

Algunos problemas interesantes

Oscar Bernal

¡Siguen en *Lecturas Matemáticas* los problemas para pensar un poco! En este número proponemos algunos problemas nuevos, de nuevo con niveles de dificultad y contenidos matemáticos diversos. Además, queremos dejar abiertos los problemas anteriores, queremos que las soluciones de nuestros lectores sean las protagonistas.

Nos gustaría mucho saber cómo han resuelto estos problemas, así que las soluciones son bienvenidas al correo electrónico cedm@scm.org.co en un mensaje con el sujeto *Soluciones Lecturas* e indicando el número de la revista en la que apareció el problema; en el número siguiente presentaremos las soluciones y créditos a quienes nos escriban.

Mantenemos la puerta abierta a las propuestas de problemas, para lo que también está disponible el correo electrónico cedm@scm.org.co al que pueden proponer sus problemas, originales y con solución completa, en un mensaje con el sujeto *Problemas Lecturas*.

1. Problema 1

Para algún valor entero positivo de n , se tienen los números enteros del 1 al n para formar una secuencia.

1. ¿Cuántas secuencias se pueden formar de forma que cada término, excepto el primero, tenga diferencia 1 con alguno de los términos anteriores? Por ejemplo, para $n = 4$, $2 - 3 - 1 - 4$ sería una secuencia aceptable pero $2 - 1 - 4 - 3$ no.
2. ¿Cuántas secuencias se pueden formar de forma que cada término, excepto el primero, tenga diferente paridad al inmediatamente anterior?
3. ¿Cuántas secuencias se pueden formar de forma que cada término, excepto el primero, tenga diferente paridad al inmediatamente anterior y además tenga diferencia 1 con alguno de los términos anteriores? Por ejemplo, para $n = 4$ las secuencias $2-1-3-4$ y $4-1-3-2$ cumplen cada una una de las dos condiciones pero no las dos.

2. Problema 2

Entre todas las bases numéricas existe una muy particular, la base factorial. En esta base, cada posición tiene como valor posicional un factorial, iniciando desde el 1, y el máximo valor que puede tomar la posición es justamente el valor del factorial al que corresponde. Como ejemplos, el número 34221 en base factorial es igual a

$$3 \times 5! + 4 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1 \times 1! = 3 \times 120 + 4 \times 24 + 2 \times 6 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 473,$$

mientras el número 35221 es inadmisibles porque en el espacio posicional del $4!$ no es permitido tener números mayores a 4.

Determine si existe algún número tal que su escritura decimal y su escritura en base factorial son iguales.

Nota: a partir de valores suficientemente grandes de n , la interpretación de la escritura en base factorial puede ser ambigua. Por ejemplo, a falta de aclaración, el número 100 000 000 000 (espacios agregados para facilitar la lectura posicional) podría entenderse como $10 \times 11!$ o como $1 \times 12!$. En este problema cualquiera de las interpretaciones posibles es igualmente admisible.

3. Problema 3

Dado un polinomio $p(x)$ de coeficientes complejos, se define una sucesión de polinomios empezando por $p_1(x) = p(x)$ y con $p_n(x) = p(p_{n-1}(x))$. Con esta sucesión definida, para cada $i \geq 1$ se define R_i como el conjunto de todas las raíces complejas del polinomio $p_1(x)$.

Determine si existe un polinomio inicial $p(x)$ no constante tal que, para todo $i \geq 1$, $S_{i+1} = S_i \cup \{a_i\}$ donde a_i es un número complejo con $a_i \notin S_i$.

OSCAR BERNAL
COMISIÓN DE EDUCACIÓN Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: cedm@scm.org.co