad de alcanzar la salvación a través de la sabiduría”. Con Pitágoras se inaugura por tanto la combinación de matemáticas y teología que, como se apunta en [20, pág. 88], caracterizó la filosofía religiosa en Grecia, en la Edad Media y en los tiempos modernos hasta Kant.

Una de las características fundamentales de la orden, en lo referente a los conocimientos, era la imposición del secreto y del silencio místicos que impedían la transmisión de las

enseñanzas a las personas no iniciadas. En relación con este aspecto se señala en [15, pág. 67] que “es ley divina confiar a la memoria los preceptos sagrados y humanos y no hacer partícipes de los beneficios de la sabiduría a los que ni siquiera en sueños tienen purificada su alma. Pues no es lícito ofrecer a los que uno se va encontrando lo que se ha conseguido con esfuerzo, a costa de grandes sacrificios, ni proporcionar los misterios de las dos diosas de Eleusis² a profanos: los que llevan a cabo estas acciones son por igual injustos e impíos”. Este secretismo ha contribuido a rodear la vida y la doctrina de Pitágoras de un halo misterioso que, unido a la mencionada falta absoluta de documentos de la época y al carácter hagiográfico de las obras griegas posteriores, aderezadas de imprecisiones cronológicas y elementos legendarios o místicos, ha dificultado históricamente la distinción entre los hechos que se produjeron realmente y la leyenda.

Refiriéndose en particular a las matemáticas, Aristóteles (384-322 a. C.) realiza una exposición general de la base científica del pitagorismo en [3, Libro I, Cap. V, pág. 30-31] y nos dice que:

“Los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las matemáticas, no solo hicieron avanzar a estas, sino que nutridos de ellas creyeron que sus principios eran los principios de todos los entes. Y puesto que los Números son, entre estos principios, los primeros por naturaleza y en ellos les parecía contemplar muchas semejanzas con lo que es y lo que deviene, más que en el Fuego y en la Tierra y en el Agua [...] y viendo, además, en los Números las afecciones y las proporciones de las armonías -puesto que, en efecto, las demás cosas parecían asemejarse a los Números en su naturaleza toda, y los Números eran los primeros de toda la Naturaleza, pensaron que los elementos de los Números eran los elementos de todos los entes, y que el cielo era armonía y número. Y todas las correspondencias que veían en los números y en las armonías con las afecciones y con las partes del cielo y con el orden universal, las reunían y reducían a sistema. Y, si en algún punto faltaba algo, se apresuraban a añadirlo, para que toda su doctrina fuese coherente”.

Se recoge en este fragmento de Aristóteles el principio esencial sobre el que reposa toda la filosofía de la escuela pitagórica, esto es, la idea de que el número es la esencia de todas las cosas, en contraposición con sus antecesores del núcleo de Mileto que atribuyeron este principio a elementos naturales como el agua o el aire. Y cuando hablamos de número estamos refiriéndonos a los números naturales, toda vez que los griegos nunca introdujeron formalmente los números racionales sino que consideraban en realidad las fracciones como una razón o relación entre dos enteros positivos.

Si nos atenemos a lo que nos dice Proclo en [19, Comentario 66] “Pitágoras, que vino después de él [de Thales] transformó esta ciencia [la matemática] en una forma de educación liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de proporciones y la construcción de las figuras cósmicas [poliedros]”.

²Ritos de purificación en honor de las diosas Deméter y su hija Perséfone que se celebraban en la ciudad de Eleusis, a pocos kilómetros de Atenas, y cuyas ceremonias tenían un carácter secreto.

La vinculación del sabio de Samos con el carácter deductivo de la matemática ha sido objeto de fuerte controversia entre los especialistas en el tema, algunos de los cuales han puesto en duda que durante la vida de Pitágoras la matemática griega diera un salto tan extraordinario en su progresión y consideran que este proceso debió ser más lento (ver por ejemplo [5, pág. 82]). Sin embargo, el propio descubrimiento de las magnitudes incommensurables prueba, como veremos en la sección 5 de este artículo, que la matemática helénica se diferenció muy pronto de la de sus predecesores y fue precisamente la adopción del método deductivo y la superación del carácter empírico lo que le permitió plantearse problemas que hasta entonces habían pasado inadvertidos. Abundando en esta idea en [23, pág. 252] se analiza someramente el nivel de la producción matemática realizada durante el siglo V a. C. por investigadores tan relevantes como Demócrito de Abdera (aprox. 460-370 a. C.) o Hipócrates de Quíos (aprox. 470-410 a. C.) y se observa un grado de madurez que difícilmente hubiera podido producirse si el método deductivo no se hubiera desarrollado con anterioridad. Todo ello sería coherente con lo recogido por la tradición antigua que atribuye a Pitágoras el protagonismo de esta evolución.

Podemos considerar, por tanto, que Pitágoras avanza de manera decisiva en el camino iniciado por Thales y marca un hito en el desarrollo de las matemáticas como ciencia, superando el carácter meramente instrumental y técnico como medio para resolver problemas prácticos de la vida cotidiana que tuvo para las civilizaciones anteriores, otorgándole el estatuto de ciencia racional y vinculándola con el puro amor por la sabiduría. Con él se realiza el tránsito de lo meramente empírico a lo teórico, apareciendo las primeras concepciones sobre definición, demostración, teorema o axioma. No es de extrañar que Bertrand Russell afirme en [20, pág. 79] que “Pitágoras es intelectualmente uno de los hombres más importantes que han existido”.

3. El teorema de Pitágoras

El primer tesoro de la geometría, que según la cita inicial de Kepler puede compararse con una medida de oro, es el teorema de Pitágoras, del que vamos a ocuparnos en esta sección. Este resultado es el más importante que se atribuye a la escuela pitagórica y, aún en la actualidad, es la proposición matemática más conocida y la que permite a Pitágoras, como se señala en [14, pág. 30], formar parte del “imaginario cultural” de todos los pueblos.

Este teorema aparece demostrado en la proposición 47 del Libro I de los Elementos de Euclides, la penúltima de dicho Libro. Aunque Proclo [19, Comentarios 82 y 432] indica sucintamente que el propósito del primer Libro es presentar los principios del estudio de las figuras rectilíneas, encontrar sus construcciones y examinar sus propiedades esenciales, merece la pena hacer notar que el teorema de Pitágoras es la culminación del Libro I de los Elementos, hasta el punto de que podría afirmarse que todo el Libro ha sido diseñado para llegar a la demostración de este resultado fundamental. De hecho, la última proposición del Libro, la 48, no es más que el recíproco del teorema de Pitágoras, es decir, el resultado que prueba que si en un triángulo los lados verifican entre ellos la relación del teorema de Pitágoras, entonces el triángulo es rectángulo.

Es difícil saber a quién debe atribuirse el teorema que hoy conocemos como de Pitágoras. Con toda probabilidad procede de los babilonios pues se han descubierto tablillas cuneiformes anteriores al año 1.500 a. C. que recogen ternas pitagóricas, esto es, tripletes de números naturales escritos en el sistema de numeración sexagesimal que, a la vez que representan los lados de triángulos rectángulos, también expresan la posibilidad de descomponer números cuadrados en la suma de dos cuadrados (ver [5, pág. 59] o [21, pág. 23]). No obstante, se ha sugerido como justificación del nombre de teorema de Pitágoras que los pitagóricos fueron los primeros que dieron una demostración. En este sentido Proclo recoge en [19, Comentario 426] lo siguiente: “Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento”. En la actualidad parece históricamente aceptado que los primeros pitagóricos efectivamente conocían alguna forma de demostración, probablemente gráfica, del teorema de Pitágoras.

Menos probable resulta la afirmación relativa al sacrificio del buey para celebrar el descubrimiento del teorema o su demostración, no sólo porque los pitagóricos de mayor rango eran vegetarianos, sino porque tenían prohibido el sacrificio de animales y los banquetes y comilonas encajan muy mal con el modo de vida de la orden. En este sentido en [15, pág. 85-86] se recoge lo siguiente: “A los filósofos más teóricos, y muy especialmente a los que estaban en la más alta cima, [Pitágoras] les impidió enteramente una alimentación excesiva e injusta, induciéndoles a que jamás comieran animal alguno, ni en absoluto bebieran vino, ni sacrificaran seres vivos a los dioses ni los maltrataran lo más mínimo, sino que con el mayor cuidado observaran la justicia con ellos.”

En [15, pág. 33] se apunta también que la moderación en el comer y el beber sería una enseñanza que Pitágoras habría recibido de Thales en su juventud y, en este sentido, se afirma: “Entre otras cosas sacó [Pitágoras] provecho de Thales por ahorrarse especialmente tiempo, al renunciar por ello a beber vino, a comer carne e incluso antes a la gula, y atenerse a la comida de cosas suaves y de fácil digestión, y consiguiendo con ello un sueño corto, vigilia, pureza de alma y una salud corporal perfecta e inquebrantable.”

Teorema 1. *Teorema de Pitágoras.*

En los triángulos rectángulos, el cuadrado del lado que está tendido bajo el ángulo recto [la hipotenusa] es igual a [la suma de] los cuadrados de los lados que contienen al ángulo recto [los catetos].

Demostración. Consideremos el triángulo rectángulo ABC de la figura 1, con ángulo recto BAC . Hemos de probar que el cuadrado construido sobre BC es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre AB y AC .

Construimos, tal como se refleja en la figura, los cuadrados $BCDE$, $ABZH$ y $ACKT$ a partir, respectivamente, de los segmentos BC , AB y AC [Proposición I.46]. Por A trazamos la recta AA' , que corta a BC en A'' y que es paralela a BE , y trazamos también las rectas ZC y AE .

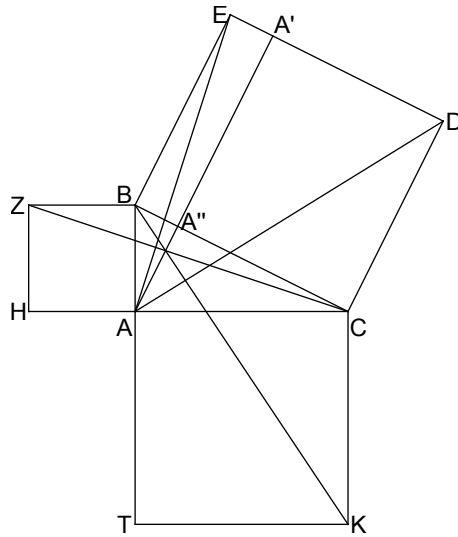


Figura 1. Teorema de Pitágoras.

Como los ángulos BAC y BAH son rectos, sigue que los segmentos CA y AH están en línea recta [Proposición I.14] y, por el mismo razonamiento, BA y AT también están alineados. Además, como los ángulos EBC y ZBA son iguales al ser rectos, obtenemos que los ángulos EBA y ZBC son también iguales, pues ambos son un recto más el ángulo ABC . Por tanto, los triángulos ABE y ZBC tienen respectivamente iguales los lados AB y ZB y BC y BE y también el ángulo determinado por los mismos, de donde sigue [Proposición I.4] que ambos triángulos son iguales y así los segmentos AE y ZC son también iguales.

Consideremos ahora el rectángulo $BEA'A''$ y el triángulo ABE . Se verifica que tienen la misma base BE y están entre las paralelas BE y AA' , de donde se deduce [Proposición I.41] que el área del rectángulo es doble de la del triángulo. Por el mismo razonamiento, si se considera el cuadrado $ABZH$ observamos que tiene la misma base ZB que el triángulo ZBC y está entre las paralelas ZB y HC , por lo que el área del cuadrado $ABZH$ es doble de la del triángulo ZBC . Así, el cuadrado $ABZH$ tiene el mismo área que el rectángulo $BEA'A''$.

Si trazamos ahora las rectas AD y BK y consideramos los triángulos ACD y BCK , el mismo razonamiento permite obtener que los triángulos son iguales y, a partir de ahí, que el cuadrado $ACKT$ es el doble que el triángulo BCK y que el rectángulo $A''A'DC$ es el doble que el triángulo ACD , de donde sigue que el cuadrado $ACKT$ es igual al rectángulo $A''A'DC$.

Concluimos así que el área del cuadrado $BCDE$, que es igual a la suma de las áreas de los rectángulos $BEA'A''$ y $A''A'DC$, coincide con la suma de las áreas de los cuadrados $ABZH$ y $ACKT$, que es el resultado buscado. $\square$

La excelente demostración que acabamos de ver no fue, obviamente, la encontrada por Pitágoras o sus primeros seguidores ya que refleja un grado de desarrollo del pensamiento matemático que no se había producido en los siglos VI o V a. C. En este sentido merece la pena traer a colación el comentario de [10, pág. 251] que señala que “no es posible averiguar exactamente cómo los primeros matemáticos griegos demostraron o intentaron demostrar el teorema en esta forma general, ya que no existe ninguna tradición al respecto”. Proclo en [19, Comentarios 426-427] atribuye esta prueba directamente a Euclides y nos dice lo siguiente: “Por mi parte, aunque me maravillo de los primeros que advirtieron la verdad de este teorema, yo admiro más al autor de los Elementos, no sólo por la muy lúcida prueba que el hizo, sino también por el teorema que incluyó en el sexto Libro que es incluso más general y que está probado con irrefutables argumentos científicos”.

En este elogio al trabajo de Euclides se refiere Proclo a la proposición VI.31 en la que se prueba que, en los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende al ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto. Los argumentos utilizados para demostrar esta generalización en el Libro VI de los Elementos están basados en los conceptos de semejanza de figuras rectilíneas y proporcionalidad, mientras que, como hemos visto, el teorema de Pitágoras se prueba en el Libro I por medio de la teoría ordinaria de paralelogramos. Esto parece indicar que Euclides tenía prisa por llegar a este importante resultado e incide en la idea de que el Libro I se concibió precisamente para poder obtenerlo como colofón del mismo.

En el marco de una crítica general a los Elementos y, específicamente en relación con la demostración del teorema de Pitágoras recogida en el Libro I, Schopenhauer, el famoso filósofo alemán, consideraba que era “tramposa”³, en el sentido de que se prueba la licitud de la afirmación mediante una cadena de razonamientos lógicos que, a partir de las premisas permiten obtener la conclusión, pero sin llevar al conocimiento interno de la verdad. Por eso Schopenhauer consideraba que toda demostración lógica debía ir acompañada de otra preliminar en la que entren solamente elementos intuitivos, idea muy a tener en cuenta por el profesorado en la práctica de la enseñanza.

Klein, en su delicioso libro [16, Vol. II, pág. 317], considera natural que Schopenhauer censure la forma rígida de la exposición euclídea y que desee que junto a la lógica se tenga más en cuenta la intuición, pero entiende que no es disculpable que para justificar sus ideas ataque precisamente a la demostración que da Euclides del teorema de Pitágoras, pues ésta se distingue precisamente, dice Klein, por ser muy intuitiva.

Y para rematar su opinión sobre la demostración del teorema de Pitágoras recogida en los Elementos Klein sentencia [16, Vol. II, pág. 319]: “En esta demostración están mezcladas de tal modo la intuición y la lógica que cada paso lógico está evidenciado intuitivamente, lo cual puede muy bien considerarse como el ideal”.

³En [16, Vol. II, pág. 317] se utiliza el término “ratonera” para traducir el vocablo alemán “mausefallen-beweiss”(trampa de ratones), si bien se considera más correcta la palabra “tramposa” para reflejar lo que Schopenhauer quería decir.

Schopenhauer, al que no le gustaba como hemos dicho esta prueba, sin embargo sí consideraba como excelente la conocida demostración gráfica del teorema de Pitágoras para el caso de que el triángulo rectángulo sea isósceles, en la que solo hace falta mirar la figura 2, tomada de [16, Vol. II, pág. 320], para convencerse de la verdad del teorema:

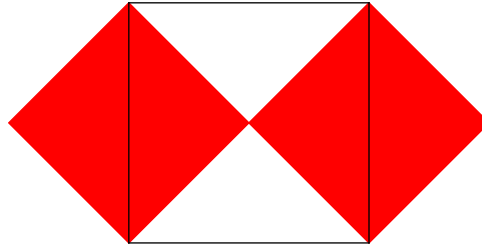


Figura 2. Demostración gráfica del Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo isósceles.

Obsérvese que los dos cuadrados coloreados que están colocados sobre uno de sus vértices son los cuadrados sobre los catetos (tienen como lado los catetos) y la suma de las áreas de ambos coincide con el área del cuadrado central, que es el cuadrado sobre la hipotenusa (tiene como lado la hipotenusa). Algunos autores consideran que esta prueba gráfica podría ser la primera demostración del teorema de Pitágoras, si bien, como se ha mencionado, no existe ninguna tradición al respecto que permita corroborar esta hipótesis. Además debe tenerse en cuenta que no es posible obtener ternas pitagóricas que representen los lados de un triángulo rectángulo isósceles, lo que podría ir en contra de esta conjetura toda vez que los griegos heredaron de la matemática oriental el interés por la relación entre los lados de un triángulo rectángulo mediante el estudio de estas ternas de números naturales.

En relación con ambas demostraciones Klein, para afirmar su punto de vista, señala [16, Vol. II, pág. 320]:

“[la segunda demostración] es clarísima y convence en el acto, solamente con mirar la figura, pero no por ello es más intuitiva que la de Euclides [para el caso general] pues en ambas están la lógica y la intuición mezcladas en el mismo grado, lo que ocurre es que el caso particular presentado por Schopenhauer permite, en virtud de su propia y especial naturaleza, evidenciar instintivamente con más facilidad el proceso lógico de la demostración”.

Veamos ahora, para finalizar esta sección, la proposición I.48 de los Elementos, esto es, el recíproco del teorema de Pitágoras.

Proposición 1. Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a [la suma de] los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

Demostración. Consideremos el triángulo ABC de la figura 3 y supongamos que el cuadrado del lado BC es igual a la suma de los cuadrados de los lados BA y AC . Tenemos

que probar que el ángulo BAC es recto.

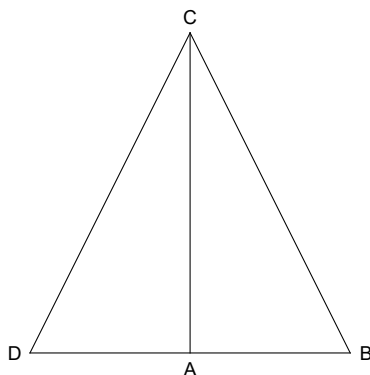


Figura 3. Recíproco del Teorema de Pitágoras.

Para ello construyo [Proposición I.11] el segmento AD que forma ángulo recto con AC , siendo $AD = AB$, y trazo el segmento DC . Puesto que $AD = AB$ se tiene que el cuadrado de lado AD es igual al cuadrado de lado AB y si se añaden a ambos cuadrados el cuadrado de lado AC se mantiene la igualdad. Pero por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ADC , se tiene que el cuadrado de lado DC es igual a la suma de los cuadrados de lados AD y AC que, a su vez, es igual a la suma de los cuadrados de lados BA y AC . Sigue que el cuadrado de lado DC es igual al cuadrado de lado BC y así $DC = BC$. En definitiva $AB = AD$, $DC = BC$ y AC es común a ambos triángulos. Sigue que [Proposición I.8] el ángulo DAC es igual al ángulo BAC y como el primero es recto por construcción, el segundo también debe serlo, que es lo que se quería probar. $\square$

4. La división de un segmento en extrema y media razón

El segundo tesoro de la geometría, que según Kepler se puede considerar como una preciosa joya, es la división de un segmento en extrema y media razón, concepto que fue exhaustivamente estudiado por los pitagóricos en relación con la estrella de cinco puntas que se forma al trazar las cinco diagonales de un pentágono regular, llamada pentágono estrellado o pentagrama místico, que era el símbolo de identificación de los miembros de la escuela.

Comencemos recordando la definición VI.3 de los Elementos, que dice lo siguiente:

Definición 1. Se dice que una recta [un segmento] es cortada en razón extrema y media cuando la entera [la longitud total del segmento] es al segmento mayor como el mayor es al menor.

O dicho de forma más breve: “Un segmento es cortado en razón extrema y media cuando el todo es a la parte [mayor] como ésta es al resto”. Al dividir un segmento en extrema y media razón resulta que el cociente entre las dos partes en que se divide el

segmento es constante e independiente de la longitud del mismo, si bien en los Elementos no se hace ninguna referencia a este hecho. A dicha constante, que viene dada por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, se la llama el número de oro, la razón áurea o la divina proporción.

Proposición 2. El cociente entre la parte mayor y la menor en que queda dividido un segmento al cortarlo en razón extrema y media es constante e igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Demostración. Dividamos un segmento de longitud l en razón extrema y media. Si llamamos x a la longitud del lado mayor, se tendrá que

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x} \iff l(l-x) = x^2 \iff x^2 + lx - l^2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene que $x = \frac{-l+\sqrt{5}l}{2}$ ó $x = \frac{-l-\sqrt{5}l}{2}$. Considerando únicamente la solución positiva sigue que $x = l \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$ y, por tanto, $l-x = l \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Así, la razón entre las dos partes en que queda dividido el segmento no depende de la longitud del mismo y será

$$\frac{x}{l-x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

como se quería probar. □

El nombre de “divina proporción” para referirse al cociente entre las partes resultantes de la división de un segmento en extrema y media razón tiene su origen en Luca Pacioli que, en 1509, dedicó todo un tratado a este tema que ha pasado a la historia más por los extraordinarios dibujos geométricos de Leonardo da Vinci incluidos en el mismo que por la originalidad de su contenido matemático. Para justificar el nombre del compendio Pacioli escribe lo siguiente combinando, como era habitual en la época, matemáticas y teología [17, Cap. V, pág. 41]:

“Paréceme [...] que el título conveniente a nuestro tratado ha de ser *La Divina Proporción*, y ello por numerosas correspondencias de semejanza que encuentro en nuestra proporción [...] que corresponden a Dios mismo. [...] Para nuestro propósito será suficiente considerar cuatro de ellas, entre otras. La primera es que ella es una sola y no más, y no es posible asignarle otras especies ni diferencias. Y dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo, según toda la escuela teológica y también filosófica. La segunda correspondencia es la de la Santa Trinidad, es decir, que así como *in divinis* hay una misma sustancia entre tres personas -Padre, Hijo y Espíritu Santo- de igual modo una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, y nunca de más o de menos como se dirá. La tercera correspondencia es que, así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna,

sino que siempre es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos. La cuarta correspondencia consiste en que, así como Dios nunca puede cambiar y está todo Él en todo y todo en todas partes, de igual modo nuestra proporción es siempre, en toda cantidad continua y discreta, grande o pequeña, la misma y siempre invariable, y de ninguna manera puede cambiar ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto”.

En la actualidad el número de oro se designa con la letra griega Φ en honor del arquitecto y escultor Fidias, constructor del Partenón, obra paradigmática de la arquitectura griega clásica que respeta de manera escrupulosa esta proporción en la relación entre las partes, el techo y las columnas, del edificio. Además, Fidias también aplicó la razón áurea en la composición de las esculturas que se ubicaron en el mismo. La notación Φ la empleó por primera vez en 1900 el matemático norteamericano Mark Barr. En la Grecia clásica la divina proporción no recibía ningún nombre especial y, de hecho, la división de un segmento en extrema y media razón les resultaba tan familiar que habitualmente era conocida simplemente como “la sección”.

La proposición VI.30 de los Elementos realiza la construcción para dividir un segmento en extrema y media razón, utilizando sólo regla y compás, como todas las construcciones de dicho texto. La prueba de Euclides se basa en un resultado anterior sobre aplicación de áreas, concretamente en la proposición VI. 29 que desvela cómo aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelogramo semejante a una dada. Los problemas de aplicación de áreas fueron muy estudiados por la escuela pitagórica y, sin duda, estarían en la génesis de las primeras demostraciones de este teorema. No obstante, para la división de un segmento en extrema y media razón no se precisa un resultado tan general como el empleado por el genio de Alejandría, sino que basta construir, a partir de un segmento, un rectángulo igual al cuadrado de lado dicho segmento y que exceda de éste precisamente en un cuadrado. En la demostración que se recoge a continuación seguiremos fielmente la prueba de Euclides, pero utilizando sólo lo que se necesita para el objetivo deseado.

Proposición 3. Dividir una recta finita [un segmento] dada en extrema y media razón.

Demostración. Hemos de dividir en extrema y media razón una recta finita AB . Para ello a partir del segmento AB construyamos un cuadrado $ABCD$ [Prop. I.46]. Vamos ahora a determinar un rectángulo $DHGF$ que sea igual al cuadrado $ABCD$ y de forma que exceda en un cuadrado. Con este objetivo dividamos el segmento AD por la mitad en el punto Z [Prop. I.10], tracemos la recta BZ y prolonguemos ZA hasta un punto H de forma que ZH sea igual a ZB [Prop. I.2]. Asimismo, con lado AH construyamos el cuadrado $AHGE$ [Prop. I.46], todo ello tal como se recoge en la figura 4.

Veamos que el rectángulo $DHGF$ es igual al cuadrado $ABCD$. En efecto, como la recta AD ha sido dividida en Z por BZ y se le ha añadido AH se tiene que el rectángulo $DHGF$, junto con el cuadrado de lado AZ , es igual al cuadrado de lado ZH ⁴ [Prop. II.6].

⁴Esta expresión es equivalente a la igualdad algebraica $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$, tomando en este caso $a = AZ$ y $b = AH$.

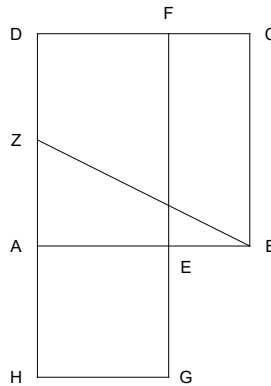


Figura 4. División de un segmento en extrema y media razón.

Pero como $ZH = BZ$ sigue que el rectángulo $DHGF$, junto con el cuadrado de lado AZ , es igual al cuadrado de lado ZB . Además, por el teorema de Pitágoras [Prop. I.47] aplicado al triángulo rectángulo ABZ , se tiene que el cuadrado de lado ZB es igual a la suma de los cuadrados de lados AB y AZ . En consecuencia el rectángulo $DHGF$ es igual al cuadrado $ABCD$ y por la construcción realizada $AHGE$ es un cuadrado.

Como $ABCD$ es igual a $DHGF$ quitemos de ambos el rectángulo $AEFD$ y se tendrá que el cuadrado $AHGE$ es igual al rectángulo $EBCF$, esto es, $AE^2 = EB \cdot AB$ o, equivalentemente [Prop. VI.17],

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$$

Y como además $AB > AE$ sigue que $AE > EB$, por lo que el punto E divide la recta AB en extrema y media razón como se deseaba, siendo AE el segmento mayor. $\square$

Como señalamos en el caso del teorema de Pitágoras, la división de un segmento en extrema y media razón o, como diría Pacioli, la división de una línea según la proporción que tiene un punto y dos extremos, es probablemente un problema de origen babilonio o, al menos, está fuertemente vinculado a algunos tópicos estudiados por esa matemática. En efecto, dado un segmento AB de longitud a , la división del mismo en extrema y media razón consiste en encontrar un punto E en el segmento AB tal que, si llamamos x a la longitud de AE , se verifique que $a(a - x) = x^2$, o dicho de otra forma, que $a^2 = x(a + x)$.

De acuerdo con la segunda ecuación se obtiene que encontrar la divina proporción consiste en, dado un segmento AB de longitud a , determinar el punto E de AB tal que, si llamamos x a la longitud AE , se verifique que el rectángulo de lados $a + x$ y x tenga la misma área que el cuadrado de lado AB . Pero este problema geométrico de aplicación de áreas, típico de la escuela pitagórica, no es más que un caso particular del problema algebraico de determinar dos números b y c conocidos su producto (en nuestro caso $bc = a^2$) y su diferencia (en nuestro caso $b - c = a$), que era un problema típico de la

matemática babilonia como se señala en [21, pág. 48]. Además, según se apunta en [5, pág. 56], los babilonios estudiaron en profundidad las ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + px = q$, que es precisamente la ecuación que resuelve el problema de la división de un segmento de longitud a en extrema y media razón con $p = a$ y $q = a^2$.

Así, el más que probable origen mesopotámico de las dos joyas de la geometría, que son quizás los dos problemas más representativos de la matemática pitagórica, muestra la fuerte relación de esta con la desarrollada por sus predecesores, hecho que se ha puesto de manifiesto a lo largo del siglo XX tras el descubrimiento y estudio de múltiples tablillas cuneiformes de origen babilonio y papiros egipcios con contenido matemático, pero que había pasado esencialmente inadvertido para los investigadores anteriores. No obstante en este tema, como en casi todo lo que se refiere a la primera matemática griega, no hay unanimidad entre los diferentes autores. Así en [23, pág. 250] se afirma que “la hipótesis de las raíces orientales de la matemática de Pitágoras está basada en la leyenda de sus viajes a Oriente, lo que no ha sido confirmado por fuentes fiables”.

Veamos ahora la relación del pentágono regular y la estrella pentagonal pitagórica con el problema de la división de una línea según la proporción que tiene un punto y dos extremos. La clave nos la da la proposición XIII.8 de los Elementos. A esta propiedad se refiere Pacioli en [17, Cap. XVIII, pág. 54] como “el más excelso de todos los efectos” de la divina proporción.

Teorema 2. *Dado un pentágono equilátero y equiángulo [regular], si dos rectas están tendidas bajo dos ángulos sucesivos [dos lados de la estrella pentagonal] se cortan entre sí en extrema y media razón, y sus segmentos mayores son iguales a los lados del pentágono.*

Demostración. Sea $ABCDE$ un pentágono regular y sean EB y AC las rectas tendidas bajo los dos ángulos sucesivos determinados por los vértices E y A . Se cortan en un punto F tal cómo indica la figura 5.

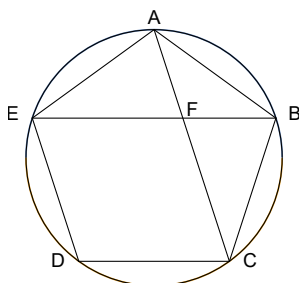


Figura 5. División de la diagonal del pentágono.

Hemos de probar que cada una de estas dos rectas queda cortada por el punto F en extrema y media razón, siendo la parte mayor igual al lado del pentágono. Vamos a verlo para el segmento EB pues el otro caso es similar.

Primero circunscribimos una circunferencia al pentágono [Proposición IV.14]. Ya que $EA = AB$, $AB = BC$ y son iguales los ángulos comprendidos por dichos segmentos, sigue [Proposición I.4] que $EB = AC$, los dos triángulos EAB y ABC son iguales y los ángulos correspondientes también, esto es, $AEB = BAC$, $EBA = ACB$ y $EAB = ABC$. Además como el triángulo EAB es isósceles, los ángulos AEB y EBA son iguales y, de esta forma, son iguales los tres ángulos $AEB = EBA = BAC$.

Consideremos ahora el ángulo AFE . Se verifica que los ángulos AFE y AFB suman dos rectos. Además [Proposición I.32] los ángulos BAF , ABF y AFB también suman dos rectos. Por tanto, $AFE = BAF + ABF = 2BAC$.

Por otra parte, el ángulo EAC determina un arco de circunferencia doble que el ángulo BAC y así [Proposición VI.33], $EAC = 2BAC = AFE$.

Sigue que el triángulo EAF es isósceles y que $EF = EA$ ya que son lados opuestos a ángulos iguales [Proposición I.6], es decir, $EF = EA = AB$.

Comparamos ahora los triángulos AFB y EAB cuyos ángulos suman dos rectos. Así se tiene que $2BAF$ y AFB suman dos rectos, lo mismo que $5AEF$. Ya que los ángulos AEF y BAF son iguales, sigue que $AFB = 3BAF$ y, por tanto, $AFB = EAB$.

Obtenemos así que los triángulos ABE y ABF tienen los tres ángulos iguales de donde sigue [Proposición VI.4] que sus lados son proporcionales, esto es, que

$$\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{FB}$$

Ya que $AB = EF$, se tiene que

$$\frac{EB}{EF} = \frac{EF}{FB}$$

Además al ser $EB > EF$ debe ser también $EF > FB$, luego EB queda cortado en razón extrema y media por F y el segmento mayor EF coincide con el lado del pentágono, como queríamos probar. $\square$

Veamos finalmente algunas consecuencias del teorema que acabamos de probar que serán utilizadas en la sección siguiente. Si en un pentágono regular $ABCDE$ se trazan todas las diagonales, tal como hacían los pitagóricos para formar el pentagrama místico, se observa que éstas delimitan un nuevo pentágono regular más pequeño $A'B'C'D'E'$ en el centro del primero, tal como se muestra en la figura 6.

Llamemos l_1 y d_1 al lado y a la diagonal, respectivamente, del pentágono mayor y l_2 y d_2 a esos mismos parámetros pero en el pentágono menor. La proposición anterior establece que $l_1 = AE = AD'$ y que $\frac{d_1}{l_1} = \frac{l_1}{d_1 - l_1}$.

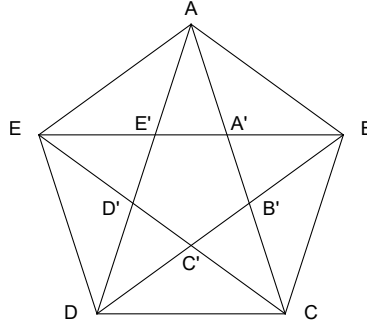


Figura 6. Pentagrama místico.

De esta segunda igualdad puede obtenerse que $d_1^2 - d_1 l_1 - l_1^2 = 0$ y resolviendo la ecuación de segundo grado y tomando la solución positiva sigue que $d_1 = l_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$.

Así

$$d_1 - l_1 = DD' = l_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \right) = l_1 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

y

$$l_2 = E'D' = d_1 - 2DD' = l_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - l_1 (\sqrt{5}-1) = l_1 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$$

Ahora, aplicando de nuevo la proposición anterior al pentágono menor sigue que

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{l_2}{d_2 - l_2}$$

y, por tanto,

$$d_2 = l_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) l_1 = l_1 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = d_1 - l_1$$

y, en consecuencia, $d_2 = A'C' = DD'$. Así $l_2 = l_1 - d_2$.

En definitiva se ha obtenido que la diferencia entre el diámetro y el lado del pentágono mayor es igual al diámetro del pentágono menor y la diferencia entre el lado del pentágono mayor y el diámetro del menor es igual al lado del menor.

Se observa también que este proceso se puede repetir indefinidamente, ya que si ahora se trazan todas las diagonales del pentágono menor, éstas determinarán de nuevo un tercer pentágono regular en el centro del segundo y así sucesivamente.

Si se llama P_n al n -ésimo pentágono obtenido de esta forma y l_n y d_n a su lado y su diámetro, respectivamente, se tendrá que

$$l_n = l_1 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \quad \text{y} \quad d_n = l_1 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Dado que $\{l_n\}$ y $\{d_n\}$ tienden a cero, se puede afirmar que los pentágonos que se van obteniendo pueden hacerse “tan pequeños como se quiera” y entre dos pentágonos sucesivos siempre se cumple que la diferencia entre el diámetro y el lado del mayor es igual al diámetro del menor y que la diferencia entre el lado del mayor y el diámetro del menor es igual al lado del menor.

Para acabar esta sección debe señalarse, como se hizo en la anterior, que la depurada demostración de la proposición XIII.8 de los Elementos que acabamos de ver no pudo ser la original elaborada por la escuela pitagórica, sino que debe atribuirse a la experta mano de Euclides. Sin embargo está plenamente aceptado que los pitagóricos conocían este resultado, con las consecuencias que acabamos de señalar para el pentagrama místico, y alguna forma de demostración más o menos arcaica del mismo. El hecho de que la prueba del teorema no estuviera en el siglo V a. C. a la altura de la concepción euclidiana de una prueba satisfactoria no quiere decir que no se dispusiera de una demostración que se considerara totalmente convincente a la luz del desarrollo que la matemática había alcanzado en esos años. En [10, pág. 258] se especula sobre cómo los miembros de la secta podían haber obtenido el resultado y se propone un posible camino para alumbrarlo a partir de dos resultados elementales, a saber, que en un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales, que como hemos visto Proclo se lo atribuye a Thales, y que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos, resultado que Eudemo asigna a los primeros pitagóricos según señala también Proclo en [19, Comentario 379] donde, además, se indica cómo era esa prueba.

5. El descubrimiento de las magnitudes incommensurables

De la cita de Aristóteles sobre la base científica del pitagorismo recogida en la sección segunda puede inferirse que los miembros de la escuela distinguían cuatro ramas en la matemática, a saber, la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. A este respecto Proclo es mucho más explícito y en [19, Comentario 36] señala lo siguiente: “Los Pitagóricos consideraban que la ciencia matemática se divide en cuatro partes: una mitad tenía que ver con la cantidad y la otra mitad con la magnitud; y cada una de estas, a su vez, se dividía en dos partes. Así una cantidad puede ser considerada en sí misma o en su relación con otras cantidades, mientras que una magnitud puede ser observada inmóvil o en movimiento. La aritmética estudia la cantidad como tal⁵, la música las relaciones entre las cantidades, la geometría las magnitudes en reposo⁶ y la astronomía las magnitudes en movimiento”.

⁵Es decir, es el estudio de los números en sí, independientemente de los detalles técnicos del cálculo que los griegos relegaron a una disciplina independiente y de menor importancia llamada logística.

⁶Desvinculada ya de su antiguo sentido etimológico de “medir la tierra”.

De todas ellas la más importante, al menos en principio, debió ser la aritmética, toda vez que el postulado fundamental del pitagorismo se condensaba en la idea de que el número es la esencia de todas las cosas. En este sentido Proclo recoge en [19, Comentario 48] la siguiente frase: “Que la geometría es una parte de la matemática general que ocupa un lugar secundario a la aritmética que la completa y la define (pues todo lo que es expresable y cognoscible en geometría está determinado por razones aritméticas) ha sido afirmado por los antiguos [en referencia, se entiende, a los pitagóricos] y no necesita una larga discusión aquí”. En la misma línea en [19, Comentarios 59-60] se señala que “la aritmética es más precisa que la geometría porque sus principios son más simples. Una unidad no tiene posición pero un punto sí; y la geometría incluye entre sus principios el punto con posición, mientras que la aritmética postula la unidad”.

Los resultados aritméticos del periodo helénico están recogidos, fundamentalmente, en los Libros VII al IX de los Elementos. El primero de ellos es precisamente una esmerada reconstrucción del antiguo legado aritmético de raíces pitagóricas, pero del total de la contribución aritmética de los Elementos resulta difícil precisar qué puede atribuirse a éstos y qué a matemáticos posteriores. Se señala en [8, Libros I-IV, Introducción, pág. 88] que “Euclides da la impresión [en algunos pasajes de estos Libros, particularmente del Libro IX] de estar reproduciendo un manual anterior, seguramente de origen pitagórico, que versaría sobre números pares, impares y sus relaciones [en [23] se atribuyen expresamente a Pitágoras numerosos resultados en este campo]. En opinión de algunos [autores] no faltan indicios de la existencia de unos Elementos de Aritmética” anteriores a Euclides que se habrían perdido y de los que, desgraciadamente, no se tiene ninguna referencia posterior más allá de la vaga afirmación de Proclo en [19, Comentario 73] relativa a la existencia de numerosas composiciones de aritmética y astronomía tituladas como “Elementos” o “tratados elementales”.

Por lo que se refiere a los resultados geométricos se atribuye a Pitágoras y los pitagóricos, como se señala en [14, pág. 34] o en [23, pág. 252-253], infinidad de teoremas geométricos sobre triángulos, polígonos, rectas paralelas, círculos, etc., resultados que pueblan los cuatro primeros Libros de los Elementos de Euclides. Además, como ya hemos mencionado, estudiaron de manera exhaustiva la división de un segmento en razón extrema y media en relación con la longitud de los lados de la estrella pentagonal. Proclo se refiere en numerosas ocasiones a las aportaciones de los pitagóricos a la geometría y a la importancia que estas tuvieron para el desarrollo posterior de la matemática y la apertura de nuevos caminos para la investigación. Así por ejemplo, en referencia a la proposición I.44 de los Elementos, que aplica a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado, recoge en [19, Comentario 420] que “Eudemo y su escuela nos cuentan que estas cosas -la aplicación de áreas por yuxtaposición, por exceso y por defecto- son antiguos descubrimientos de la Musa pitagórica. Los geómetras posteriores tomaron estas denominaciones y las aplicaron a las líneas cónicas, llamando a una de ellas parábola, a otra hipérbola y a la tercera elipse, mientras que los hombres de la antigüedad, semejantes a dioses, veían que estos términos significaban la construcción de áreas, en el plano, sobre una línea recta finita”. Y en relación con la proposición I.45, que realiza la construcción de un paralelogramo equivalente al área de una figura rectilínea dada y

establece así la posibilidad de representar cualquier área rectilínea como un rectángulo, señala en [19, Comentario 423] que “En mi opinión fue este problema el que condujo a los antiguos [en referencia de nuevo a los pitagóricos] a investigar la cuadratura del círculo”.

Sin despreciar los resultados aritméticos aportados por la escuela pitagórica no cabe duda de que, si analizamos globalmente las contribuciones matemáticas que se atribuyen a la orden, podemos observar que son mucho más abundantes y brillantes las aportaciones geométricas. Este hecho llama poderosamente la atención dado que, como hemos señalado, la aritmética debió ser el centro principal de su interés si se atiende a la base filosófica del pitagorismo. En relación con esta aparente paradoja algunos autores han señalado que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables fue el elemento determinante que paralizó el desarrollo de la aritmética en la etapa pitagórica (ver [21, pág. 45-46], [5, pág. 112] o [12, pág. 29]) y que, finalmente, favoreció la identificación de la matemática con la geometría, identificación que no fue plenamente superada hasta el siglo XVIII. Así por ejemplo, cuando el Marqués de l’Hopital menciona a Leibniz en el prólogo de su libro “Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas”, publicado por primera vez en 1696, se refiere a él como “sabio geómetra”, utilizando el vocablo “geómetra” como sinónimo de “matemático”, lo que era muy habitual en la época.

Los pitagóricos pensaban que dos magnitudes, y más concretamente, dos segmentos, tienen siempre una parte alícuota común, es decir, son conmensurables. Así, si AB y CD son dos magnitudes cualesquiera, se suponía que siempre se podían encontrar dos enteros positivos p y q y una cantidad F tales que $AB = pF$ y $CD = qF$ y, en consecuencia, $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$. En definitiva, los pitagóricos creían que la razón entre dos magnitudes o dos segmentos siempre podía expresarse exactamente como un cociente entre dos números naturales. En [9, pág. 53] se recoge que “toda la teoría de la proporción pitagórica y de figuras semejantes se basaba en esta presunta obvia asunción, de modo que una extensa parte de la geometría pitagórica quedó invalidada de repente”.

En [13, pág. 39] se especula acerca de cómo serían las pruebas de las proposiciones de los Elementos de Euclides que involucran proporciones si se realizaran teniendo en cuenta la concepción pitagórica de las mismas y, a modo de botón de muestra, se realiza la siguiente “demostración” de la importante proposición VI.I.

Proposición 4. Los paralelogramos⁷ [y los triángulos] que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Demostración. Sean los paralelogramos $ABCD$ y $AEFG$ con bases respectivas BC y EF sobre la recta MN tal como se recoge en la figura 7. Dado que BC y EF son conmensurables, tendrán alguna unidad común de medida, digamos H , contenida p veces en BC y q veces en EF , siendo p y $q \in \mathbb{N}$, de forma que $\frac{BC}{EF} = \frac{p}{q}$.

Marquemos los puntos de división de amplitud H sobre BC y EF y tracemos paralelas desde dichos puntos a los segmentos AB o AE , respectivamente, hasta que corten a AD o AG según corresponda. Así los paralelogramos $ABCD$ y $AEFG$ quedan divididos,

⁷En [13] se hace la prueba para triángulos.

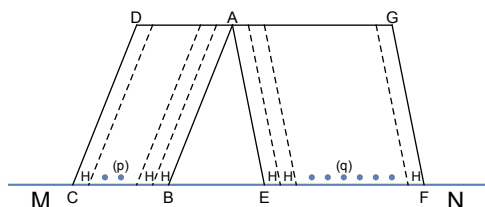


Figura 7. Proposición VI.1 de los Elementos en versión pitagórica.

respectivamente, en p y q paralelogramos más pequeños todos ellos con la misma base y altura, por lo que [Proposición I.38] tendrán el mismo área.

Así se tiene que

$$\frac{ABCD}{AEFG} = \frac{p}{q} = \frac{BC}{EF}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Como se puede comprobar, en esta “demostración” es esencial que las magnitudes BC y EF sean conmensurables lo cual, a partir del descubrimiento de los irracionales, había quedado probado que no era cierto en general. Esto condujo a la primera gran crisis de la historia de la matemática. Por las indeseadas y negativas consecuencias que parecía tener y por afectar a los fundamentos mismos de toda la teoría pitagórica, no es de extrañar que el alumbramiento de esta “patología” tratara de mantenerse en secreto.

No se sabe con certeza cuando tuvo lugar el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables que, como vamos a ver enseguida, está íntimamente ligado a las dos joyas de la Geometría. La tradición es unánime en atribuir el hallazgo a un filósofo pitagórico llamado Hipasos de Metaponto, el cual lo habría puesto de manifiesto en la primera mitad del siglo V a. C., si bien merece la pena resaltar que Proclo no menciona en ningún momento a este matemático en [19], a pesar de que el libro contiene numerosas alusiones a las magnitudes inconmensurables y, en los Comentarios 64-68, realiza un recorrido histórico del desarrollo de la geometría desde sus orígenes en Egipto hasta Euclides.

Aun cuando algunos historiadores modernos se han mostrado reacios a aceptar la antigua tradición griega y han considerado que el descubrimiento de los irracionales debió ser bastante posterior a la fecha que hemos señalado, dado el escaso desarrollo que la matemática griega presentaba en esa época, la tradición quedó muy reforzada después de la publicación de [10] y hoy su punto de vista está ampliamente aceptado.

Hipasos de Metaponto fue un notable matemático de la escuela pitagórica nacido hacia el año 500 a. C. que habría jugado algún papel relevante en los disturbios políticos acaecidos en el segundo cuarto del siglo V y que, hacia el año 445 a. C., pusieron fin a la presencia pitagórica en el sur de Italia y provocaron la desbandada de los miembros de la orden hacia otras colonias griegas. Sobre este episodio, promovido según parece por los familiares de los pitagóricos que llevaban muy a mal que éstos ofrecieran sus haciendas

a la escuela, excluyéndolos a ellos, en [15, pág. 160] se explica que Hipasos adoptó una posición favorable a los instigadores de la revuelta, enfrentándose a sus compañeros y promoviendo la derogación de la constitución heredada de sus mayores. En este sentido podría considerarse a Hipasos como un pitagórico disidente que habría traicionado en cierta medida al propio Pitágoras. Quizás esta circunstancia podría explicar porqué Proclo no lo menciona en [19].

Sobre las aportaciones matemáticas de Hipasos, aparte de la inconmensurabilidad, no se sabe mucho. En [10, pág. 245-246] se recoge que, en el campo de la teoría musical, realizó un experimento con discos de metal que le permitió demostrar que, al golpear dos de ellos, se producía la misma armonía que con dos cuerdas cuyas longitudes guardaban la misma proporción que los grosores de los discos. En esta misma área también se le atribuye una teoría de la escala musical que muestra cómo las distintas armonías musicales pueden derivarse matemáticamente unas de otras. En aritmética parece ser que trabajó en la teoría de proporciones y medias y en geometría se ocupó de dibujar o construir la esfera formada por doce pentágonos regulares. Según se recoge en [15, pág. 76] por el hecho de divulgar este último descubrimiento “desapareció en el mar por impío”, nota evidentemente legendaria pero que incide tanto en el carácter secreto que para los pitagóricos tenían los conocimientos como en el comportamiento díscolo que parece que tuvo Hipasos.

Quizás la opción más probable es que la inconmensurabilidad se descubriera por primera vez al estudiar el problema de la razón entre los lados de un triángulo rectángulo isósceles, problema que conduce a la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. En este sentido se debe mencionar que en el Diálogo Teeteto de Platón [18, pág. 140-141], escrito en el año 368/67 a. C. pero fechado ficticiamente en el año 399 a. C., se representa a Teodoro de Cirene y a Teeteto conversando con Sócrates y tratando de responder a las preguntas que este les hace acerca de la naturaleza del conocimiento. En la parte inicial del Diálogo Teeteto hace referencia a las enseñanzas de Teodoro sobre la irracionalidad de las raíces cuadradas de 3, 5, ... hasta 17, lo que permite suponer que la inconmensurabilidad de la raíz cuadrada de 2 era ya ampliamente conocida en esa época y, por eso, ni siquiera se menciona en el Diálogo. En [10] se señala que, teniendo en cuenta la lentitud con la que viajaban los conocimientos matemáticos en aquellos años, puede inferirse que ese resultado debió de obtenerse con bastante anterioridad, lo que podría encajar con la fecha (no más tarde del año 450 a. C.) en la que se produjo el descubrimiento según la antigua tradición griega.

Afortunadamente la demostración original de la inconmensurabilidad de la raíz cuadrada de dos se ha conservado en un apéndice al Libro X de los Elementos y que esta demostración es, al menos en sus aspectos generales, la original lo atestigua el propio Aristóteles que, en un comentario sobre los silogismos que llevan a conclusión por absurdo recogido en [2, Primeros Analíticos, Libro I, Cap. 22, pág. 193], señala lo siguiente: “Se prueba que el diámetro [la diagonal del cuadrado] es inconmensurable porque, si se supone conmensurable, se deduce que lo par es igual a lo impar”.

La demostración es la siguiente:

Proposición 5. La diagonal del cuadrado es inconmensurable respecto del lado.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrado y AC su diagonal. Hemos de probar que AC es incommensurable respecto del lado AB en longitud.

Para probarlo supongamos, razonando por absurdo como diría Aristóteles, que AC es conmensurable respecto de AB . Por el teorema de Pitágoras [Proposición I.47] se tiene que el cuadrado de AC es el doble del cuadrado de AB , esto es, $AC^2 = 2AB^2$.

Como AC es conmensurable con AB , se tiene que AC será a AB como un entero a otro, esto es, existirán enteros positivos DE y F tales que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{F}$$

Supondremos que DE y F son los números naturales más pequeños que están en esa proporción, por lo que serán primos entre sí [Proposición VII.22].

Obviamente DE no puede ser la unidad puesto que AC es mayor que AB y, de ser DE la unidad, se obtendría que la unidad es mayor que el entero positivo F , lo que no es posible [Definiciones VII.1 y VII.2]. Por tanto, DE es un entero mayor que la unidad. Ahora bien, como $\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{F}$ se deduce también que $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{DE^2}{F^2}$ [Proposición VIII.11]. Pero $AC^2 = 2AB^2$ y, por tanto, $DE^2 = 2F^2$ [proposición VII.19]. Sigue que DE^2 es un número par y, en consecuencia DE también debe ser un número par [Proposición IX.21]. Como DE y F son primos entre sí y DE es un número par, sigue que F debe ser impar.

Dividamos ahora el número par DE en dos números enteros iguales en el punto G [Definición VII.6]. Como $DE = 2DG$ resulta que $DE^2 = 4DG^2$. Pero $DE^2 = 2F^2$, de donde sigue que $F^2 = 2DG^2$. Así F^2 y, por tanto también F , son números pares [Proposición IX.21].

Hemos obtenido pues que el número entero F es a la vez par e impar, lo cual es imposible. De esta contradicción se deduce que AC es incommensurable respecto de AB en longitud como queríamos probar. $\square$

Como se señala en [10, pág. 255] “la prueba no presupone ningún conocimiento geométrico más allá del teorema de Pitágoras en su aplicación especial al triángulo rectángulo isósceles, que [como vimos en la sección 3] puede “demostrarse” simplemente dibujando la figura de tal manera que la verdad del teorema en ese caso particular sea inmediatamente visible. Aparte de esto la demostración permanece en el campo puramente aritmético; y puesto que los primeros pitagóricos especularon bastante sobre los números pares e impares la demostración en sí no puede haber estado fuera de su alcance”.

Se obtiene de esta forma, por una simple aplicación del teorema de Pitágoras, que el lado y la diagonal del cuadrado no son conmensurables o, dicho en términos actuales, que el número que hoy denominamos como $\sqrt{2}$ no es racional. Este hecho, como hemos señalado, venía a tirar por tierra el fundamento mismo de toda la teoría matemática de la escuela pitagórica. Y lo hacía además de la forma más cruel posible, pues el “veneno” de los incommensurables estaba inoculado en la diagonal del cuadrado, la figura más simple, considerada una de las figuras perfectas por los griegos, y el teorema de Pitágoras fue

el reactivo que lo puso de manifiesto. Sobre la consideración que el cuadrado tenía para los pitagóricos basta remitirse a las palabras de Proclo en [19, Comentario 173]: “Los Pitagóricos pensaban que el cuadrado, más que cualquier otra figura de cuatro lados, lleva la imagen de la naturaleza divina. Es su figura favorita para indicar un valor inmaculado; porque la rectitud de los ángulos imita la integridad y la igualdad de los lados el poder permanente”.

En [14, pág. 40] se recoge que “la sacudida que la aparición del nuevo ente provocó en la matemática griega puede calibrarse por el relato que aparece en un viejo escolio -atribuido a Proclo- del Libro X de los Elementos de Euclides: «Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales perecería en un naufragio y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas».”

A este respecto en [15, pág. 154] se señala que “el primero que descubrió la naturaleza de lo conmensurable y de lo inconmensurable a personas indignas de participar en tales enseñanzas se hizo tan odioso que no sólo fue excluido de la relación y régimen de vida comunitario, sino que incluso se le preparó una tumba, por entender justamente que el que había sido una vez compañero había dejado la vida entre los hombres.” En efecto, era una costumbre pitagórica erigir un monumento funerario a aquellos que, por cualquier causa, eran expulsados de la orden, así como a los que no podían superar las exigentes pruebas de ingreso y debían abandonar la casa común después de haber permanecido algún tiempo en ella. Y si alguna vez concidían con ellos en cualquier lugar después de la expulsión se comportaban como si no los conociesen y fuesen personas distintas, porque aquellos que conocieron y para los que prepararon las sepulturas entendían que estaban muertos.

Algunos historiadores (ver por ejemplo [5], [10] o [14]) señalan que el descubrimiento de los irracionales quizás pudo ocurrir también al intentar encontrar una unidad común que permitiera medir de forma exacta, simultáneamente, la diagonal y el lado del pentágono regular. Debió resultar especialmente amargo para los pitagóricos comprobar que su principal símbolo de identificación, el pentagrama místico, atentaba contra los fundamentos mismos de su teoría.

En efecto, si se toma un pentágono regular de lado l , la longitud del lado de la estrella pentagonal pitagórica construida en el mismo es precisamente $l \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ como vimos a colación del teorema 2. En definitiva, se obtiene que la longitud del lado de la estrella pentagonal pitagórica no es conmensurable respecto del lado del pentágono regular en el que está inscrita. La forma en la que este hecho pudo ponerse de manifiesto podría haber sido la siguiente:

Recordemos la construcción de pentágonos $\{P_n\}$ que realizamos al final de la sección anterior, en la que cada pentágono se obtenía del precedente trazando sus diagonales y tomando el que éstas determinan. Si llamamos l_n y d_n al lado y al diámetro, respectivamente, del pentágono P_n probamos que $d_n - l_n = d_{n+1}$ y que $l_n - d_{n+1} = l_{n+1}$.

Así, si suponemos que d_1 y l_1 son conmensurables existirán dos enteros positivos p_1 y q_1 y una cantidad fija G tal que $d_1 = p_1 G$ y $l_1 = q_1 G$. Pero entonces $d_2 = d_1 - l_1 = (p_1 - q_1)G$ y $l_2 = l_1 - d_2 = (2q_1 - p_1)G$, es decir que si G divide a la diagonal y al lado del primer pentágono, entonces hace lo propio con la diagonal y el lado del segundo. Pero como este proceso puede repetirse indefinidamente, llegaríamos a que G divide a d_n y l_n para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es manifiestamente imposible dado que la cantidad G es fija y las diagonales y los lados de los pentágonos $\{P_n\}$ pueden hacerse “tan pequeños como se quiera”.

En [10, pág. 259] se insiste en que no hay ninguna razón para no creer que Hipaso fuera capaz de demostrar la inconmensurabilidad del lado con el diámetro de un pentágono regular, toda vez que los conocimientos geométricos necesarios para probar el resultado eran conocidos en su época. Una hipótesis plausible podría ser que Hipaso hubiera llegado a la convicción de la existencia de magnitudes inconmensurables estudiando el pentágono regular, mediante un razonamiento parecido al que acabamos de hacer, pero la demostración rigurosa se habría realizado sobre la diagonal del cuadrado, en la forma que hemos visto en esta sección, obteniéndose por tanto, en primer lugar, la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos.

En definitiva se obtiene que los dos grandes tesoros de la Geometría, según Kepler, encierran entre sus muchos misterios el germen de la inconmensurabilidad, lo cual, lejos de ser un demérito, no hace sino engrandecer el valor matemático e histórico de estas dos joyas.

Para terminar esta sección no podemos dejar de referirnos a lo señalado en [16, Vol. I, pág. 50-51]: “Podemos, por consiguiente, decir que el número irracional pertenece única y exclusivamente a la Matemática de precisión [teórica]. Pues la afirmación de que la distancia entre dos puntos es un número irracional de metros carece completamente de sentido, ya que, como hemos visto, todas las cifras decimales posteriores a la sexta no tienen ya significación real alguna. En la práctica se pueden, por tanto, reemplazar, sin inconveniente alguno, los números irracionales por los racionales”. Insistiendo en esta misma idea en [13, pág. 40] se apunta: “El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la historia de la geometría [o de la matemática si se prefiere] porque trasciende lo empírico. Es absolutamente imposible constatar de forma perceptiva la inconmensurabilidad sobre una figura [concreta], es decir, la inconmensurabilidad no es comprobable experimentalmente, sino de forma teórica a través de un acto intelectual puro”.

Entendemos que es precisamente esta imposibilidad de descubrir la inconmensurabilidad de forma empírica lo que hizo que este hecho pasara inadvertido para las civilizaciones anteriores a los griegos. Sin embargo, estos fueron capaces de ponerlo de manifiesto en una etapa tan temprana del desarrollo de su matemática porque adoptaron una posición diferente al desvincular la ciencia matemática de las ataduras que provoca la realidad y la utilidad inmediata, llevándola a un plano superior. Como recoge Proclo en [19, Comentario 65] “no es sorprendente que esta [la geometría] y otras ciencias hayan tenido su origen en

la necesidad⁸, ya que todo lo que se genera en el mundo va de lo imperfecto a lo perfecto. Así se debió pasar de forma natural de la mera percepción sensorial al cálculo y de ahí a la razón [en referencia al paso de lo empírico a lo puramente intelectual].”

6. La solución griega al problema de la inconmensurabilidad

Como se ha señalado con anterioridad, el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables produjo un enorme impacto entre los matemáticos griegos, pues afectaba a los fundamentos mismos de su teoría y ponía en cuestión el principio fundamental de la matemática y la filosofía pitagórica, esto es, que el número natural es la esencia de todas las cosas y, en consecuencia, que todo puede medirse de manera exacta a partir de ellos. Al margen de leyendas y relatos terroríficos parece incuestionable que el descubrimiento trató de mantenerse en secreto dado que, años más tarde, en el Libro VII de las Leyes, Platón (427-347 a. C.) habría de quejarse amargamente de este secretismo tachando de “necedad propia de puercos de cría” la ocultación a los jóvenes griegos, como hicieron con él, de la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables.

Sin embargo, una vez superada la conmoción inicial, este tema fue objeto de un intenso estudio a lo largo de la primera mitad del siglo IV a. C., estudio estimulado vivamente por la Academia, fundada en Atenas por Platón en el año 387 a. C. Como se indica en [10, pág. 261], la forma en la que los griegos abordaron este problema y el ingenio demostrado para su tratamiento es una muestra de su tenacidad y perseverancia en la indagación científica mayor aún que el propio descubrimiento de la irracionalidad.

La influencia de Platón fue singularmente notable dado que éste consideraba la matemática como preparatoria para la formación del filósofo, de ahí la célebre frase que habría estampado en el pórtico de la Academia impidiendo su ingreso a los ignorantes en geometría. A este respecto Proclo recoge en [19, Comentarios 66-68] que “Platón hizo avanzar de forma notable las matemáticas en general y la geometría en particular debido a su celo por estos estudios” y cita concretamente a una serie de matemáticos importantes de esta época, entre los que están Teeteto y Eudoxo a los que nosotros nos vamos a referir en esta sección, señalando que “Estos hombres vivieron juntos en la Academia, poniendo sus investigaciones en común” lo que da una clara idea del ambiente favorable al desarrollo de la matemática que había en esa institución. En este sentido se recoge en [11, pág. 298] que “la principal contribución de la Academia de Platón a la ciencia, en opinión de Popper⁹, nació de su profunda comprensión del problema de los irracionales y su consiguiente sustitución de las concepciones aritméticas del mundo del pitagorismo original por una concepción geométrica”.

Aunque no se atribuyen a Platón resultados matemáticos relevantes, sus discípulos sí realizaron aportaciones capitales que permitieron superar las dificultades surgidas como

⁸En el caso de la geometría la necesidad fue provocada por el Nilo que, con sus continuas avenidas, inundaba las tierras, borraba las líneas de división entre las propiedades y obligaba a su frecuente medición para volver a delimitarlas correctamente.

⁹Karl Raimund Popper fue un filósofo, politólogo y profesor austriaco, nacionalizado británico. Se le considera uno de los filósofos de la ciencia más importantes del siglo XX.

consecuencia del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. En este esfuerzo debemos destacar en primer lugar a Teeteto, immortalizado en el diálogo que lleva su nombre incluido en los Diálogos de Platón y al que nos hemos referido en la sección anterior. En dicho pasaje Teeteto, a preguntas de Sócrates, señala que “Con relación a las potencias¹⁰, Teodoro [de Cirene], este de aquí, nos hizo un dibujo para mostrarnos que la de tres y la de cinco pies no son, atendiendo a su longitud, conmensurables con la de uno, y continuó tratándolas así, una a una, hasta la de diecisiete pies, deteniéndose aquí por alguna razón que yo no sé”. Parece indicarse de este modo en el Diálogo que, con anterioridad a Teeteto, la teoría no estaba muy desarrollada y era necesario ir analizando individualmente cada caso para luego deducir, de forma gráfica, la inconmensurabilidad de la raíz cuadrada correspondiente.

A continuación Teeteto señala que “Se nos ocurrió entonces que, pareciendo infinito el número de potencias, podríamos intentar reunir las todas bajo una misma denominación” y, alentado por Sócrates, esboza un amplio programa de trabajo que, en particular, lleva a demostrar la irracionalidad de las raíces cuadradas de todos los números naturales que no son cuadrados perfectos. Por todo ello se considera a Teeteto el autor de la mayor parte de los resultados recogidos en el Libro X de los Elementos, que está dedicado al estudio de tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a la clasificación de rectas irracionales, y que es conocido como “la cruz de los matemáticos” desde que Simon Stevin (1548-1620) lo calificara de esa forma por las dificultades que solía acarrear su lectura.

El programa de Teeteto es el siguiente: “Dividimos todos los números en dos apartados. A los que son el producto de multiplicar un número por sí mismo, los representamos en la figura de un cuadrado y los llamamos cuadrados y equiláteros. Pero a los números intermedios como el tres, el cinco y todo el que no es producto de multiplicar un número por sí mismo, sino de multiplicar uno mayor por otro menor o uno menor por otro mayor y que dan siempre lugar a una figura de lados mayores o menores, los representamos en la figura de un rectángulo y les dimos la denominación de número rectangular¹¹.”

A todas las líneas cuyo cuadrado representa en el plano un número equilátero las definimos como longitudes. Y a todas las líneas cuyo cuadrado constituye un número de factores desiguales, las definimos como potencias puesto que, no siendo conmensurables con las primeras atendiendo a la longitud, sí lo son atendiendo a las superficies que pueden formar. En cuanto a los cuerpos cúbicos hemos hecho algo parecido”.

A la vista del programa de trabajo diseñado por Teeteto, no puede sostenerse, como se hace a veces, que los griegos no estudiaron los números irracionales. Como se señala en [16, Vol. I, pág. 44], los griegos no sólo descubrieron la irracionalidad de números sencillos como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{17}$, sino que trataron otros cada vez más complicados, encontrándonos en los Elementos tipos como $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ y otros semejantes. En general se puede decir que se limitaron esencialmente a todos los irracionales que se obtienen por aplicación repetida de extracción de raíces cuadradas y que, por ello, se pueden construir con la regla y el compás.

¹⁰En todo el Diálogo el vocablo “potencia” se refiere a la raíz cuadrada.

¹¹Estos números son denominados “planos” en el Libro VII de los Elementos (Def. VII.17).

Tomando como referencia la demostración de la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos que podemos encontrar en cualquier manual al uso (ver, por ejemplo, [1, pág. 8-9]), veamos a continuación como podría ser la primitiva demostración de ese hecho, realizada de forma similar a la proposición 5 de la sección anterior y utilizando la terminología establecida en el programa de trabajo de Teeteto y en el Libro VII de los Elementos. La demostración se mantiene en su integridad en el campo puramente aritmético, utilizando resultados conocidos por los pitagóricos y recogidos en los Libros VII, VIII y IX de dicho tratado. Que Teeteto debió realizar esta prueba, u otra parecida, lo apunta como hemos visto el propio Platón en el Diálogo, al poner en boca de su discípulo el propósito de “intentar reunir todas [las potencias] bajo una misma denominación”. Este resultado debe ponerse en conexión con la proposición X.9 que, en un escolio del Libro X, es expresamente atribuida a Teeteto y a la que este se refiere implícitamente en su programa al mencionar la existencia de líneas que no son conmensurables en longitud pero sí lo son atendiendo a las superficies que pueden formar.

Proposición 6. Las potencias de los números rectangulares¹² son inconmensurables respecto de la unidad en longitud.

Demostración. Sea AB el lado de un cuadrado cuya área N es un número [natural] rectangular. Queremos probar que AB no es conmensurable con la unidad en longitud.

Supongamos en primer lugar que N no es medido por ningún número mayor que 1 que sea cuadrado y equilátero¹³. Si suponemos que AB es conmensurable con la unidad en longitud, se tiene que $\frac{AB}{1} = \frac{F}{G}$, siendo F y G números [naturales] primos entre sí [Proposición VII.22].

Sigue entonces que $\frac{N}{1} = \frac{F^2}{G^2}$ [proposición VIII.11] y, por tanto, $F^2 = N \cdot G^2$ [Proposición VII.19], es decir que F^2 es múltiplo de N . Además F^2 y G^2 son primos entre sí [Proposición VII.27]. Dado que N no es medido por ningún número mayor que 1 que sea cuadrado y equilátero se deduce que también F ha de ser múltiplo de N . Así $F = N \cdot H$, con H un número [natural].

De la igualdad $F^2 = N \cdot G^2$ sigue ahora que $N^2 \cdot H^2 = N \cdot G^2$, es decir, $H^2 \cdot N = G^2$, y por lo tanto obtenemos que G^2 es múltiplo de N (y primo con H^2). Razonando como antes sigue que también G es múltiplo de N y llegamos a contradicción puesto que al ser F y G primos entre sí no pueden tener una medida común mayor que 1 [Definición VII.13].

Supongamos ahora que N es medido por algún número cuadrado y equilátero. Entonces podremos escribir $N = M^2 \cdot K$, siendo K un número [natural] mayor que 1 que no es medido por ningún número mayor que 1 que sea cuadrado y equilátero [Definiciones VII.5 y VII.19].

Si suponemos que AB es conmensurable respecto de la unidad en longitud, se obtendría que $\frac{AB}{1} = \frac{P}{Q}$, siendo P y Q números [naturales] primos entre sí [Proposición VII.22].

¹²Es decir, las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos.

¹³Es decir, N no admite ningún divisor mayor que 1 que sea cuadrado perfecto.

Por tanto $\frac{N}{1} = \frac{P^2}{Q^2}$ [Proposición VIII.11], es decir, $\frac{M^2 \cdot K}{1} = \frac{P^2}{Q^2}$, y así $M^2 \cdot K \cdot Q^2 = P^2$ [Proposición VII.19]. Sigue que $\frac{K}{1} = \frac{P^2}{(M \cdot Q)^2}$ [Proposiciones VII.19 y IX.1], lo que no es posible pues K es un número natural que no es medido por ningún número mayor que 1 que sea cuadrado y equilátero y estaríamos en el caso anterior tomando, si es necesario, en lugar de $\frac{P}{M \cdot Q}$, los números [naturales] más pequeños que estén en esa proporción [Proposición VII.22].

En definitiva obtenemos que AB no es conmensurable con la unidad en longitud como queríamos probar. $\square$

Muchos siglos después Luca Pacioli escribiría, en referencia a este hecho, lo siguiente en [17, Cap. IX, pág. 48]:

“Así pues, existen o se originan dos clases de raíces, una llamada discreta, es decir racional, que es la que se puede designar exactamente mediante un número, como la raíz de 9 es 3, y otra llamada sorda, que es aquella que no se puede indicar con exactitud mediante un número, como se ha dicho a propósito de la raíz de 10 y de otros números. Estas últimas se conocen, por otro nombre, como irracionales, pues en el arte todas aquellas cantidades que no se pueden designar exactamente con un número se conocen como irracionales, mientras que las que sí pueden designarse se llaman racionales.”

Volviendo al programa de trabajo esbozado por Teeteto podemos inferir de sus palabras que los griegos consideraban las cantidades irracionales no como números, sino como magnitudes susceptibles de ser entendidas en cuanto tenían una interpretación geométrica como longitudes o áreas. Esta interpretación, como se ha señalado, tuvo como consecuencia importante la derivación de la matemática griega hacia la geometría, dejando el álgebra prácticamente sin cultivar o, dicho de forma más precisa, cultivando lo que muchos siglos después se dió en llamar de forma un tanto ambigua (ver [8, Libros I-IV, Introducción, pág. 66-72]) “álgebra geométrica”.

Viene a cuento aquí, y resulta muy esclarecedora, la siguiente cita de [22, pág. 125]:

“Ahora decimos que la longitud de la diagonal [del cuadrado unidad] es el número irracional $\sqrt{2}$ y nos sentimos superiores a los pobres griegos que no conocían los irracionales. Pero los griegos conocían muy bien las razones irracionales [...]. Que no considerasen $\sqrt{2}$ como un número no era resultado de su ignorancia, sino una consecuencia lógica de su definición de número. *Arithmos*¹⁴ significa cantidad, esto es, número natural. Su rigor lógico ni siquiera les permitía admitir fracciones; las sustituían por razones de naturales [...]. En el dominio de los números [naturales] la ecuación $x^2 = 2$ no puede ser resuelta ni siquiera usando razones de números. Pero es resoluble en el dominio de los segmentos pues la diagonal del cuadrado unidad nos da la solución. En consecuencia, para obtener soluciones exactas de ecuaciones cuadráticas tuvieron que pasar del dominio de los números al de las magnitudes geométricas. El álgebra geométrica es válida también para los segmentos irracionales y, a pesar de todo, es una ciencia exacta. Y, por lo tanto, fue la

¹⁴El Libro VII de los Elementos define un número como una pluralidad compuesta de unidades (Definición VII.2).

necesidad lógica y no un mero capricho lo que obligó a los pitagóricos a transmutar su álgebra a una forma geométrica”.

Insistiendo en estas mismas ideas resulta pertinente traer a colación la siguiente frase recogida en [19, Comentario 60]: “La afirmación de que cada ratio es expresable pertenece a la aritmética pero no a la geometría, ya que esta contiene ratios inexpressables”. Es decir, para los griegos no tenía sentido aritmético el número irracional $\sqrt{2}$, pero sin embargo esta magnitud tenía todo el sentido geométrico como la diagonal del cuadrado unidad.

El matemático más importante de la Academia fue sin duda Eudoxo de Cnido (aprox. 408-355 a. C.) cuya contribución al desarrollo de la matemática griega fue extraordinariamente relevante. A él se atribuye el enunciado de lo que hoy llamamos el axioma de continuidad de los números reales, que aparece recogido de forma inocente en la definición V.4 de los Elementos de la siguiente forma:

Definición 2. Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.

Arquímedes, sin embargo, lo consideró, más correctamente, un principio o postulado y lo enunció de la siguiente forma en su obra Sobre la esfera y el cilindro:

“Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, la mayor de estas figuras excede a la menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón [o sea, es capaz de exceder cualquier magnitud finita]”.

En términos más actuales se podría escribir:

“Dadas dos cantidades positivas $A > B$, siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nB > A$ ”.

O equivalentemente, “Dadas dos cantidades positivas $A > B$, siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}A < B$ ”, que es lo que hoy se llama en los cursos de cálculo infinitesimal la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, olvidándonos injustamente de Eudoxo, como tantas veces sucede con la autoría de los resultados en la matemática.

Como se señala en [13, pág. 62], la importancia del axioma de continuidad está en que permite obtener magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se quiera, desterrando la presencia de infinitésimos o infinitos actuales en sentido aristotélico, con lo que se conjura la temible presencia del infinito, incompatible con la matemática griega y que tantos quebraderos de cabeza había dado desde las aporías de Zenón de Elea.

La segunda contribución capital de Eudoxo a la matemática griega, que es la que más interesa a los efectos de este artículo, permitió resolver de forma brillante el problema generado por la aparición de las magnitudes incommensurables extendiendo a estas la teoría de la proporción. En [13, pág. 60] se recogen diferentes citas de destacados matemáticos, profesores e historiadores de la matemática contemporáneos que consideran que esta aportación de Eudoxo lo sitúa como una de las cimas del pensamiento matemático de todos los tiempos.

La definición pitagórica de proporción o igualdad de razones entre números (naturales) se recoge en los Elementos como la definición 21 del Libro VII y es la siguiente:

Definición 3. Proporcionalidad o igualdad de razones entre números (naturales).

Unos números [naturales] son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto¹⁵.

Dado que esta definición no puede aplicarse al caso de las magnitudes inconmensurables pues entre ellas no existe una razón exacta que pueda expresarse como un cociente entre dos números naturales, Eudoxo generaliza el concepto y concede carta de naturaleza a la igualdad de razones entre cantidades cualesquiera. La definición se recoge en el Libro V de los Elementos como la definición 5 en los siguientes términos:

Definición 4. Igualdad de razones entre cantidades cualesquiera.

Se dice que la primera de cuatro cantidades tiene la misma razón con la segunda que la tercera con la cuarta cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y la tercera, y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el múltiplo de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Con nuestra notación actual la definición de igualdad de razones de Eudoxo sería la siguiente:

Definición 5. Dados los números reales positivos a, b, c y d se verifica que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si para todo m y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- Si $ma < nb$, entonces $mc < nd$.
- Si $ma = nb$, entonces $mc = nd$.
- Si $ma > nb$, entonces $mc > nd$.

Obsérvese que en la definición de los Elementos no se indica nada sobre la naturaleza de las cantidades consideradas, sino que simplemente se establecen una serie de relaciones numéricas que deben cumplir los múltiplos de cada una de ellas. Aunque evidentemente la segunda definición de igualdad de razones generaliza la primera, la realidad es que Euclides no lo menciona de forma explícita en todo el tratado, si bien lo da por admitido de forma tácita cuando lo precisa. Tan paradójico le parece este hecho a Klein que atribuye el Libro V directamente a Eudoxo y señala lo siguiente en [16, Vol. II, pág. 258]:

“En esta parte [En el Libro VII], para estudiar las proporciones entre números enteros, es decir, el cálculo con números racionales, se expone una teoría completamente independiente de la que figura en el Libro V, y aunque las fracciones racionales son un simple caso particular de los números reales, para nada se relacionan las dos partes de los Elementos en que figura su estudio, lo cual hace muy difícil sostener que ambas sean del mismo autor”.

¹⁵Un número es “parte” de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor (Definición VII.3) y es “partes” cuando no lo mide (Definición VII.4).

El Libro V de los Elementos, uno de los más profundos, está dedicado en exclusiva al desarrollo de la teoría de la proporción para magnitudes cualesquiera, siendo la definición que acabamos de enunciar su piedra angular y jugando un papel fundamental el axioma de continuidad. Como hemos señalado los resultados recogidos en el Libro se atribuyen a Eudoxo, si bien se considera que a Euclides le corresponde, en contra del criterio de Klein que acabamos de mencionar, la organización del mismo, organización que puede haber incluido variantes euclídeas equivalentes pero no idénticas a los supuestos y lemas empleados por Eudoxo según se reseña en [8, Libros I-IV, Introducción, pág. 79].

Por su parte el Libro VI aplica la teoría de la proporción a la geometría plana, obteniendo diferentes resultados sobre polígonos semejantes y generalizando el procedimiento de la aplicación de áreas. Se considera que en este Libro se reconstruyen la mayor parte de las pruebas de los resultados geométricos obtenidos por la escuela pitagórica que habían quedado invalidados como consecuencia del descubrimiento de las magnitudes incommensurables. La definición de igualdad de razones de Eudoxo permite ahora extender la teoría de la proporción a dichas magnitudes y dota a la matemática griega de la herramienta adecuada para poder demostrar, de forma correcta, todos los resultados sobre proporcionalidad y semejanza de figuras geométricas que la escuela pitagórica había obtenido bajo la aparentemente obvia pero falsa asunción de que todas las magnitudes eran conmensurables. A modo de ejemplo vamos ahora a demostrar correctamente la proposición VI.1, cuya prueba incorrecta recogimos en la sección anterior en la versión en la que presumiblemente la habrían probado los pitagóricos.

Proposición 7. Los paralelogramos [y los triángulos] que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Demostración. Sean los paralelogramos $ABCD$ y $AEFG$ con bases respectivas BC y EF sobre la recta MN . Sean m y n dos números naturales cualesquiera. Sobre MN trazamos, a partir de C , $m - 1$ segmentos iguales a BC y, a partir de los puntos de división $C_2, \dots, C_{m-1}, C_m$ obtenidos, trazamos segmentos paralelos a AB hasta que corten a la prolongación de AD en los puntos $D_2, \dots, D_{m-1}, D_m$. De forma similar trazamos a partir de F $n - 1$ segmentos iguales a EF y, a partir de los puntos de división $F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$ obtenidos, trazamos segmentos paralelos a AE hasta que corten a la prolongación de AG en los puntos $G_2, \dots, G_{n-1}, G_n$, todo ello tal como se indica en la figura 8.

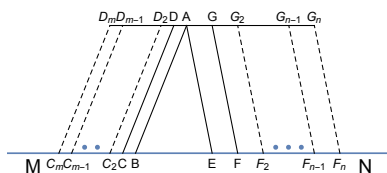


Figura 8. Proposición VI.I de los Elementos.

Se tiene que

$$BC_m = m(BC), \quad ABC_m D_m = m(ABCD), \quad EF_n = n(EF), \quad AEF_n G_n = n(AEFG)$$

y, por tanto, dado que entre los paralelogramos de igual altura tiene mayor área el que tiene mayor base [Proposición I.38], podemos concluir que

$$\begin{aligned} m(ABCD) &= ABC_m D_m (>=<) AEF_n G_n = n(AEFG) \iff \\ &\iff m(BC) = BC_m (>=<) EF_n = n(EF) \end{aligned}$$

lo que, de acuerdo con la definición de Eudoxo de proporción, nos dice que

$$\frac{ABCD}{AEFG} = \frac{BC}{EF}$$

que es el resultado que queríamos probar. $\square$

Un problema interesante del que nada nos dice Euclides es el de la génesis de la noción de igualdad de razones. Indudablemente llama la atención la analogía entre este concepto y el concepto de cortadura utilizado por Dedekind para introducir los números reales de forma rigurosa a finales del siglo XIX. Dedekind definió un número real como una cortadura de números racionales, esto es, un par de conjuntos (A_1, A_2) de números racionales verificando que tanto A_1 como A_2 son no vacíos, disjuntos, $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ y cualquier elemento de A_1 es menor que cualquiera de A_2 . Intuitivamente, el número real definido por (A_1, A_2) es el que está en medio de los dos conjuntos A_1 y A_2 .

En [6, pág. 11-12] se trata de reconstruir el pensamiento investigador que condujo a Eudoxo a la definición del concepto de igualdad de razones y se señala que pudo acontecer de la siguiente forma:

“Para dar sentido a la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ de dos segmentos rectilíneos inconmensurables entre sí, vamos a considerar, en la clase de los segmentos rectilíneos conmensurables con el β , dos subclases: una formada por los menores que el α y otra formada por los mayores que el α . Si designamos con a y A los segmentos genéricos respectivos, se tendría, en consecuencia, $a < \alpha < A$. Plausiblemente se escribiría, por tanto, $\frac{a}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{A}{\beta}$. Para los extremos de esta doble desigualdad se tendría que $\frac{a}{\beta} = \frac{m_1}{n}$, $\frac{A}{\beta} = \frac{m_2}{n}$. Se inferiría, por tanto, $\frac{m_1}{n} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m_2}{n}$, donde los extremos $\frac{m_1}{n}$ y $\frac{m_2}{n}$ son números fraccionarios. Y de esa manera Eudoxo y Euclides, muchos siglos antes que Dedekind (1831-1916), se encontraban ante la bipartición ordenada de los números fraccionarios, o de los racionales, si sólo se tomaban las fracciones irreducibles. A esta bipartición ordenada es a la que Dedekind llamó “cortadura”.

Según eso, para Eudoxo y Euclides [...] se escribiría la igualdad $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ cuando fueran los mismos los números fraccionarios que aproximen, por defecto y por exceso, a esas dos razones.

Y como $\frac{m_1}{n} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m_2}{n}$ implica $m_1\beta < n\alpha < m_2\beta$, y esta implica aquella, conglobando el caso conmensurable y el inconmensurable, para los segmentos rectilíneos α y β , tendríamos la definición 5 del Libro V mediante los equimúltiplos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ precisamente si } m\beta (>=<) n\alpha \text{ implica, respectivamente, } m\beta' (>=<) n\alpha'."$$

Insistiendo en la relación entre la igualdad de razones de Eudoxo y las cortaduras de Dedekind, en [7, pág. 73-74] se observa que, si en la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ consideramos los denominadores b y d iguales a la unidad, tendremos que $a = c$ si y sólo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n , siempre que ma sea menor, igual o mayor que n se tendrá que mc es también, respectivamente, menor, igual o mayor que n . Pero entonces, si vamos colocando en dos conjuntos A_1 y B_1 los cocientes $\frac{m}{n}$ según que sea $ma < n$ o $mc < n$, respectivamente, y en otros dos conjuntos A_2 y B_2 los cocientes $\frac{m}{n}$ cuando $ma \geq n$ o $mc \geq n$, respectivamente, observaremos que las parejas (A_1, A_2) y (B_1, B_2) forman dos cortaduras de números racionales como las definidas por Dedekind que determinan, respectivamente, los números reales a y c y que $A_1 = B_1$ y $A_2 = B_2$.

Podemos por tanto afirmar que Eudoxo estuvo muy cerca de la definición de número real tal como la conocemos hoy. De hecho en [16, Vol. II, pág. 273-274] se afirma que “Euclides (o más bien Eudoxo) procede -y esto es lo más admirable- del mismo modo que se ha procedido en las investigaciones modernas sobre la noción de número y utiliza exactamente los mismos medios auxiliares [en referencia al axioma de continuidad]”. Sin embargo, la realidad es que Eudoxo nunca diseñó un procedimiento que le permitiera obtener los números irracionales partiendo de los racionales de acuerdo con la metodología actual y, por este motivo, algunos autores han apuntado que la definición de Eudoxo de igualdad de razones supuso una solución provisional al problema de la inconmensurabilidad y que la solución definitiva no llegó hasta finales del siglo XIX con la fundamentación rigurosa de los números reales. En ese caso habrá de añadirse que esa solución provisional tuvo la virtualidad de mantener su carácter durante más de dos mil años, constituyendo probablemente una marca no batida en lo que se refiere a vigencia de una solución temporal.

El hecho de no introducir los números reales, para los que no poseían un sistema de numeración adecuado, determinó que los griegos no pudieran asignar en general a las figuras geométricas números que midieran sus áreas o volúmenes, por lo que para calcular sus cuadraturas o cubaturas debían encontrar su razón con otra figura previamente conocida. Pero esto no quiere decir que no pudieran conocer las fórmulas de las áreas o volúmenes de los polígonos o poliedros regulares que se utilizan en la geometría elemental sino simplemente que, al no poder asignar a cada área un número, no les interesaba la fórmula. Por ejemplo, la mencionada proposición VI.1 de los Elementos nos dice que los triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases, es decir, que los triángulos con la misma base y altura tienen el mismo área. Esto no es todavía la fórmula del área de un triángulo como base por altura partido por dos pero, fijado cualquier triángulo, los griegos sabían construir otro con la misma base y altura que fuera rectángulo. Para ello sólo tenían que construir un rectángulo de lado la altura sobre la base del triángulo dado y tomar el triángulo rectángulo determinado por la diagonal. El área de este triángulo es la mitad de la del rectángulo que lo contiene, esto es, la fórmula buscada.

Finalmente se atribuye también a Eudoxo el resultado que hoy se conoce como el principio de exhaución (o de Eudoxo) y que no es otro que la proposición X.1 de los Elementos. Dice lo siguiente:

Proposición 8. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de la que queda una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Demostración. Sean R y ε dos magnitudes tales que $R > \varepsilon > 0$. Por el axioma de continuidad existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0\varepsilon > R$. Así, si llamamos $R_1, R_2, \dots, R_n$ a las partes de R que van resultando al quitar en cada paso una magnitud mayor que la mitad de lo que va quedando, se tiene que:

$$R_1 < \frac{1}{2}R < \frac{n_0}{2}\varepsilon, \quad R_2 < \frac{1}{2}R_1 < \frac{n_0}{2^2}\varepsilon, \quad \dots, \quad R_{n_0} < \frac{1}{2}R_{n_0-1} < \frac{n_0}{2^{n_0}}\varepsilon < \varepsilon$$

con lo que obtenemos el resultado buscado. $\square$

Una vez finalizada la prueba se apostilla [8, Libros X-XIII, pág. 13]: “De manera semejante demostraríamos que esto ocurre también si se quita la mitad”, lo que demuestra el fino olfato matemático de Euclides (o de Eudoxo), toda vez que “la mitad” es precisamente lo mínimo que hay que ir trayendo en cada paso a lo que vaya quedando de la magnitud mayor para que el resultado sea cierto.

El principio de exhaustión abre las puertas al método de exhaustión con el que Euclides demuestra algunos de los teoremas más importantes recogidos en los Elementos. Entre ellos podemos destacar las proposiciones XII.7 (porisma) y XII.10 que recogen, respectivamente, que “Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura” y que “Toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura”. Estos dos resultados son atribuidos a Eudoxo por el propio Arquímedes (287-212 a. C.) en la carta a Eratóstenes que precede a su libro El Método, si bien reconoce el mérito de Demócrito que habría enunciado mucho antes los resultados, aunque sin poder probarlos rigurosamente. También en el Libro XII se prueba por el método de exhaustión, y en consecuencia se atribuye a Eudoxo, la proposición XII.2 que dispone que “Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros”, si bien el enunciado sin demostración sería muy anterior y correspondería a Hipócrates de Quíos.

El método de exhaustión consiste en una doble reducción al absurdo de manera que, para demostrar que una magnitud A es igual a otra B o que una figura A es equivalente a otra B , basta probar que A no puede ser ni mayor ni menor que B . Merece la pena destacar que el método de exhaustión, cuyo nombre fue introducido por primera vez por el matemático belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667) en su obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum con*i, es el equivalente en la matemática griega a la noción de límite del análisis infinitesimal que no apareció hasta principios del siglo XIX, de la mano de Cauchy y Bolzano, y que no tomó su forma actual hasta los trabajos de Weierstrass en el último tercio de dicho siglo.

Como se señala en [21, pág. 65-66] “el método de exhaustión no es un método de descubrimiento, pues el resultado al que debe llegarse se da por admitido; tampoco es un método constructivo, en el que partiendo de propiedades conocidas se llega por vía

deductiva a nuevos resultados. El método de exhaución es puramente un método de demostración que no pretende descubrir una nueva verdad, sino demostrarla”. En [12, pág. 28] se insiste en estas ideas apuntándose que, aún cuando el método de exhaución confiere al argumento matemático un rigor lógico impecable, tiene algunas serias servidumbres. En primer lugar, suele resultar muy engorroso el establecimiento de la desigualdad básica que se necesita para iniciar la doble reducción al absurdo, lo que hace bastante trabajoso el seguimiento de una demostración realizada por exhaución. En segundo lugar no da ninguna pista que ilumine el camino que ha seguido el investigador para llegar hasta el resultado que luego se ha probado.

En definitiva, después de los trabajos de Teeteto y, sobre todo, de Eudoxo, el problema de las magnitudes inconmensurables quedó conjurado para la matemática griega, con la consecuencia mencionada de la derivación del álgebra hacia una forma geométrica. Este hecho, junto con el rigor lógico impuesto por la escuela platónica para solventar las dudas y paradojas provocadas por la temible presencia del infinito y la aplicación del método de exhaución para las demostraciones, con la consiguiente ocultación de los métodos de descubrimiento tan necesarios para el científico, confieren al edificio de la matemática griega de un aspecto imponente e impenetrable, tan imponente e impenetrable que para apreciar avances significativos en la matemática posteriores a los realizados por los últimos grandes matemáticos griegos, Diofanto (hacia el 250 d. C.) y Papo (aprox. 290-350 d. C.), será necesario esperar más de doce siglos y adoptar, como en su día hicieron los helenos, un punto de vista diferente (ver, por ejemplo, [4, pág. 97]). Pero esa es otra historia que no tiene cabida en este artículo.

Referencias

- [1] Apostol, T. M. *Análisis Matemático*, Reverté, 1976.
- [2] Aristóteles, *Lógica, Primeros Analíticos*, Traducción de Francisco Gallach Palés, Nueva Biblioteca Filosófica XLV, 1931.
- [3] Aristóteles, *Metafísica*, Editor Valentín García Yebra, Gredos 1998.
- [4] J. M. Ayerbe Toledano, *El nacimiento de la geometría analítica*, Lecturas matemáticas, 38(2) (2017), 93-124.
- [5] Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, 2007.
- [6] Norberto Cuesta Dutari, *Historia de la invención del cálculo infinitesimal y de su introducción en España*, Ediciones Universidad de Salamanca, 1985.
- [7] Antonio J. Durán Guardado, *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, 1996.
- [8] Euclides, *Elementos*, Introducción de Luis Vega, Traducción de María Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991.
- [9] H. Eves, *Great Moments in Mathematics, Vol. I*, The Mathematical Association of America, 1977.
- [10] K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics, 46, No. 2 (1945), 242-264.

- [11] W. Guthrie, *Historia de la filosofía griega. Platón y la Academia de Atenas*, Vol. 5, Gredos, 1990, RBA, 2006.
- [12] Pedro M. González Urbaneja, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, 1992.
- [13] Pedro M. González Urbaneja, *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*, Nivola, 2008.
- [14] Pedro M. González Urbaneja, *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego, Cap. I de El Legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros*, Editan: Consejería de Cultura (Junta de Andalucía), Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, SAEM Thales, 2000, Coord. Antonio J. Durán Guardado.
- [15] Jámblico, *Vida pitagórica y Protréptico, Introducciones, traducción y notas de Miguel Periago Lorente*, Gredos, 2008.
- [16] Félix Klein, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Biblioteca Matemática, Dtor. J. Rey Pastor, 1931.
- [17] Luca Pacioli, *La Divina Proporción, Introducción de Antonio M. González, Traducción de Juan Calatrava*, Akal, 1991.
- [18] Platón, *Teeteto, Traducción de Serafín Vegas González*, Digitalia, Inc., Biblioteca Nueva, 2013.
- [19] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow*, Princeton University Press, 1970.
- [20] B. Russell, *Historia de la filosofía occidental, Tomo I*, Austral, 2013.
- [21] J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la Matemática, Vol. 1*, Gedisa, 1984.
- [22] B.L. van der Waerden, *Scienceawakening, Vol. I*, Groningen: Noordhoff International, 1975.
- [23] L. Zhmud, *Pythagoras as a Mathematician*, Historia Mathematica, 16 (1989), 249-268.

Recibido en mayo de 2023. Aceptado para publicación en abril de 2024

JOSÉ M. AYERBE TOLEDANO
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SEVILLA, ESPAÑA
e-mail: jayerbe@us.es

A note on “A counterexample to a proposition of R. Mathews”

Una nota acerca de “A counterexample to a proposition of R. Mathews”

Zhiguo Ding and Michael E. Zieve

University of Michigan, U.S.A.

ABSTRACT. We show that some published “counterexamples” to a theorem of R. Mathews are in fact not counterexamples, and the relevant theorem is true. We also provide a survey of known results and examples that are related to Mathews’ result.

Key words: Dickson polynomials, finite fields, permutation polynomials.

RESUMEN. Mostramos que algunos “contraejemplos” a un teorema de R. Mathews que han sido publicados en realidad no son contraejemplos, y que el teorema relevante es válido. También incluimos un resumen de resultados y ejemplos conocidos relacionados con el resultado de Mathews.

Palabras clave: Polinomios de Dickson, campos finitos, polinomios de permutación.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 11T06.

For any positive integer n , write

$$E_n(X) := \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} (-1)^i X^{n-2i}.$$

This polynomial $E_n(X)$ is called the Dickson polynomial of the second kind, and is closely related to the classical Chebyshev polynomial of the second kind [15]. Crucially, $E_n(X)$ has integer coefficients, so for any prime power q the function $c \mapsto E_n(c)$ maps $\mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$. Several authors have studied when this function is bijective. The first result on this topic is as follows [16, Thm. 2.5].

Proposition 1. *If q is a power of an odd prime p , and n is a positive integer satisfying the three congruences*

$$\begin{aligned} n + 1 &\equiv \pm 2 \pmod{p} \\ n + 1 &\equiv \pm 2 \pmod{\frac{q-1}{2}} \\ n + 1 &\equiv \pm 2 \pmod{\frac{q+1}{2}}, \end{aligned}$$

then $E_n(X)$ permutes each set $\{a, -a\}$ with $a \in \mathbb{F}_q$, so that in addition $E_n(X)$ permutes $\mathbb{F}_q$.

The paper [1] purports to give two counterexamples to Proposition 1. In order to help future readers avoid confusion, we show here that those “counterexamples” are not actually counterexamples. In fact, Proposition 1 is true, and its proof is quite simple; this proof appears in each of [6, 9, 13, 16].

The paper [1] claims that the pairs $(q, n) = (5, 11)$ and $(q, n) = (9, 17)$ are counterexamples to Proposition 1. However, if $(q, n) = (5, 11)$ then $n + 1 \not\equiv \pm 2 \pmod{(q+1)/2}$, and if $(q, n) = (9, 17)$ then $n + 1 \not\equiv \pm 2 \pmod{p}$. Thus the pairs $(q, n) = (5, 11)$ and $(q, n) = (9, 17)$ do not satisfy the hypotheses of Proposition 1, so they are not counterexamples to Proposition 1.

The mistake in [1] appears to be that its author interpreted the hypothesis of Proposition 1 to be that at least one of the three congruences holds, rather than that all three congruences hold. However, we note that there is no ambiguity on this issue, since the requirement that all three congruences hold is stated clearly in both [16] and in many subsequent references, including [2–15, 17–19].

It has been conjectured repeatedly that, if $E_n(X)$ permutes $\mathbb{F}_q$ where $q = p^k$ for some prime $p > 5$, then the three congruences in Proposition 1 must hold [2, 11, 12, 14, 17, 18]. This conjecture was proved in [4] when $k \leq 2$ (building on and correcting [3, 5, 6]). It remains open when $k > 2$. Examples in [9] show that the condition $p > 5$ is crucial in this conjecture.

Acknowledgments

The first author was supported in part by the Natural Science Foundation of Hunan Province of China (No. 2020JJ4164).

References

- [1] P. A. Acosta Solarte, *A counterexample to a proposition of R. Mathews*, Lect. Mat., 27 (2006), 19–20.
- [2] V. Albis, *Polinomios de permutación Algunos problemas de interés*, Lect. Mat., 22 (2001), 35–58.

- [3] M. Cipu, *Dickson polynomials that are permutations*, Serdica Math. J., 30 (2004), 177-194.
- [4] M. Cipu and S. D. Cohen, *Dickson polynomial permutations*, Finite fields and applications, Amer. Math. Soc., Providence (2008), 79-90.
- [5] S. D. Cohen, *Dickson polynomials of the second kind that are permutations*, Canad. J. Math., 46 (1994), 225-238.
- [6] S. D. Cohen, *Dickson permutations*, Number-theoretic and algebraic methods in computer science (Moscow, 1993), World Sci. Publ., River Edge (1995), 29-51.
- [7] R. S. Coulter and R. W. Matthews, *On the permutation behaviour of Dickson polynomials of the second kind*, Finite Fields Appl., 8 (2002), 519-530.
- [8] M. Fried and R. Lidl, *On Dickson polynomials and Rédei functions*, Contributions to general algebra, 5 (Salzburg, 1986), Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna (1987), 139-149.
- [9] M. Henderson and R. Matthews, *Permutation properties of Chebyshev polynomials of the second kind over a finite field*, Finite Fields Appl., 1 (1995), 115-125.
- [10] M. Henderson and R. Matthews, *Dickson polynomials of the second kind which are permutation polynomials over a finite field*, New Zealand J. Math., 27 (1998), 227-244.
- [11] X.-d. Hou, *Permutation polynomials over finite fields-a survey of recent advances*, Finite Fields Appl., 32 (2015), 82-119.
- [12] N. S. James and R. Lidl, *Permutation polynomials on matrices*, Linear Algebra Appl., 96 (1987), 181-190.
- [13] R. Lidl, *On cryptosystems based on polynomials and finite fields*, Advances in cryptology (Paris, 1984), Springer, Berlin (1985), 10-15.
- [14] R. Lidl and G. L. Mullen, *When does a polynomial over a finite field permute the elements of the field?*, Amer. Math. Monthly, 95 (1988), 243-246.
- [15] R. Lidl, G. L. Mullen and G. Turnwald, *Dickson Polynomials*, Longman Sci. & Tech., 1993.
- [16] R. W. Matthews, *Permutation polynomials in one and several variables*, Ph.D. thesis, University of Tasmania, 1982. Available at https://figshare.utas.edu.au/articles/thesis/Permutation_polynomials_in_one_and_several_variables/23232068
- [17] G. L. Mullen, *Dickson polynomials over finite fields*, Algebraic structures and number theory; proceedings of the first international symposium, Hong Kong, August 8-13, 1988, World Scientific, Teaneck (1990), 190-207.
- [18] G. L. Mullen, *Dickson polynomials over finite fields*, Adv. in Math. (China), 20 (1991), 24-32.

- [19] G. L. Mullen, *Permutation polynomials: a matrix analogue of Schur's conjecture and a survey of recent results*, Finite Fields Appl., 1 (1995), 242-258.

Recibido en junio 2023. Aceptado para publicación en febrero de 2024.

ZHIGUO DING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ANN ARBOR, USA
e-mail: dingz@umich.edu

MICHAEL ZIEVE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ANN ARBOR, USA
e-mail: zieve@umich.edu

Publio Suárez Sotomonte: Premio José Celestino Mutis a la enseñanza de las Matemáticas - año 2023

Héctor Suárez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia

Nació en Tunja el 9 de diciembre de 1959, es el quinto de 9 hermanos, casado con Marisol, padre de Camila y Juan Manuel y abuelo de Zaion. Su deporte favorito es el fútbol y su pasión, las obras de arte y la música clásica.

Es Maestro Bachiller de la Escuela Normal de Varones de Tunja, Licenciado en Matemáticas y Física de la UPTC, Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional de Colombia-sede Bogotá, Magister en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional, estudios de doctorado en Informática de la Universidad Politécnica de Catalunya Barcelona. Durante su estancia en Europa fue becado por la Comisión Europea dentro del Programa Alfa Cordial II para una estancia doctoral en la Universidad de Pisa. Posteriormente hizo el doctorado en Ciencias de la Educación de la UPTC-RUDECOLOMBIA, realizando su pasantía en la Universidad de Barcelona-España.

Su tesis doctoral “Formación Inicial y Permanente de Profesores de Matemáticas con Ambientes Virtuales para la Enseñanza de las Geometrías”, aporta elementos teóricos y prácticos respecto al desarrollo de la competencia digital de docentes. Actualmente es docente de la escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC y coordinador de la Maestría en Educación Matemática.

Fue profesor de Educación Básica Primaria en la escuela rural Sote Panelas del municipio de Motavita y director de núcleo del mismo municipio, desde 1978 hasta 1991.

Ha sido profesor catedrático de la Universidad Antonio Nariño y la Universidad Santo Tomás; profesor de distintos programas de pregrado de la UPTC, asesor de práctica docente, director de la Escuela de Matemáticas y Estadística.

Ha publicado varios artículos en revistas científicas de alto reconocimiento y divulgación, tanto nacionales como internacionales. También ha publicado capítulos y libros, entre los que se destacan dos volúmenes del libro “Metodología para el aprendizaje de las matemáticas” en los cuales compila material didáctico para la enseñanza de las matemáticas y son usados como material de apoyo por los docentes de educación básica y media.

Director de más de 50 trabajos de grado de pregrado, profesor de varias especializaciones, maestrías y doctorados, y director de más de 30 tesis de maestría. Ha trabajado coordinando capacitaciones y vínculos académicos con destacados investigadores internacionales en educación matemática e informática como: Bruno D’Amore, Miembro de la Academia de Ciencias de Bolonia y presidente del Comité Científico del Congreso Encuentros Matemáticos (Italia); Vicenç Font Moll, Profesor Titular de la Universidad de Barcelona (España); Francesco Romani, Universidad de Pisa (Italia); Martha Fandiño, Universidad de Bolonia (Italia); Carlos Andujar, Universidad Politécnica de Catalunya (España); Olga Lidia Pérez y Oswaldo Rojas (Cuba) y John Mason, Open University (Inglaterra), Carlos Eduardo Vasco, entre otros.

Fue integrante activo del grupo de investigación VIALTOPO (Visión Algebraica de la Topología), dirigido por el Dr. Carlos Ruiz, con sesiones en la Universidad Nacional, Sede Bogotá y en la UPTC, sede Tunja y actualmente es integrante del grupo de investigación Pirámide.

Fue co-organizador y promotor de eventos para la divulgación de la matemática y de la educación matemática, especialmente en las Jornadas de Matemáticas, en los encuentros de Topología y en la mayoría de los 22 Seminarios Boyacenses de Matemáticas y Física, promovidos por la Sociedad Boyacense de Matemáticas y Física, logrando, junto con Manuel Suárez Martínez, Juan Aponte y otros profesores, la presencia de conferencistas, talleristas y cursillistas con reconocida trayectoria académica e investigativa como: Yu Takeuchi, Carlos Ruiz Salguero, Alfonso Takahachi, Antanas Mockus, Carlos Federici, José María Muñoz, Carlos Vasco, Jesús Hernando Pérez, Julián de Subiría y muchos otros maestros e investigadores, quienes prestaron sus servicios académicos en dichos eventos de manera solidaria y gratuita.

Ha participado como ponente, conferencista y tallerista en distintos eventos a nivel nacional e internacional y en Foros de Experiencias Significativas de Matemáticas.

En las décadas de los ochenta, noventa y principios del año 2000 fue capacitador del Ministerio de Educación Nacional a través del Centro Experimental Piloto de Boyacá y conferencista invitado en los “Microcentros”, para compartir estrategias en la enseñanza de las matemáticas, con docentes de instituciones de educación básica y media de distintas regiones de Colombia.

Multiplicador del proyecto de cualificación docente para profesores de matemáticas de educación básica, mediante el convenio: Ministerio de Educación Nacional - ICETEX - UPTC, dirigido por el doctor Alfonso Jiménez.

Desde el año 2014 ha apoyado el Simposio de Matemáticas y Educación Matemática (MEM), organizado por el Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño.

Colaborador en el desarrollo de la competencia tecnológica como ingrediente esencial en la formación docente en matemáticas. Durante más de dos décadas ha propiciado la generación de escenarios de práctica en torno al estudio de la geometría fractal, a través de la exploración de parques temáticos y ecológicos de nuestro país.

Promotor del “Encuentro de Experiencias Significativas en Educación Matemática” que durante 15 años se ha realizado semestre a semestre en la UPTC. Este evento tiene como objetivo socializar avances y resultados de trabajos investigativos en el área, así como fomentar el encuentro de estudiantes y docentes de distintos niveles para reflexionar y (re)significar sus prácticas educativas e investigativas, impulsando el desarrollo de la investigación dentro de la educación matemática.

Gestionador y coordinador de las becas “Boyacá Maestra” (año 2018) con la gobernación de Boyacá, beneficiando a muchos profesores de matemáticas de distintas instituciones públicas de Boyacá.

Como Par Académico delegado por CONACES, ha evaluado más de 10 programas de licenciatura en matemáticas, de matemáticas y maestría en docencia de la matemática, de distintas universidades del país.

HÉCTOR SUÁREZ
ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA (UPTC)
TUNJA, COLOMBIA
e-mail: hector.suarez@uptc.edu.co

Obituario. Jaime Ignacio Lesmes Camacho: maestro y amigo

Jean C. Cortisoz

Universidad de los Andes, Colombia

Mi querido maestro, mentor, amigo y colega Jaime Lesmes falleció el 30 de diciembre de 2023. A él dedico las siguientes líneas, escritas desde un profundo respeto y la mayor admiración.

Conocí a Jaime Ignacio Lesmes Camacho a finales de 1993. Yo venía de Barranquilla, ya terminando mi último año de secundaria, y estaba visitando la Universidad de los Andes, aprovechando un viaje para presentar el examen de ingreso a la Universidad Nacional, con la intención de pedir una beca para estudiar matemáticas. Además de una entrevista con el profesor Alberto Schotborgh, en esa época decano de Admisiones de la Universidad de los Andes, uno de los requisitos para hacer dicha solicitud era entrevistarse con el jefe del Departamento de Matemáticas. La cita a cumplir era en el viejo edificio L, el cual fue demolido tiempo después para dar paso a una estructura más moderna y segura. Llegué un poco antes de la hora acordada y esperé sentado en la secretaría, atendida por la querida Mercedes, cuando al poco rato llegó un señor vestido de chaleco y traje. Ese señor era el profesor Jaime Lesmes, quien preguntó mi nombre y sin más me hizo pasar a su oficina. Recuerdo mucho aquella oficina, su piso de madera, su aire vetusto, y sobre todo aquel retrato de David Hilbert que hacía de custodio. Una vez allí, Jaime me preguntó por qué quería estudiar matemáticas y le confesé que la razón era que había empezado por gustarme la Física pero que al no entender todo muy bien, decidí aprender Matemáticas. Entonces me interrumpió y me dijo que porqué no estudiaba Física, que ese había sido su mayor deseo, pero que no pudo hacerlo pues en Colombia (hacia los años 50) no había una carrera de Física. Luego, conociendo su bien dotada biblioteca me enteré que ese amor por la Física lo mantuvo a lo largo de su vida.

No habiendo carrera de Física en nuestro país, Jaime había optado por estudiar Ingeniería Civil, carrera a la que ingresó en 1956 en la Universidad Nacional de Colombia. Una vez fue abierta la carrera de Matemáticas, también en la Universidad Nacional de Colombia, Jaime decidió inscribirse en la misma obteniendo su doble titulación en 1961.

Aquí fue donde tuvo como profesor a Guillermo Restrepo, quien de alguna manera fue un referente, y por quien mantuvo admiración por el resto de su vida.

Al terminar sus estudios de pregrado en Matemáticas e Ingeniería Civil (carrera que, según él, nunca ejerció, pero por cuya causa existe un edificio en Cartago para el cual Jaime hizo cálculos estructurales), dada su excelencia como estudiante, obtuvo una beca para realizar estudios doctorales en Europa. Jaime se decide por Alemania, más exactamente por la Universidad de Heidelberg, donde empezó su doctorado, el cual terminaría en la Universidad de Fráncfort, bajo la guía de Gottfried Köthe, de quien fue su ayudante dada su calidad y meticulosidad como estudiante. Su tesis, titulada “Über lineare partielle Differenzial-Differenzenoperatoren mit konstanten Koeffizienten”, versaba sobre ecuaciones diferenciales parciales, y una muestra de la calidad de la misma es que fue publicada de manera íntegra en la revista *Collectanea Mathematica* (18,1966-1967). Reproduzco aquí lo escrito por el revisor de la AMS encargado de su reseña:

The subject of the paper is to give a very general treatment of the differential-difference equation of the form $P(u) = f$ in the spaces of distributions $D'(\Omega), E'(\Omega), D'_v$, where $P(u) = \sum_{k=0} P_k(D) \tau_{h_k} u$, P_k are polynomials with constant (complex) coefficients, $h_k = (h_{k_1}, \dots, h_{k_n})$ $0 \leq k \leq 1$ are vectors in R^n and τ_{h_k} are the translation operators. The author gives a constructive proof for the existence of a fundamental solution. With the help of the Hörmander step, a characterisation of all solutions in the space D'_K is given. Some important theorems concerning the existence of solutions in the spaces $D'(\Omega), E'(\Omega), E(\Omega), DF'(\Omega)$ are proved. In the last paragraph the regularity of solutions is investigated in great generality.

Juan Horváth, profesor de la Universidad de Maryland y quien fuera profesor en Los Andes, se refirió a esta tesis en una de sus charlas como un trabajo excepcional y difícil, llena de virtuosismo técnico, en especial por su uso de la construcción conocida como “Escalera de Hörmander” a la que también se refiere el revisor.

Una vez terminado su doctorado, Jaime regresa a Colombia y se vincula como profesor a la Universidad Nacional de Colombia: corre el año 1967, Jaime contaba con 28 años de edad. Durante esta primera estancia como Profesor de Matemáticas en Colombia, en la Universidad Nacional, Jaime organiza el que sería el primer programa de Maestría en Matemáticas del país. En 1969 es nombrado Miembro Correspondiente de la Academia Colombiana de Ciencias, siendo en ese momento el miembro correspondiente más joven nombrado por la Academia (sería nombrado Miembro de Número treinta y tres años más tarde en 2002). En ese momento, Jaime ya era, a pesar de su juventud, un matemático reconocido en Latinoamérica. Tanto era así, que en 1970 es invitado por el profesor Leopoldo Nachbin para integrarse a la planta de profesores del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA) en Río de Janeiro. Esta vinculación tuvo profundos efectos en el desarrollo de la matemática en nuestro país, ya que a través de ella se beneficiaron varios matemáticos quienes lograron realizar sus estudios de doctorado en dicha institución. Debo destacar que el IMPA es una de las instituciones especializadas en la investigación y en la enseñanza de las Matemáticas más prestigiosas del mundo.

El campo de investigación de Jaime se centró alrededor del estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y de Ecuaciones de Convolución. El grueso de su investigación lo desarrolló en el IMPA y, aunque su obra científica no es extensa, como escribí alguna vez sobre ella, es de calidad. Hablaré brevemente sobre dos de los principales artículos de Jaime. El primero “On the approximation of continuously differentiable functions in Hilbert Spaces” (Revista Colombiana de Matemáticas 8, 217-223, 1974), en el cual da una bella generalización del Teorema de Stone-Weierstrass a álgebras de funciones diferenciables en espacios de Hilbert, y el cual se ha convertido en su trabajo más citado, habiéndolo sido en revistas de gran reconocimiento internacional. El segundo “The Cauchy Problem for convolution equations. Uniqueness” (con C. A. Berenstein, Michigan Math J. 26, 1979) donde Jaime junto a Carlos Berenstein demuestran un teorema de unicidad para una ecuación de convolución. Aunque hubiese sido aún más satisfactorio obtener además un resultado de existencia, este debió esperar unos años más como lo vaticinó alguna vez Francois Trèves, quien consideraba el problema de existencia para ecuaciones de convolución de extrema dificultad. Este problema absorbió mucho de la energía creativa de Jaime por varios años, aunque al final no fue él quien obtuvo la solución final.

En 1980 Jaime regresa a Colombia, en parte porque, a pesar de lo agradecido que siempre estuvo con el Brasil, país que lo supo acoger, no quería sentirse extranjero. A su retorno, se vincula como profesor de planta al departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, del cual sería director en dos ocasiones (1984-1986 y 1993-1995) y que fue la faceta en la que lo conocí. Mientras estuvo en nuestro departamento organizó congresos tratando de visibilizar a Colombia en el escenario internacional, entre los cuales destacan las “Escuelas de Verano en Geometría Diferencial, Ecuaciones Parciales y Análisis Numérico”, realizadas en los años 1993, 1994 y 1995. El desarrollo de las matemáticas en nuestro país le debe mucho a esos congresos, no sólo por el nivel de los invitados, entre ellos Luis Caffarelli y Gustavo Ponce, sino por los vínculos que se crearon. También fue Presidente de la Sociedad Colombiana de Matemáticas en dos ocasiones (1968-1970, 1983-1987), y fue miembro del comité editorial de la Revista Colombiana de Matemáticas. Por sus logros como docente e investigador, la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales le concede el “Premio a la Obra Integral de un Científico” en 2008.

En cuanto a otros intereses, Jaime era un hombre culto, que amaba la lectura, siendo sus temas favoritos la literatura, la historia y la ciencia. Para mí fue una sorpresa descubrir su gusto por las novelas de suspenso y encontrar a autores como John LeCarré y John Grisham al lado de Orhan Pamuk y de Mario Vargas Llosa. También era un entusiasta de los idiomas: hablaba con fluidez, a parte de su español nativo, alemán, inglés, francés y portugués, y aún estuvo entre sus aficiones aprender chino y ruso. Hablando sobre la disciplina de Jaime para aprender idiomas, su gran amigo José Escobar (quien fue mi asesor de doctorado) solía decir que “Jaime es un mazo” por su dedicación para aprender y aprehender aquello que le interesaba.

El Jaime Lesmes que conocí fue un bohemio responsable, un hombre de principios, tímido, lleno de anécdotas y consejos, un hombre de una inteligencia aguda y profunda, de un excelente sentido del humor (que no dejaba de aplicar a sí mismo), y un referente para

las matemáticas de este país cuando apenas era un concepto nebuloso el que en Colombia se podía hacer investigación. Un amigo leal, un hombre de familia (sus vacaciones de fin de año solía pasarlas con la familia de su hermano y la de sus sobrinos), un hombre excepcional. Fue un excelente profesor, un docente destacado que preparaba cada una de sus clases al detalle, y que dejó como testimonio un grupo de estudiantes que ahora enseñan e investigan en diferentes universidades del país y del exterior (y ahora me pregunto ¡cuántos de ellos no aprendieron Análisis Funcional en las notas mimeografiadas de su libro (del mismo nombre) y escrito en coautoría con su único estudiante de doctorado, Teófilo Abuabara!). Gracias a Jaime Lesmes y a su generación, podemos hablar de una disciplina matemática en Colombia que ya genera resultados de relativa importancia y que ha alcanzado algún nivel de reconocimiento internacional.

JEAN CARLOS CORTISSOZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, COLOMBIA
email: jcortiss@uniandes.edu.co

Algunos problemas interesantes

Oscar Bernal

¡Siguen en Lecturas Matemáticas los problemas para pensar un poco! En este número proponemos algunos problemas nuevos, de nuevo con niveles de dificultad y contenidos matemáticos diversos. Además, queremos dejar abiertos los problemas del número anterior, queremos que las soluciones de nuestros lectores sean las protagonistas.

Nos gustaría mucho saber cómo han resuelto estos problemas, así que las soluciones son bienvenidas al correo electrónico `cedm@scm.org.co` en un mensaje con el sujeto *Soluciones Lecturas* e indicando el número de la revista en la que apareció el problema; en el número siguiente presentaremos las soluciones y créditos a quienes nos escriban.

Mantenemos la puerta abierta a las propuestas de problemas, para lo que también está disponible el correo electrónico `cedm@scm.org.co` al que pueden proponer sus problemas, originales y con solución completa, en un mensaje con el sujeto *Problemas Lecturas*.

1. Problema 1

Una persona imprimió en un papel una sección de la parábola $y = x^2$ que contiene al vértice, pero no imprimió los ejes o alguna otra indicación adicional. Explique cómo reconstruir, utilizando solamente regla y compás, el vértice, el foco y la directriz de la parábola.

¿Es esa reconstrucción posible para cualquier parábola?

2. Problema 2

Para cada par de enteros positivos a, b se representa como (a, b) el máximo común divisor entre ellos.

Dado un entero $n \geq 2$, se define la función $s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n, k)$. Demuestre que no es posible encontrar un valor constante c tal que la desigualdad $s(n) \leq cn$ se cumpla independientemente del valor de n .

3. Problema 3

Para cada entero positivo n se definen los conjuntos n -algebraicamente cerrados como aquellos subconjuntos S de los números complejos, con al menos un elemento diferente de 0, para los que todo polinomio de grado exactamente n con coeficientes en S tiene sus raíces en S .

1. Encuentre todos los n para los que existen conjuntos finitos n -algebraicamente cerrados y,
2. para cada n con conjuntos finitos n -algebraicamente cerrados, encuentre todos los conjuntos finitos con esa propiedad.

OSCAR BERNAL
COMISIÓN DE EDUCACIÓN Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: cedm@scm.org.co

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: os-berna@uniandes.edu.co

Noticias

1. La Academia de Ciencias y Letras de Noruega resolvió conceder el Premio Abel 2024 al matemático Michael Talagrand del Centro Nacional para la Investigación Científica (CNRS), París, Francia, “por sus contribuciones innovadoras a la teoría de la probabilidad y al análisis funcional, con aplicaciones excepcionales en física matemática y estadística” <https://abelprize.no/>

Eventos

1. El sexto encuentro de Álgebra y Topología se realizó del 3 al 5 de abril de 2024 y tuvo como sede a la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales y la Universidad del Cauca. El Encuentro de Álgebra y Topología es un evento académico que tiene sus orígenes en intercambios académicos entre investigadores de la Universidad Nacional de Colombia, sedes Bogotá y Medellín, de la Universidad de Caldas y de la Universidad de Antioquia, y estudiantes de pregrado y posgrado de ambas instituciones. <https://sites.google.com/view/6algebra-and-topology/inicio>
2. La Tercera Conferencia Colombiana de Matemáticas Aplicadas e Industriales (MAPI 3) se llevó a cabo en la Universidad Industrial de Santander en Bucaramanga, Colombia del 12 al 14 de junio de 2024. Este evento fue organizado por la Comisión de Matemáticas Aplicadas e Industriales de la Sociedad Colombiana de Matemáticas. Su principal objetivo era fortalecer e incentivar la investigación en matemáticas aplicadas y las aplicaciones matemáticas a todo tipo de problemas científicos y problemas en el sector público y privado. Más información en <https://scm.org.co/mapi-3/>
3. El 26° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones se llevó a cabo en el Instituto Pedagógico Nacional del 19 al 21 de junio de 2024. El Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones es un evento académico de carácter internacional que se ha realizado desde 1990 por la Universidad Pedagógica Nacional. Para más información, visite <https://encuentrodegeometria.upn.edu.co/index.html>
4. La octava edición del “Encuentro Colombiano de Combinatoria (ECCO 2024)” se realizó en Popayán, Colombia del 17 al 28 de junio, y tuvo como sede la Universidad del Cauca. El principal objetivo del encuentro fue reunir a jóvenes matemáticos de

la región y ofrecerles la oportunidad de interactuar con investigadores internacionales y expertos de gran trayectoria y experiencia en el área de combinatoria y sus aplicaciones. <https://ecco2024.combinatoria.co/>

5. Recomendamos consultar los calendarios de eventos de la Sociedad Americana de Matemáticas (AMS) <https://www.ams.org/meetings/calendar/mathcal> y la Sociedad de Matemáticas Industriales y Aplicadas (SIAM) <https://siam.org/conferences/calendar>

Otras actividades

1. El 14 de marzo se celebró el Día Internacional de las Matemáticas, proclamado por la 40ª Conferencia General de la UNESCO. Cada año se propone un tema para despertar la creatividad en torno a las matemáticas y animar la participación. El tema para 2024 fue: “Jugando con las matemáticas”. Desde la comisión de educación y divulgación se realizaron una serie de eventos y talleres con la finalidad de celebrar este día. Puede revivir algunos de ellos visitando <https://www.youtube.com/@sociedadcolombianadematema7197>
1. El pasado 12 de mayo se celebró el Día Internacional de la Mujer Matemática, una conmemoración que tiene como objetivo destacar y celebrar las contribuciones de las mujeres en el campo de las matemáticas. Esta fecha fue elegida en honor a Maryam Mirzakhani, la primera mujer en recibir la Medalla Fields, el premio más prestigioso en matemáticas. Esta jornada especial no solo celebra los logros de las mujeres matemáticas, sino que también proporciona la oportunidad para inspirar a las futuras generaciones de mujeres matemáticas. Diversas instituciones colombianas celebraron este día, entre las cuales se destaca el evento realizado en la Universidad del Valle: Mujeres Matemáticas, puede consultar la programación del evento en el siguiente enlace <https://mathred.correounivalle.edu.co/inicio>. También puede consultar los distintos eventos realizados a nivel internacional para celebrar esta fecha, visitando <https://may12.womeninmaths.org/>

Lecturas Matemáticas
Volumen 45, No. 1, 2024
Contenido

Temas matemáticos

JOSEFINA ALVAREZ, *Summability of a Fourier series*5

Historia de las matemáticas

JOSÉ MARÍA AYERBE TOLEDANO, *Los dos grandes tesoros de la Geometría y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables*35

Notas matemáticas

ZHIGUO DING AND MICHAEL E. ZIEVE, *A note on "A counterexample to a proposition of R. Mathews"*75

Comunicaciones y perfiles

HÉCTOR SUÁREZ, *Publio Suárez Sotomonte: Premio José Celestino Mutis a la enseñanza de las Matemáticas - año 2023*81

JEAN C. CORTISSOZ, *Obituario. Jaime Ignacio Lesmes Camacho: maestro y amigo*85

Problemas

OSCAR BERNAL, *Algunos problemas interesantes*91

Noticias y eventos

Noticias95

Eventos95

Otras actividades96

