



# Memorias del XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Índice

<b>1. PLENARIAS</b>	<b>2</b>
<b>2. PONENCIAS</b>	<b>5</b>
2.1. Álgebra . . . . .	5
2.2. Análisis Real . . . . .	31
2.3. Combinatoria . . . . .	35
2.4. Ecuaciones diferenciales . . . . .	44
2.5. Educación Matemática . . . . .	75
2.6. Física matemática . . . . .	105
2.7. Geometría . . . . .	110
2.8. Historia de la matemática . . . . .	122
2.9. Lógica . . . . .	126
2.10. Optimización, teoría de control y aplicaciones a economía . . . . .	130
2.11. Probabilidad y estadística . . . . .	138
2.12. Teoría de operadores, análisis numérico y de ciencias de la computación. . .	150
2.13. Topología . . . . .	172
<b>3. PÓSTERES</b>	<b>182</b>
3.1. Álgebra . . . . .	182
3.2. Análisis real . . . . .	185
3.3. Combinatoria . . . . .	186
3.4. Ecuaciones diferenciales . . . . .	188
3.5. Educación Matemática . . . . .	197
3.6. Física matemática . . . . .	199
3.7. Geometría . . . . .	205
3.8. Lógica . . . . .	213
3.9. Optimización, teoría de control y aplicaciones a economía . . . . .	213
3.10. Probabilidad y estadística . . . . .	216
3.11. Teoría de operadores, análisis numérico y de ciencias de la computación . . .	219
3.12. Topología . . . . .	231



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

## 1. PLENARIAS

### **COMBINATORIA, GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA**

Yadira Valdivieso Díaz  
Universidad de las Américas Puebla  
yadira.valdivieso@udlap.mx

La teoría de representaciones de álgebras es un área de las matemáticas cuya idea inicial fue estudiar estructuras algebraicas a través de su traducción a objetos en los que se involucran espacios vectoriales y funciones lineales. Actualmente, esta rama interactúa con diferentes áreas de las matemáticas como la combinatoria, la topología, la teoría de categorías, el análisis armónico, las ecuaciones diferenciales y la geometría algebraica, contribuyendo así a la resolución de problemas en todas estas disciplinas. En esta plática mostraré algunos ejemplos en donde la combinatoria, la topología y la teoría de representaciones se han interrelacionado con el fin de resolver preguntas abstractas.

### **MODELACIÓN DE OBJETOS DE LA NATURALEZA: UNA EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN GEOMÉTRICA**

Publio Suárez Sotomonte  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)  
publio.suarez@uptc.edu.co

A partir de una breve revisión histórica de la Educación Geométrica en Colombia y su devenir en el currículo de matemáticas, especialmente en la educación básica y media, con los aportes de Carlos Vasco y Alberto Campos, se presenta una estrategia en el aprendizaje de la Geometría Fractal de la Naturaleza, de manera particular los fractales autosemejantes generados por sistemas de funciones iteradas (IFS) mediados con TIC, software de geometría dinámica y cálculo simbólico, mostrando algunos ejemplos de modelación de objetos naturales. Finalmente se analizan los resultados obtenidos de la experiencia didáctica y de las prácticas de campo con estudiantes universitarios, contextualizadas en los desarrollos de las últimas tendencias de investigación en educación matemática como el enfoque noético-cognitivo en el campo de los sistemas semióticos de representación de Duval y el enfoque Onto Semiótico (EOS) de Godino, Batanero y Font.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### CONJUNTOS SIDON EN COLOMBIA

Carlos Alberto Trujillo Solarte

Universidad del Cauca

trujillo@unicauca.edu.co

“¿Cuál es el máximo número de enteros positivos que pueden escogerse de entre los primeros  $N$ , de tal forma que todas las sumas de dos de ellos sean distintas?” (Simon Sidon, 1930). En general, en un grupo conmutativo  $G$ , notado aditivamente, un subconjunto  $S$  de  $G$  es un conjunto Sidon si todas las sumas de dos elementos de  $S$  son distintas. Es decir, si para todo  $a, b, c, d$  en  $S$ ,  $a + b = c + d$  solo es posible si  $\{a, b\} = \{c, d\}$ . Sea  $S(G)$  denotando al máximo cardinal que puede tener un conjunto Sidon en  $G$ , el problema natural consiste en investigar el comportamiento asintótico de  $S(G)$  cuando el orden de  $G$  tiende al infinito. En esta conferencia presentaré algunos resultados sobre conjuntos Sidon, en los cuales hemos intervenido matemáticos colombianos.

### GEOMETRÍA TROPICAL Y APLICACIONES EN GEOMETRÍA REAL Y ENUMERATIVA

Johannes Rau

Universidad de los Andes

j.rau@uniandes.edu.co

Los objetos básicos de la geometría tropical son complejos poliedrales que satisfacen una condición de equilibrio. Pueden considerarse un tipo muy peculiar de variedades algebraicas que utilizan la aritmética tropical «max-plus» o coordenadas logarítmicas. Desde su invención en torno al año 2000, la geometría tropical se ha aplicado en numerosas situaciones, con especial éxito en la geometría enumerativa y real. Mi objetivo es dar una breve visión general de las ideas básicas y mostrar algunas de estas aplicaciones.

### SOLUCIONES POSITIVAS PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS LIGERAMENTE SUBCRÍTICOS

Rosa Pardo

Universidad Complutense

rpardo@uclm.es



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Nos centramos en ecuaciones elípticas semilineales y cuasi-lineales con no linealidades subcríticas en sentido generalizado. Utilizando espacios de Orlicz-Sobolev, consideramos no linealidades superlineales que no tienen un crecimiento polinomial y enunciamos condiciones suficientes que garantizan existencia de soluciones. Admitimos la posibilidad de pesos cambiando de signo. Las principales novedades de nuestro enfoque son las siguientes: (i) Extendemos los teoremas de bifurcación para el  $p$ -Laplaciano a estas no linealidades ligeramente subcríticas. La compacidad se logra a través de espacios de Orlicz. Estudiamos la existencia de una rama bifurcada de soluciones positivas clásicas. (ii) Establecemos condiciones suficientes para garantizar la condición de Palais-Smale y poder usar técnicas variacionales. (iii) Generalizamos parcialmente resultados previos sobre el  $p$ -laplaciano para estas no-linealidades, admitiendo pesos con signos cambiantes. Hablaremos de una serie de trabajos conjunto con Alfonso Castro (Harvey Mudd College), Mabel Cuesta (Université du Littoral Côte d'Opale), y Angela Pistoia (Sapienza Universidad de Roma).

### INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN CRISTALES

Bernardo Uribe

Universidad de los Andes

buribe@gmail.com

En esta conferencia explicaré fenómenos emergentes en la teoría electromagnética de cristales que se relacionan con invariantes muy estudiados de espacios topológicos.

### FIBRADOS VECTORIALES PARA LA ALINEACIÓN DE DATOS Y LA REDUCCIÓN DE DIMENSIONALIDAD

Jose Perea

Northeastern University

j.pereabenitez@northeastern.edu

Un fibrado vectorial puede entenderse como una familia de espacios vectoriales parametrizados por un espacio topológico fijo. Los fibrados vectoriales poseen una estructura rica y aparecen naturalmente al intentar resolver problemas de sincronización en análisis de datos. En esta charla mostraré cómo la maquinaria clásica (mapeos clasificantes, clases características, etc.) puede adaptarse al mundo de los algoritmos y los datos con ruido, así como las conclusiones que se pueden obtener. En particular, describiré una clase de problemas



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

de reducción de dimensionalidad que preservan la topología subyacente, y cuya solución se reduce a encajar el espacio total de un fibrado de datos particular. La charla tendrá varios ejemplos de aplicaciones incluida la química computacional y los sistemas dinámicos.

### **EL GRUPO FUNDAMENTAL DE 3-VARIEDADES Y REPRESENTACIONES EN $SU(2)$**

Juanita Pinzón Caicedo  
Universidad de Notre Dame  
jpinzonc@nd.edu

El grupo fundamental  $\pi_1(X)$  de un espacio topológico  $X$  se define como las clases de homotopía de las curvas cerradas de  $X$ . En el caso de 3-variedades cerradas e irreducibles, sabemos que el grupo fundamental es suficiente para determinar la clase de homeomorfismo de la 3-variedad, con la excepción de los espacios lenticulares. En términos de estructuras geométricas, si una 3-variedad cerrada, orientable y prima  $M$  tiene los mismos grupos de homología que la 3-esfera, sabemos también que admite una de las siguientes estructuras geométricas: hiperbólica, de espacio fibrado de Seifert, o toroidal. En la charla describiré la correspondencia entre estas estructuras geométricas y el grupo fundamental, así como la existencia de homomorfismos  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow SU(2)$  cuya imagen es un grupo no abeliano.

## **2. PONENCIAS**

### **2.1. Algebra**

#### **Graph configurations associated with Latin squares, finite groups and finite loops**

Adriana Juzga León  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
adriana.leon@uerj.br

There are several types of graphs associated with different algebraic structures, where their vertices correspond to elements, and edges reflect the structure's properties. For



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

example, the graph obtained considering the group's Cayley table as a Latin square. We offer a concise overview of the Latin square associated with a finite group and explore some properties of its graph, extending this concept to other algebraic structures, such as loops.

### UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE SIEGEL

Adriana Maribel Mora Benavides

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

maribelmb@unicauca.edu.co

ERIC FERNANDO BRAVO MONTENEGRO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

En 1926, C.L. Siegel probó que solo hay un número finito de puntos enteros en una curva elíptica dada. Nosotros usamos este resultado para demostrar que solo hay un número finito de números poligonales que son  $b$ -repdígitos bajo cierta condición. En particular, hallamos todos los números triangulares que son  $b$ -repdígitos para  $b \in [2, 9]$ .

### Minimality of the D-groupoid of symmetries of a projective structure

Alejandro Arenas Tirado

Universidad Nacional de Colombia y Corporación Universitaria Minuto de Dios

aarenast@unal.edu.co

En este artículo con los autores Guy Casale y David Blázquez Sanz estudiamos el D-grupoide de Kummer, el cual es el grupoide de simetrías de una estructura proyectiva meromorfa. Damos condiciones necesarias y suficientes para su simplicidad, en el sentido de no tener sub-D-grupoide no finitos. La condición que encontramos resulta ser equivalente a la fuerte minimalidad de la ecuación schwarziana no lineal y la no integrabilidad mediante funciones liouvillianas de la ecuación schwarziana lineal.

### MV-álgebras libres, MV-espacios de Stone y MV-álgebras lcc

Alejandro Díaz Llano

Universidad Tecnológica de Pereira

alejodiaz-527@utp.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Luz Victoria De La Pava Castro

Universidad del Valle

Las categorías de espacios MV-topológicos de Stone y MV-álgebras lcc fueron definidas por C. Russo en 2016. A través de estas categorías se extiende la clásica dualidad de Stone entre las categorías de espacios topológicos de Stone y la de álgebras Booleanas.

En esta charla, exploramos esta dualidad y presentamos nuevos ejemplos de MV-álgebras lcc y de MV-espacios de Stone. En este contexto, resaltamos propiedades de la MV-álgebra libre de  $n$  variables,  $\text{Free}_n$ . En particular, mostramos que el MV-espacio topológico generado por la MV-álgebra libre es de Stone y que, a través de un funtor en la dualidad, resulta ser la completación de la libre como MV-álgebra lcc.

### **Noncommutative differential geometry of quantum planes**

Andrés Alejandro Rubiano Suárez

Universidad Nacional de Colombia, Universidad ECCI

arubianos@unal.edu.co

We investigate the noncommutative differential geometry of families of semi-graded rings or semi-graded Artin-Schelter regular algebras. With this end, we present some definitions and preliminaries on these algebraic structures and on the smooth geometry of noncommutative algebras.

### **Clasificación de elementos y espectros primos en extensiones PBW torcidas**

Andrés Chacón Capera

Universidad Industrial de Santander

andchaca@uis.edu.co

En esta charla se presentarán los resultados obtenidos por Chacón, Higuera y Reyes (2024) sobre la clasificación de varios tipos de elementos en extensiones PBW torcidas sobre anillos débilmente compatibles, incluyendo los idempotentes y los nilpotentes. Estos resultados generalizan los obtenidos en el caso de las extensiones PBW torcidas sobre anillos compatibles y permiten un mejor entendimiento de la estructura algebraica de estos anillos.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Como una primer aplicación de estos resultados, se pueden establecer condiciones para que los espectros primos de estas extensiones sean espacios conexos o normales.

### **Números generalizados de Fibonacci que son suma o diferencia de potencias de 2**

Andrés Ricardo Moreno Garzón  
Universidad del Cauca  
armoreno@unicauca.edu.co

Para un entero  $k \leq 2$ , se define la sucesión  $\{F_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$  conocida como sucesión  $k$ -Fibonacci, la cual comienza con  $0, 0, \dots, 0, 1$  ( $k$  términos) y cada término posterior es la suma de los  $k$  términos precedentes. Esta ponencia abordará los preliminares y resultados previos y se expondrán los procedimientos, métodos e investigación realizada con el objetivo de encontrar las soluciones  $(n, k, a, b)$  de la ecuación diofántica

$$F_n^{(k)} = 2^a \pm 2^b.$$

Más precisamente, se utilizaron propiedades y resultados conocidos previamente sobre estas sucesiones, el límite inferior de las formas lineales en logaritmos de Matveev y una variación de un resultado de Dujella y Pethő para determinar las soluciones, lo cual continúa y extiende trabajos previos.

### **Grupo de Trenzas y su relación con la danza desde el punto de vista matemático**

Angelo Gerardo Gomez Barboza  
Universidad del Cauca  
angelogomez@unicauca.edu.co  
Samin Ingrith Cerón Bravo  
Universidad del Cauca

Las trenzas siempre han llamado la atención en distintas culturas, tanto por su belleza como por su funcionalidad. Pero además de su lado artístico, también tienen un lado matemático fascinante. A principios del siglo XX, Emil Artin estudio las trenzas desde una



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

perspectiva algebraica y descubrió que podían organizarse en una estructura de grupo, mostrando su respectiva presentación con generadores y relaciones. Más adelante, otros matemáticos como Fadell y Neuwirth encontraron conexiones con los espacios de configuraciones, definiendo el grupo de trenzas como el grupo fundamental del espacio de configuraciones y Joan Birman, Koo y Lee tomaron la presentación inicial de Artin para dar lugar a una nueva presentación del grupo de trenzas. Este trabajo busca unir dos mundos que parecen muy distintos: las matemáticas y la danza. La idea es representar los movimientos de los bailarines como trayectorias en un plano cartesiano y, cuando se agrega el tiempo como una dimensión extra, estas trayectorias forman estructuras que pueden describirse como trenzas. Así, las coreografías pueden analizarse desde un punto de vista algebraico.

Investigadores como Bruno Aaron Cisneros han explorado la relación entre la teoría de trenzas y las manifestaciones dancísticas. En su obra “Trenzas y Simetrías: Los esqueletos de la Danza” (2020), Cisneros analiza cómo la estructura recursiva y la simetría inherentes a las trenzas se manifiestan en las secuencias coreográficas de danzas tradicionales y contemporáneas. De manera similar, Ester Dalvit ha trabajado en la divulgación de la teoría de trenzas y su aplicación en la danza, destacando que los movimientos de los bailarines pueden formalizarse matemáticamente como trenzas. Asimismo, Carl Pierer ha presentado ejemplos concretos de danzas representadas en términos del lenguaje de las trenzas, como el baile escocés Borrowdale Exchange. El objetivo principal fue observar algunas danzas folclóricas colombianas desde una perspectiva matemática, entendiendo sus movimientos como elementos de los grupos de trenzas. Para lograrlo, se estudiaron los fundamentos de la teoría de trenzas, se tradujeron ciertos pasos de baile al lenguaje algebraico y se analizaron sus propiedades matemáticas. Los resultados mostraron que los grupos de trenzas de Artin ofrecen una forma interesante y rigurosa de estudiar los patrones y simetrías en la danza. Por supuesto, hay algunas limitaciones, ya que el modelo simplifica ciertos aspectos del movimiento humano. Sin embargo, en el futuro se podría expandir este estudio a otros géneros de danza, utilizar simulaciones computacionales y explorar nuevas aplicaciones en distintas disciplinas. En definitiva, este trabajo demuestra que las matemáticas no son solo números y fórmulas abstractas. También pueden ayudarnos a entender expresiones culturales como la danza, mostrando que el arte y la ciencia están mucho más conectados de lo que solemos pensar.

### **On the simplicity of graded and semi-graded rings**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Camilo Arana Hernández  
Universidad Nacional de Colombia  
dcaranah@unal.edu.co

En un artículo publicado por Jespers en 1993, se estableció una caracterización de la simplicidad de anillos graduados por grupos hipercentrales, en términos de la simplicidad graduada y del centro del anillo.

Por otro lado, en 2017 fueron introducidos por Lezama y Latorre los anillos semi-graduados, los cuales son una familia de estructuras algebraicas que acobijan a los anillos graduados por  $\mathbb{Z}$ . Dado que los grupos hipercentrales generalizan a los grupos nilpotentes y estos, a su vez, contienen a los grupos abelianos, tiene sentido preguntarse si existe un resultado similar al de Jespers pero en el ámbito semi-graduado, es decir, si es posible caracterizar la simplicidad de este tipo de anillos en términos de una simplicidad semi-graduada. Estas formulaciones se exploraron en mi Trabajo Final de Maestría y mostramos algunos resultados.

### **El método de Baker y propiedades aritméticas de sucesiones lineales recurrentes: nuevas aplicaciones**

Carlos Alexis Gómez Ruiz  
Universidad del Valle  
carlos.a.gomez@correounivalle.edu.co

El método de Baker es una poderosa herramienta en la teoría de números utilizada para resolver de manera efectiva ecuaciones diofánticas exponenciales. Basado en la teoría de formas lineales en logaritmos de números algebraicos, desarrollada por Alan Baker, este método permite obtener cotas efectivas para las soluciones enteras de ecuaciones de la forma:  $ax^m + by^n = c$ , con  $x, y, m, n$  incógnitas enteras.

Su importancia radica en que proporciona cotas superiores explícitas para los exponentes, lo que facilita la búsqueda y verificación de soluciones. Gracias a este enfoque, muchas ecuaciones clásicas han sido resueltas, especialmente aquellas relacionadas con números de Fibonacci, Lucas y otras sucesiones recurrentes.

Tras una breve introducción sobre el surgimiento del método de las formas lineales en logaritmos y su aplicación a problemas clásicos en teoría de números, se presentarán algunas aplicaciones recientes del método de Baker en el estudio de propiedades aritméticas de suce-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

siones lineales recurrentes, asociadas con: ecuaciones de Pillai generalizadas, recurrencias binarias en coordenadas de ecuaciones de Pell–Fermat, el problema de Skolem (0-multiplicidad en recurrencias lineales) y problemas del tipo Waring.

Palabras clave: Método de Baker, ecuaciones diofánticas exponenciales, recurrencias lineales.

Referencias [1] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge University Press, 1986; reprinted 2008. [2] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Springer, New York, 2007. [3] B. Faye, J. García and C. A. Gómez, *k-Generalized Lucas numbers, perfect powers and the problem of Pillai*, Monatshefte für Mathematik, 204 (2024), 839–885. [4] J. García, C. A. Gómez and F. Luca, *Solving Skolem’s problem for the k-Generalized Fibonacci sequence with negative indices*, J. Number Theory, 257 (2024), 273–299. [5] J. García, C. A. Gómez and F. Luca, *A finiteness result for an exponential Diophantine equation related to the sum of powers of two consecutive generalized Fibonacci numbers*, (2025), preprint submitted to Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas.

### Lie 2-Algebra of Toral Rank 3

Carlos Rafael Payares Guevara

Universidad Tecnológica de Bolívar

cpayares@utb.edu.co

In this presentation, we study Lie 2-algebras over an algebraically closed field of characteristic two, focusing on those that possess a triangulable Cartan subalgebra. We present general properties of centerless Lie 2-algebras, which allow us to analyze the particular case of simple Lie 2-algebras of toral rank three. As a main result, we establish a necessary condition for simplicity and prove that simple Lie 2-algebras with a triangulable Cartan subalgebra of toral rank three and dimension less than or equal to 16 cannot exist.

### Superalgebras de funciones suaves, una introducción a la supergeometría $C^\infty$ algebraica

Cristian Danilo Olarte

Universidad de Antioquia



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

`cristian.olarte@udea.edu.co`

Decimos que  $\mathfrak{R}$  es un super-anillo si puede expresarse como una suma  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \oplus \mathfrak{R}_1$ , es decir, cualquier elemento de  $\mathfrak{R}$  puede escribirse como una suma  $a_0 + a_1$  donde  $a_i \in \mathfrak{R}_i$  y además  $\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j \subseteq \mathfrak{R}_{i+j}$  (mód 2) para  $i, j \in \mathbb{Z}_2$ .

Los elementos que pertenecen únicamente a  $\mathfrak{R}_0$  o  $\mathfrak{R}_1$  se denominan homogéneos, y su paridad viene dada por  $|a| = i$  si  $a \in \mathfrak{R}_i$ . Esta teoría, aunque inspirada en la física teórica, ha evolucionado hasta convertirse en un campo independiente con aplicaciones en álgebra, geometría y análisis.

Por otra parte, los  $\mathcal{C}$ -anillos son estructuras que asocian operaciones a funciones en  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Estos tienen su origen en la geometría diferencial sintética y han sido utilizados en geometría  $\mathcal{C}$ -algebraica, introducida por Dominic Joyce en [?], que busca construir un análogo diferencial a la geometría algebraica derivada. En este enfoque, los anillos y álgebras clásicas se reemplazan por  $\mathcal{C}$ -anillos, lo que permite definir  $\mathcal{C}$ -esquemas y  $\mathcal{C}$ -stacks, generalizando nociones clásicas de espacio diferenciable en la literatura matemática.

Recientemente, Chien-Hao Liu y Shing-Tung Yau desarrollaron un modelo para teorías de branas fermiónicas basado en supervariedades de Azumaya, superespacios que requieren una estructura de  $\mathcal{C}$ -anillo en su parte par, mostrando la necesidad de introducir  $\mathcal{C}$ -superanillos y  $\mathcal{C}$ -superesquemas, aunque sin una formalización completa.

En esta ponencia daremos los primeros pasos para desarrollar rigurosamente la teoría de  $\mathcal{C}$ -superrings, explorando sus propiedades algebraicas y geométricas así como las principales diferencias que se pueden presentar con respecto a la teoría clásica.

### **Bases De Gröbner: Teoría de Eliminación y El Razonamiento Geométrico Automatizado**

Cristian David Villada Garzón

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

`cvilladag@unal.edu.co`

Esta ponencia tiene como objetivo mostrar la computabilidad y aplicabilidad de las variedades afines en geometría algebraica sobre el anillo de polinomios  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Para ello, se emplea el algoritmo de Buchberger para la computación de las bases de Gröbner, llevado a cabo gracias al algoritmo de división polinómica en varias variables. En particu-



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

lar, se analiza la teoría de eliminación inducida por dicho algoritmo y su relación con la computación de una variedad afín correspondiente a un sistema de polinomios arbitrario en  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Finalmente, se mostrará cómo la computabilidad de las variedades afines en geometría algebraica permite desarrollar un razonamiento automatizado en la demostración de teoremas de la geometría euclidiana, estableciendo una correspondencia entre sistemas de polinomios y estructuras lógicas en la demostración formal de estos teoremas. Este proyecto fue desarrollado como parte de mi opción de trabajo de grado en el programa curricular de Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, bajo la supervisión del Ph.D. Juan Pablo Hernández Rodas.

### **La correspondencia DT/PT en rango arbitrario vía condiciones de estabilidad de Bridgeland**

Cristian Mauricio Martínez Esparza  
Universidad del Rosario  
`cristianm.martinez@urosario.edu.co`

Demostramos que hay un muro en el espacio de condiciones de estabilidad sobre una 3-variedad proyectiva, compleja y suave, que separa a los objetos PT estables y los objetos DT estables. En el caso de rango 1, estos objetos forman los espacios moduli de pares estables de Pandharipande–Thomas y el esquema de Hilbert de curvas, respectivamente. En rango arbitrario, este cruce de muros produce una cirugía entre estos espacios moduli.

### **Algunos fundamentos teóricos de la identificación de proteínas mediante códigos cíclicos**

Diana Haidive Bueno Carreño  
Pontificia Universidad Javeriana seccional Cali  
`dhbueno@javerianacali.edu.co`

Recientemente se ha investigado con éxito la posible relación entre los procesos de síntesis de proteínas y los sistemas de transmisión digital. Basándose en la Teoría de Códigos, se ha trabajado para identificar secuencias biológicas como palabras de códigos cíclicos, particularmente códigos BCH, para verificar la validez de este modelo. En el artículo Construction of



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Cyclic Codes over  $Z_{20}$  for Identifying Proteins (1), se diseñaron tres algoritmos para identificar secuencias biológicas de longitud impar de aminoácidos como palabras clave de códigos cíclicos. En esta charla, presentaremos algunos aspectos del trasfondo matemático de los algoritmos a través de los cuales hemos podido detectar posibles mejoras para algunos pasos de los algoritmos mencionados.

1. Galíndez Gómez, V., Duarte González, M.E. (2019). Construction of Cyclic Codes over  $Z_{20}$  for Identifying Proteins. In: Figueroa-García, J., Duarte-González, M., Jaramillo-Isaza, S., Orjuela-Cañon, A., Díaz-Gutierrez, Y. (eds) Applied Computer Sciences in Engineering. WEA 2019. Communications in Computer and Information Science, vol 1052. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-31019-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-31019-6_4)

### **Bases de Gröbner y su uso en los sistemas de ecuaciones polinomiales**

Édgar Alejandro Triana Quiñones

Universidad del Atlántico

[eatriana@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:eatriana@mail.uniatlantico.edu.co)

La noción de Base de Gröbner fue introducida por el matemático austriaco Bruno Buchberger junto con su asesor doctoral Wolfgang Gröbner en 1965. Si bien años atrás (1903) David Hilbert había mostrado una prueba no constructiva en la revista *Annalen* de la finitud de una base de un ideal  $I$  contenido en un anillo de polinomios en  $n$  variables sobre un cuerpo, Bruno Buchberger revolucionó la geometría algebraica con las bases de Gröbner. Además de proporcionar una base para un ideal  $I$ , este conjunto de polinomios tiene propiedades que permiten resolver diversos problemas. Entre ellos, la pertenencia a un ideal en álgebra conmutativa y la simplificación de sistemas de ecuaciones polinomiales en geometría algebraica. Estas aplicaciones tienen impacto en diversas áreas matemáticas, por mencionar algunas de ellas, en Optimización (problemas PLE, Multiplicadores de Lagrange), en teoría de Grafos con el problema de los tres colores.

El objetivo de esta ponencia es presentar estrategias para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales usando bases de Gröbner con ejemplos ilustrativos y que pongan de manifiesto el poder de usarlas.

### **Classification of graded Hopf algebra quotients**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Fabio Alejandro Calderón Mateus  
Universidad Industrial de Santander  
fabiocalderonmateus@gmail.com

A Hopf algebra  $H$  is said to be  $G$ -graded, for a group  $G$ , if it admits a grading as an algebra that is compatible with the comultiplication and antipode of  $H$ . Notable examples include cocentral extensions of Hopf algebras and twisted Drinfeld doubles of groups. In this talk, we present a classification of Hopf ideals of a  $G$ -graded (quasi)Hopf algebra using a parametrization involving three key elements: (1) normal subgroups  $N$  of  $G$ , (2) Hopf ideals in the identity component  $H_e$  that are invariant under  $N$ , and (3)  $G$ -equivariant trivializations of a specific quotient associated with these parameters. This framework extends ideas from the work of César Galindo and Corey Jones on the classification of fusion subcategories via equivariantization of a fusion category under a group action. However, in our setting, the Hopf algebras are not necessarily semisimple, and the group  $G$  is not necessarily finite. This talk is based on joint work with César Galindo.

### El $k$ -ésimo número triangular cuadrado

Freddy William Bustos Rengifo  
Universidad del Cauca  
frebust@unicauca.edu.co

Presentamos una fórmula explícita que permite obtener números que son simultáneamente triangulares y cuadrados.

### Sobre un problema de clasificación para un carcaj de tipo $\tilde{A}_3$

Gonzalo Medina  
Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
gmedinaar@unal.edu.co

En esta charla mostraré una nueva solución al problema de clasificación para la categoría de representaciones de un carcaj de tipo  $\tilde{A}_3$ . Hablaré también acerca de cómo obtener los anillos de endomorfismos para las representaciones indescomponibles. Discutiré algunos otros



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

problemas de álgebra lineal que pueden solucionarse rápidamente a partir de la solución del problema original. Finalmente, presentaré un algoritmo que permite reconstruir la forma matricial de las representaciones a partir de algunos invariantes gráficos.

### **BL-algebras finitas**

Hernando Gaitán

Universidad Nacional de Colombia

hgaitano@unal.edu.co

BL-algebras fueron introducidas por Hájek para ser la contraparte algebraica de la Lógica Básica ('Basic Fuzzy Logic'). Esta charla trata de la estructura de las BL-algebras finitas. Mostraré cómo obtener el resultado que aparece en el artículo 'Finite BL-algebras', *Discrete Math* 269 (2003), del hecho de que cada BL-algebra finita es un producto subdirecto de una clase especial de BL-algebras finitas nombradas en el citado artículo 'BL-comets'. Mostraré que estas BL-algebras son esencialmente BL-algebras finitas que no admiten descomposición.

### **Nuevas curvas de tipo Kummer con muchos racionales sobre cuerpos finitos**

Horacio Navarro

Universidad del Valle

horacio.navarro@correounivalle.edu.co

En esta charla, presentamos dos métodos para construir curvas de tipo Kummer con muchos puntos racionales sobre cuerpos finitos. El primer método se basa en binomios, mientras que el segundo emplea polinomios recíprocos y es una extensión al caso de cuerpos finitos no primos del método dado en 2023 por Gupta, Mendoza y Quoos sobre cuerpos finitos cuadráticos. Como consecuencia de nuestros resultados, obtuvimos 100 mejoras en [www.manypoints.org](http://www.manypoints.org).

### **Codimension one Distributions of degree 2 on the Projective three-space**

Hugo Alberto Galeano Anaya

Universidad del Sinú—Elías Bechara Zainúm



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

`hugogaleano@unisinu.edu.co`

Codimension one Distributions of degree 2 on the Projective three-space.

Let  $X$  be a smooth projective variety over an algebraically closed field  $k$ . A codimension  $r$  distribution  $D$  on  $X$  is given by an exact sequence

$$0 \longrightarrow T_D \longrightarrow T_X \longrightarrow N_D \longrightarrow 0,$$

where  $T_D$  is a coherent sheaf of rank  $\dim(X) - r$ ,  $T_X$  is the tangent bundle of  $X$ , and  $N_D$  is a torsion-free sheaf. Since  $T_X$  is locally free and  $N_D$  is torsion-free, then  $T_D$  is reflexive.

If  $X = \mathbb{P}^3$  and  $r = 1$ , sequence (1) now reads

$$0 \longrightarrow T_D \longrightarrow T_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow I_Z(d+2) \longrightarrow 0,$$

where  $I_Z$  is the ideal sheaf of a subscheme  $Z \subset \mathbb{P}^3$  of codimension at least 2, named the singular scheme of the distribution twisted by  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d+2)$ , where  $d$  is called the degree of the distributions.

In general,  $Z$  may have both 0- and 1-dimensional components. Letting  $U$  be the maximal 0-dimensional subsheaf of  $\mathcal{O}_Z$ , we obtain the exact sequence

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

where  $C$  is a pure 1-dimensional scheme (a Cohen–Macaulay curve).

We made a complete classification of codimension one degree 2 distributions on  $\mathbb{P}^3$  in terms of some invariants, called the Chern classes of the tangent sheaf  $T_D$ . This classification is achieved using different techniques, such as stability, and for example, relations between the Chern classes and invariants of the curve  $C$ . We use for example the equations:

$$c_1(T_D) = 2-d, \quad c_2(T_D) = d^2+2-d \deg(C), \quad c_3(T_D) = d^3+2d^2+2d-\deg(C)(3d-2)+2p_a(C)-2.$$

We also described some moduli spaces of these distributions.

### **Simetría Áurea Prima: un álgebra dorada de Lie**

Javier Grisales Herrera



XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Universidad del Tolima  
jgrisalesher@ut.edu.co

En este trabajo de investigación titulado *Simetría Áurea Prima*, se demuestra la relación matemática inédita descubierta por el autor acerca de la existencia de una relación de equivalencia sobre el conjunto infinito de los números primos. Esto es, la proporción áurea induce una partición en 8 clases primas de equivalencia correspondientes a 8 ángulos invariantes de rotación o isometrías de 2 pentágonos opuestos en el plano complejo. Además, cuando se ordenan en matrices forman un grupo de rotación de Lie. Las clases primas en el plano complejo corresponden a los ceros del polinomio ciclotómico número 20.

### Conteo de enteros representables como imagen de un polinomio módulo $n$

Jerson Borja  
Universidad de Córdoba  
jersonborjas@correo.unicordoba.edu.co

Si  $f(x_1, \dots, x_t)$  es un polinomio en  $t$  variables con coeficientes enteros y  $n$  es un entero positivo, definimos un conjunto  $A_n$  formado por los elementos  $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tales que la congruencia

$$f(x_1, \dots, x_t) \equiv a \pmod{n}$$

tiene solución. Si definimos  $\alpha(n)$  como la cardinalidad del conjunto  $A_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $\alpha$  es una función multiplicativa. De esta forma, para determinar  $\alpha(n)$ , para todo  $n$ , basta con determinar  $\alpha(p^n)$ , para todo primo  $p$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Este problema ha sido resuelto para polinomios específicos como  $x^3 + y^3$  por Broughan [3], para  $x^2 + y^2$  por Burns [4], siguiendo el trabajo de Harrington, Jones y Lamarche [5]; y para polinomios como  $x^2 + y^2 + z^2$  y polinomios de la forma  $x^k + y^k$ , por Anaya, Arias, Borja y Rubio [1,2].

En este trabajo generalizamos los resultados de [1,2] que definen un método para calcular la función  $\alpha$  asociada a polinomios de características bastante generales que incluye, entre otros polinomios, a las formas diagonales  $c_1x_1^{k_1} + \dots + c_t x_t^{k_t}$ , y también permite entender los conjuntos  $A_n$  asociados a estos polinomios. Luego mostraremos cómo el conocimiento de los conjuntos  $A_n$  nos ayuda a obtener información del problema (no modular) de representar



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

enteros en la forma de polinomios específicos, como  $x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^4$ ,  $x^4 + y^4$ , etc., encontrando condiciones necesarias para que un entero sea representable en estas formas.

### **Exact weights and path metrics for triangulated categories and the derived category of persistence modules**

Jose Alberto Vélez Marulanda

Valdosta State University / Fundación Universitaria Konrad Lorenz

javelezmarulanda@valdosta.edu

We define exact weights on a pretriangulated category to be nonnegative functions on objects satisfying a subadditivity condition with respect to distinguished triangles. Such weights induce a metric on objects in the category, which we call a path metric. Our exact weights generalize the rank functions of J. Chuang and A. Lazarev for triangulated categories and are analogous to the exact weights for an exact category given by the first author and J. Scott and D. Stanley. We show that (co)homological functors from a triangulated category to an abelian category with an additive weight induce an exact weight on the triangulated category. We prove that triangle equivalences induce an isometry for the path metrics induced by cohomological functors. In the perfectly generated or compactly generated case, we use Brown representability to express the exact weight on the triangulated category. We give three characterizations of exactness for a weight on a pretriangulated category and show that they are equivalent. We also define Wasserstein distances for triangulated categories. Finally, we apply our work to derived categories of persistence modules and to representations of continuous quivers of type

### **Módulos de Verma imaginarios y bases de cristal**

Juan Camilo Arias Uribe

Universidad del Rosario

juancamil.arias@urosario.edu.co

Los módulos de Verma aparecen como una herramienta fundamental en la comprensión de las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie semisimple. Estos son módulos de dimensión infinita los cuales son indescomponibles y, en caso de no ser irreducibles, permiten



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

encontrar las representaciones irreducibles de dimensión finita como un cociente de ellos. Dada su importancia y potencial uso en la construcción de representaciones irreducibles e indescomponibles, la construcción de los módulos de Verma se generaliza para toda álgebra de Lie de Kac–Moody y permite el estudio de representaciones más generales, llamadas representaciones de pesos máximos.

La construcción de los módulos de Verma está íntimamente relacionada con la elección del sistema de raíces del álgebra de Lie y sus particiones cerradas. En el caso semisimple, todas estas particiones son conjugadas bajo la acción del grupo de Weyl, pero en el caso afín existe un número finito (estrictamente mayor que 1) de órbitas del conjunto de particiones cerradas del sistema de raíces bajo la acción del grupo de Weyl. Ellas están parametrizadas por subconjuntos de las raíces simples, y cada uno de estos subconjuntos nos permite construir módulos tipo Verma para el álgebra afín y así encontrar nuevas familias de módulos irreducibles. Entre estas familias, una de amplio estudio es la familia de los llamados módulos de Verma imaginarios, los cuales buscaremos introducir en esta charla.

Además de construir módulos de Verma en el caso clásico, estos también los podemos construir para el estudio de las representaciones de grupos cuánticos, en particular, para entender las representaciones asociadas al álgebra envolvente cuantizada de un álgebra de Lie. En este caso, la teoría de representaciones depende de un parámetro el cual nos brinda más simetrías de los módulos y por tanto ayuda en el entendimiento de los mismos. En particular, mediante el uso de grupos cuánticos, es posible construir bases para los módulos de Verma, tanto clásicos como cuánticos, que no dependen de elecciones arbitrarias y en las cuales las acciones de los generadores del álgebra de Lie es tan simple como es posible.

Estas bases reciben el nombre de bases de cristal o canónicas, y fueron introducidas de manera independiente por M. Kashiwara y por G. Lusztig para módulos de Verma y representaciones integrables de pesos máximos asociados a la partición estándar del sistema de raíces del álgebra de Lie. En el caso de particiones no conjugadas a la partición estándar, el estudio de bases de cristal inició en los trabajos de B. Cox, V. Futorny y C. Misra donde ellos construyeron dichas bases para módulos imaginarios del álgebra de Lie afín espacial lineal.

En esta charla, se presentará la construcción de bases de cristal para módulos de Verma imaginarios asociados a cualquier álgebra de Lie afín no torcida. Además de esto, se presentará la construcción de una categoría semisimple en la cual los módulos imaginarios son los objetos simples y mostraremos que las bases de cristal existen en esta categoría. Finalmente,



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

se presentarán algunas observaciones en el caso torcido.

**Representaciones indescomponibles para algunos conjuntos parcialmente ordenados uno paramétricos**

Juan Camilo Buitrago Cruz  
Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
jbuitragocr@unal.edu.co

A partir del resultado ya conocido para el caso de cuatro puntos mutuamente incomparables, procederemos de forma matricial y obtendremos la clasificación de todas las representaciones indescomponibles para los conjuntos ordenados obtenidos al añadir sucesivamente uno, dos y tres puntos maximales. Estos tres conjuntos ordenados son sinceros, de tipo manso y uno paramétricos. En esta charla mostraremos cómo obtener la clasificación de las representaciones indescomponibles para el conjunto ordenado correspondiente al primer paso de este proceso.

**Sobre la transformación lineal de Coxeter del Carcaj-AR de posets equipados de tipo finito**

Juan David Aguilar Díaz  
Universidad Nacional de Colombia  
jaguillard@unal.edu.co

Este trabajo analiza la transformación de Coxeter en el carcaj de Auslander-Reiten de posets 2-equipados de tipo finito, enfocándose en su cálculo mediante reflexiones en los vértices del poset. Se considera el caso en el que el álgebra de incidencia del poset es hereditaria, lo que permite expresar la transformación de Coxeter a partir de la matriz de Cartan y la forma cuadrática de Tits.

Los posets 2-equipados generan categorías de corepresentaciones aditivas y de Krull-Schmidt, con una cantidad finita de representaciones indescomponibles. Cada una de estas tiene un vector dimensión asociado, cuyas coordenadas se emplean en la construcción de la transformación de Coxeter. La forma cuadrática de Tits del poset define una forma bilineal simétrica, utilizada para determinar reflexiones en cada vértice del poset.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Se prueba que la matriz de Coxeter se obtiene como el producto de estas reflexiones respecto a las raíces simples del poset. Para ilustrar el resultado, se presentan ejemplos concretos, incluyendo los posets equipados  $B'_2$ ,  $B''_3$  y  $B''_4$ , donde se verifica la coincidencia entre la composición de reflexiones y la matriz de Coxeter.

Finalmente, se plantean preguntas abiertas sobre la relación entre el grupo generado por estas reflexiones y los grupos de reflexión de Weyl, así como sobre el papel del elemento de Coxeter en una posible generalización.

### Anillos $\epsilon$ -fuertemente graduados que son álgebras de Azumaya

Juan David Rueda Centeno

Universidad Industrial de Santander

judaruce@hotmail.com

A grandes rasgos, un anillo  $R$  es graduado por un grupo  $G$  si puede descomponerse de forma única en subgrupos aditivos, indexados por los elementos de  $G$ , de modo que la suma directa de estos subgrupos sea  $R$ . Entre este tipo de anillos, destacan los anillos fuertemente graduados y en 2018, los matemáticos P. Nystedt, J. Öinert y H. Pinedo generalizaron este concepto al introducir la clase de los anillos  $\epsilon$ -fuertemente graduados.

En esta charla, nos basaremos en los trabajos [1] y [3] para presentar la definición y las propiedades más importantes de los anillos  $\epsilon$ -fuertemente graduados, junto con algunos ejemplos. Mostraremos que estas propiedades nos permitirán definir cierta acción parcial  $\gamma$ . Posteriormente, explicaremos el concepto de álgebra de Azumaya, y para finalizar, con la ayuda de  $\gamma$  estableceremos una condición suficiente para que los anillos  $\epsilon$ -fuertemente graduados sean álgebras de Azumaya.

### Simulaciones de la transmisión de datos con códigos lineales binarios

Juan Fernando Mafla Ramírez

Universidad de Nariño

maflajuanfernando@gmail.com

Catalina M. Rúa-Alvarez

Universidad de Nariño



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

La transmisión de información en un canal ruidoso puede cambiar un mensaje que esté siendo transmitido. El objetivo de la teoría de códigos consiste en garantizar la integridad de los mensajes que se envíen. En este trabajo se presentan conceptos de teoría de códigos correctores como son: distancia de Hamming, código lineal y capacidades de detección y corrección de errores. En particular, se realiza un estudio de la decodificación por síndrome, el cual es un método utilizado en la detección y corrección de errores a través de los líderes de clase de un código lineal. En esta charla se presentan simulaciones de esos procesos con textos e imágenes en blanco y negro, escala de grises y a color con ayuda del software de álgebra computacional SageMath. Este es un trabajo conjunto con John H. Castillo (UDENAR).

### **SOBRE LAS ÁLGEBRAS DE SKLYANIN Y SUS BASES DE GRÖBNER-SHIRSHOV**

Karol Stefany Herrera Cano

Universidad ECCI

kherrerac@ecc.edu

Las álgebras de Sklyanin son una clase importante de álgebras cuadráticas no conmutativas que deben su nombre a Evgeny Sklyanin. Estas álgebras surgieron en la década de 1980 durante la clasificación de las álgebras regulares de Artin–Schelter de dimensión global 3. Las álgebras de Sklyanin se dividen en dos tipos principales: las no degeneradas y las degeneradas, que presentan propiedades geométricas y algebraicas significativamente distintas. Por otra parte, las bases de Gröbner–Shirshov son una generalización de las bases de Gröbner clásicas para álgebras no conmutativas. Este concepto fue desarrollado de manera independiente por Shirshov en el contexto de álgebras de Lie y por Buchberger para álgebras conmutativas. El objetivo de esta charla es revisar algunos resultados presentes en la literatura sobre las álgebras de Sklyanin, con el fin de identificar familias de estas álgebras que sean PBW (es decir, que admitan una base PBW) y otras que no lo sean, y mostrar sus respectivas bases de Gröbner–Shirshov.

### **El multiplicador parcial de Schur**

Natalia Isabel Pérez Niño

Universidad Industrial de Santander



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

natiperez36@gmail.com

Héctor Edonis Pinedo Tapia

Universidad Industrial de Santander

En la teoría de representaciones de grupos, es bien conocido que el segundo grupo de cohomología  $H^2(G, K^*)$ , llamado el multiplicador de Schur de un grupo  $G$  sobre un cuerpo  $K$ , permite caracterizar las representaciones proyectivas de  $G$ . En 2010, los matemáticos M. Dokuchaev y B. Novikov introdujeron el concepto de representación parcial proyectiva de  $G$  sobre  $K$ , con el objetivo de desarrollar una teoría de cohomología basada en acciones parciales. En dicha investigación, aparece naturalmente el concepto de conjunto factor parcial, lo que permite definir el multiplicador parcial de Schur, denotado por  $\text{pM}(G)$ , el cual generaliza al multiplicador de Schur clásico.

En esta charla, empezaremos con un breve resumen de las propiedades estructurales de  $\text{pM}(G)$ . Mostraremos que  $\text{pM}(G)$  no es un grupo, pero sí un semigrupo inverso conmutativo y por lo tanto, puede descomponerse como una unión disjunta de grupos abelianos, llamados componentes. También veremos que, cuando el cuerpo  $K$  es algebraicamente cerrado, cada componente es una imagen homomorfa de la componente  $\text{pM}_{G \times G}(G)$ , conocida como la componente total.

Una vez establecidos los fundamentos teóricos conocidos, presentaremos algunos avances de nuestro trabajo actual. Dado que  $\mathbb{C}^*$  visto como un grupo multiplicativo posee propiedades interesantes, como por ejemplo ser un grupo divisible isomorfo a un subgrupo propio, nos enfocaremos en analizar el comportamiento de cada componente de  $\text{pM}(G)$  cuando el cuerpo algebraicamente cerrado es  $\mathbb{C}$ . Definiremos una topología en cada componente de tal forma que sea un grupo topológico compacto divisible y usando la caracterización presentada en el artículo [4], obtendremos una descripción más detallada de estos grupos abelianos.

### **Racks y Quandles: Teoría de representaciones y su relación con grupos y la ecuación de Yang–Baxter**

Ricardo Esteban Vallejos Cifuentes

Universidad de Antioquia

ricardo.vallejos@udea.edu.co

Los racks y quandles son estructuras algebraicas que surgieron en el estudio de la teoría



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

de nudos, introducidas por David Joyce en 1980 para abordar el problema de clasificación de nudos. Desde entonces, han aparecido en diversos contextos, como en el estudio de la ecuación de Yang–Baxter, que tiene una interesante relación con ellas.

Por otro lado, las representaciones de estructuras algebraicas han demostrado ser herramientas valiosas en la solución de problemas matemáticos, siendo la teoría de representaciones de grupos finitos la más antigua y estudiada.

Recientemente, se ha comenzado a explorar la teoría de representaciones de racks. En esta ponencia, se ofrecerá una introducción a la teoría de racks, su teoría de representaciones y su relación con la ecuación de Yang–Baxter.

### **On Characterizations of Maximal Sidon Sets Via Discrete Fourier Analysis**

Rigo Julián Osorio Angulo

Universidad del Cauca

rosorio@unicauca.edu.co

Carlos Alberto Trujillo Solarte

Universidad del Cauca

In applications such as code theory and cryptography, it is important to construct functions with high nonlinearity, that is, functions that are far from behaving like linear or linear affine functions. Sidon functions, in a particular case, have perfect nonlinearity. The purpose of this work is to show some characterizations of Sidon sets and Sidon functions in finite Abelian groups noted additively, as well as characterizations of the maximality of these sets and functions through discrete Fourier analysis.

### **Criptografía Poscuántica Basada en Códigos Correctores de Errores**

Sandra Inés Manrique Guerrero

Universidad del Valle

sandra.manrique@correounivalle.edu.co

La seguridad de la información es un aspecto fundamental en el mundo digital. Actualmente, muchos sistemas criptográficos se basan en problemas matemáticos difíciles, como la factorización de números grandes o el logaritmo discreto. Sin embargo, con el avance de la



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

computación cuántica, estos problemas pueden resolverse fácilmente con algoritmos como el Algoritmo de Shor, poniendo en riesgo la seguridad de la información.

Como respuesta a este problema, surge la criptografía poscuántica, que busca desarrollar esquemas seguros ante ataques de computadores cuánticos. Dentro de las alternativas más estudiadas está la criptografía basada en códigos correctores de errores, destacándose en particular el criptosistema de McEliece.

A pesar de varios intentos de ataque, el criptosistema de McEliece sigue siendo seguro, incluso frente a los computadores cuánticos. Su única desventaja notable es el tamaño grande de las claves, lo que ha motivado investigaciones para optimizar su uso. Aun así, su seguridad lo ha llevado a ser finalista en el proceso de estandarización de criptografía poscuántica del NIST.

Un aspecto importante de este sistema es que, a diferencia de otros esquemas basados en problemas matemáticos como la factorización o los logaritmos discretos, no se conocen algoritmos cuánticos eficientes que puedan romperlo. Esto lo convierte en una opción muy atractiva para la protección de información a largo plazo.

El criptosistema de McEliece es una opción fuerte para la criptografía poscuántica debido a su resistencia a ataques conocidos, incluidos los cuánticos. Su seguridad se basa en la dificultad de decodificar códigos lineales aleatorios, un problema que no ha sido resuelto por algoritmos cuánticos.

El principal desafío es reducir el tamaño de las claves sin comprometer la seguridad. Se están explorando variantes con códigos alternativos y mejoras en la implementación para hacer su uso más eficiente. También se están investigando optimizaciones en hardware y software para mejorar su desempeño en la práctica.

En esta charla, exploraremos los fundamentos del criptosistema de McEliece, su funcionamiento y los principios matemáticos que lo sustentan. Presentaremos la implementación del criptosistema de McEliece en su versión original, basada en códigos clásicos de Goppa. Además, mostraremos algunas rutinas para su implementación utilizando el software matemático SageMath y destacaremos los desafíos actuales de investigación en este campo.

## **Noncommutative algebraic geometry in the small: associated and attached prime ideals**

Sebastián David Higuera Rincón



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

sdhiguerar@unal.edu.co

The theory of primary decomposition and the associated prime ideals are very important in commutative algebraic geometry. They help us understand the structure of modules and ideals in commutative polynomial rings and algebraic varieties. These concepts are widely used in areas such as computational algebra and invariant theory. In noncommutative algebra, these notions extend to skew polynomial rings, annihilators, and prime and coprime modules, providing essential tools for studying the structure of modules.

If  $R$  is an arbitrary ring and  $N_R$  is a right module, then we say that  $N_R$  is prime if  $\text{ann}(N_R) = \text{ann}(N'_R)$  for every submodule  $N'_R$  of  $N_R$ , where  $\text{ann}(N_R)$  denotes the right annihilator of  $N_R$ . A right ideal  $\mathfrak{p}$  of  $R$  is called an associated prime of a right module  $M_R$  if there exists a prime submodule  $N_R \subseteq M_R$  such that  $\mathfrak{p} = \text{ann}(N_R)$ . The set of all associated prime ideals of  $M_R$  is denoted by  $\text{Ass}(M_R)$ .

One of the most important results concerning these ideals was proved by Brewer and Heinzer [?], who showed that if  $R$  is a commutative ring, then the associated prime ideals of the commutative polynomial ring  $R[x]$  are all extended. That is, every  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R[x])$  may be expressed as  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}[x]$ , where  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap R \in \text{Ass}(R)$ . Annin [?] extended this result to the noncommutative framework of skew polynomial rings  $R[x; \sigma, \delta]$ , as introduced by Ore [?]. Leroy and Matczuk [?] further explored these ideals over compatible rings. Ouyang and Birkenmeier [?] introduced the weak annihilator and nilpotent associated prime ideals as generalizations of right annihilators and associated primes, providing a characterization of these ideals for skew polynomial rings.

Macdonald [?] introduced a dual concept to primary decomposition, known as secondary representation, in which the main ideals are called attached. He developed this idea due to the importance of primary decomposition theory and its connection to associated prime ideals. Annin [?] extended this work and presented the following definitions: A right module  $N_R$  is called coprime if  $\text{ann}(N_R) = \text{ann}(Q_R)$  for every nonzero quotient module  $Q_R$  of  $N_R$ . An ideal  $\mathfrak{p}$  of  $R$  is called attached to  $M_R$  if there exists a coprime quotient module  $Q_R$  of  $M_R$  such that  $\mathfrak{p} = \text{ann}(Q_R)$ . The set of all attached prime ideals of  $M_R$  is denoted by  $\text{Att}(M_R)$ .

Annin [?] studied these ideals over inverse polynomial modules over noncommutative rings and proved that if  $\mathfrak{q} \in \text{Att}(M[x^{-1}]S)$ , then  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[x]$ , where  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(M_R)$ ,  $S = R[x; \sigma]$ , and  $M[x^{-1}]R$  is a completely  $\sigma$ -compatible module.

In this talk, we present some results obtained by Higuera and Reyes [?] for skew PBW



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

extensions over NI rings, which generalize those presented by Ouyang and Birkenmeier. Additionally, we introduce some results on attached ideals of inverse polynomial modules over skew Ore polynomial rings, which were also published by the same authors.

### Álgebra de caminos composicionales en hipergrafos

Sergio Quiroga Sandoval

Universidad Nacional de Colombia

squirogas@unal.edu.co

Ivon Andrea Dorado

Universidad Nacional de Colombia

El objetivo principal de la ponencia es presentar un método para construir álgebras a partir de hipergrafos dirigidos, extendiendo el enfoque clásico de las álgebras de caminos en carcajes. En lugar de formar caminos mediante la concatenación de aristas, el método se basa en la composición de hiper-aristas. Para ello, se introduce una familia de operadores que extiende la composición clásica de relaciones binarias a relaciones  $n$ -arias, cuyo resultado es la construcción de una estructura algebraica denominada álgebra de caminos composicionales sobre un hipergrafo  $H$ .

La ponencia se inserta en el contexto de la ciencia de altas aridades, un programa de investigación transdisciplinario que busca ampliar formalismos tradicionales —como el álgebra relacional, la teoría de categorías y la teoría de redes— para abordar sistemas de orden superior. Recientes avances en teoría de categorías superiores, operads, opetopes, álgebra hipercomposicional e hiperestructuras han subrayado la relevancia de investigar interacciones de mayor aridad. Este paradigma posibilita la formulación de nociones no secuenciales de operaciones y transformaciones, revelando patrones emergentes y propiedades irreducibles en sistemas multidimensionales.

La primera parte de la charla se dedica a los conceptos preliminares. En esta sección se revisan las relaciones binarias y su representación en grafos simples dirigidos, la definición de carcajes y la construcción del álgebra de caminos clásica mediante la concatenación de aristas. Asimismo, se introduce la noción de clausura transitiva de un grafo, la cual codifica la información de accesibilidad entre vértices.

Posteriormente, se aborda la transición de la concatenación a la composición de relaciones. Se define una familia de operadores de composición para relaciones  $n$ -arias, denominados



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

$(n, m)$ -composiciones, basados en la selección de vértices internos de cada tupla. Dichos operadores conservan los vértices externos (el primero y el último) y eliminan el vértice compartido en la composición, lo que permite que el resultado mantenga las propiedades esenciales observadas en el contexto binario. Se ilustran ejemplos que abarcan tanto composiciones asociativas como no asociativas, y se examinan casos en los que la composición incrementa la aridad y, por ende, impide la composición en cadena. Para superar este obstáculo, se introducen los operadores  $\Delta_{n,m}^{(i_k), (j_{k'})}$ , que permiten aumentar la aridad de las tuplas y continuar componiéndolas.

La siguiente sección se centra en la construcción del álgebra de caminos composicionales sobre hipergrafos (o hiper-carcajes). Utilizando la familia de operadores previamente definidos, se genera de forma recursiva el conjunto de caminos composicionales, estableciéndose una analogía con la definición de clausura transitiva en grafos. Entre los ejemplos destacados se incluye la demostración de que, para un hipergrafo particular y una operación fija, el álgebra de caminos composicionales es isomorfa al álgebra de polinomios. Adicionalmente, se presentan aplicaciones del método a álgebras de matrices triangulares y a casos no asociativos, evidenciando la versatilidad y aplicabilidad del enfoque.

Finalmente, la ponencia concluye con una discusión sobre las líneas de trabajo futuro. Entre los objetivos propuestos se encuentran la clasificación de las condiciones iniciales y operacionales bajo las cuales las álgebras de caminos composicionales son asociativas, la generación de álgebras no asociativas de dimensión finita y el estudio del alcance de las estructuras algebraicas que pueden derivarse mediante estas operaciones. Este trabajo ofrece un marco algebraico formal que aporta herramientas para el estudio de estructuras algebraicas complejas y abre nuevas perspectivas de investigación en el campo de la ciencia de altas aridades.

### **Estructuras algebraicas de color y operadores lineales pares**

Wilson Arley Martínez Flor

Universidad del Cauca

wamartinez@unicauca.edu.co

Daniel Alejandro Vargas Uzuriaga

Universidad del Cauca

Las álgebras de color han surgido como una generalización natural de las álgebras de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Lie, de Leibniz y pre-Lie, integrando una graduación que brinda una caracterización de las operaciones algebraicas y permite modelar simetrías extendidas en contextos donde las estructuras convencionales resultan insuficientes. En este trabajo se estudia la construcción de nuevas estructuras algebraicas de color mediante la aplicación de operadores lineales pares, tales como los operadores de Rota–Baxter, Nijenhuis, promediados y derivaciones. Estas herramientas permiten deformar y generar álgebras de color simétricas a izquierda, álgebras de color de Lie y álgebras de color de Leibniz, extendiendo propiedades clásicas –como la antisimetría y la identidad de Jacobi– al contexto graduado. Se presentan resultados teóricos que establecen condiciones para la obtención de dichas estructuras y se ilustran mediante ejemplos computacionales, abriendo nuevas perspectivas en áreas como la mecánica cuántica, la teoría de deformaciones y la geometría diferencial.

### **Códigos Castillo torcidos para criptografía poscuántica**

Wilson Olaya León

Universidad Industrial de Santander

wolaya@uis.edu.co

### **Resumen**

Códigos Castillo son códigos Algebraico Geométricos unipuntuales construidos sobre una curva Castillo [1]. Esta familia contiene algunos de los más importantes códigos algebraico geométricos más estudiados hasta la fecha. La distancia mínima de estos códigos puede ser acotada utilizando la cota de orden, cuya principal herramienta son los pares bien comportados [2].

En esta charla presentamos una nueva familia de códigos llamada códigos Castillo torcidos, que están basados en códigos Castillo y fueron inspirados por la construcción de códigos Hermitianos torcidos dada en [3]. La característica principal de esta nueva construcción es que el cuadrado Schur de estos códigos torcidos es más grande que el de los códigos no torcidos. En particular, identificamos subfamilias de estos nuevos códigos que tienen dimensión de cuadrado Schur cercana a la esperada de un código lineal aleatorio. Esta característica es necesaria para resistir el ataque de distinguir por cuadrado Schur cuando se utilizan códigos AG en el criptosistema McEliece (criptografía basada en códigos). Este criptosistema se cree que es resistente a ataques desde



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

un computador cuántico, pues es uno de los candidatos para la estandarización de criptografía postcuántica [4].

Palabras claves: Códigos AG, códigos Castillo, cuadrado Schur, criptosistema McE-lice, criptografía poscuántica.

### Referencias

- [1] Munuera, C., Torres, F. and Sepúlveda, A. (2008). *Algebraic Geometry codes from Castle curves*, Coding Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin, LNCS 5228, 117–127.
- [2] Olaya-León, W. and Munuera, C. (2013). *On the minimum distance of Castle codes*, Finite Fields and Applications, 20, 55–63.
- [3] Allent, A., Blackwell, K., Fiol, O., Kshirsagar, R., Matsick, B., Matthews, G. and Nelson, Z. (2021). *Twisted Hermitian Codes*, Trans. Amer. Math. Soc., 43, 377–385.
- [4] NIST (2022). *National Institute of Standards and Technology*, <https://csrc.nist.gov/Projects/post-quantum-cryptography>.

“

## 2.2. Análisis Real

### Fórmulas explícitas en la teoría de números y el análisis real con aplicaciones

Daniel Eduardo Cárdenas Romero  
Universidad Nacional Autónoma de México  
decardenas@matmor.unam.mx

En la teoría analítica de números se estudia una serie de fórmulas que relacionan los ceros de funciones de variable compleja, como la función zeta de Riemann, y conjuntos de números enteros que tienen algún comportamiento especial, como los números primos. Para hacer una prueba del Teorema de los Números primos se demostró que si la función zeta de Riemann no se anula en una recta del plano complejo y en ese proceso se usó una fórmula explícita que terminó con una de las primeras demostraciones de este teorema. En mi doctorado hemos



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

consultado varias fórmulas explícitas desde la de Riemann-von Mangoldt hasta la de Landau, y se desarrollaron dos artículos donde exploramos una dualidad en el contexto de los números primos en la recta real y los ceros de la función zeta de Riemann sobre la recta crítica. Todo esto fue hecho por medio de métodos del análisis real como el uso del análisis asintótico de funciones y el análisis armónico.

### **Sobre un problema, propuesto por Pellegrino y Teixeira, tocante a la desigualdad de Bohnenblust–Hille**

Daniel Núñez Alarcón  
Universidad Nacional de Colombia  
dnuneza@unal.edu.co

La desigualdad de Bohnenblust–Hille para formas multilineales se publicó en 1931 en la revista *Annals of Mathematics*. Actualmente, sabemos que es un ejemplo particular de una familia de desigualdades anisotrópicas que abarca, por ejemplo, las desigualdades mixtas de Littlewood y Hardy–Littlewood. El crecimiento asintótico de las constantes involucradas en estas desigualdades, en el caso de escalares reales, desempeña un papel crucial para diversas aplicaciones en diferentes campos, como la Teoría de la Información Cuántica y Ciencias de la Computación. En esta charla, demostramos que las constantes de las desigualdades anisotrópicas  $m$ -lineales de Bohnenblust–Hille para escalares reales tienen crecimiento subexponencial si, y solo si, la secuencia de exponentes asociados es equivalente (en un sentido que quedará claro durante la charla) a los exponentes clásicos  $(\frac{2m}{m+1}, \dots, \frac{2m}{m+1})_{m=1}^{\infty}$ . En particular, esto resuelve un problema propuesto por D. Pellegrino y E. Teixeira en 2018.

### **Entropy numbers on complex spheres**

Deimer José Julio Aleans  
Universidade Federal do Amazonas – Brasil  
deimeraleans@ufam.edu.br  
Sergio Antonio Tozoni  
Universidade Estadual de Campinas – Brasil

In this work we investigate the asymptotic behavior of entropy numbers of multiplier



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

operators  $\Lambda^*$  and  $\Lambda$ , defined for functions on the complex sphere  $\Omega^d$  of  $\mathbb{C}^d$ , associated with sequences of multipliers of the type  $\{\lambda_{m,n}^*\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda_{m,n}^* = \lambda(m+n)$  and  $\{\lambda_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda_{m,n} = \lambda(\max\{m, n\})$ , respectively, for a bounded function  $\lambda$  defined on  $[0, \infty)$ . If the operators  $\Lambda^*$  and  $\Lambda$  are bounded from  $L^p(\Omega^d)$  into  $L^q(\Omega^d)$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ , and  $U_p$  is the closed unit ball of  $L^p(\Omega^d)$ , we study lower and upper estimates for the entropy numbers of the sets  $\Lambda^*U_p$  and  $\Lambda U_p$  in  $L^q(\Omega^d)$ . As application we obtain, in particular, estimates for the entropy numbers of classes of Sobolev, of finitely differentiable, infinitely differentiable and analytic functions on the complex sphere, in  $L^q(\Omega^d)$ , which are order sharp in several important situations.

### Las mejores constantes en la desigualdad 4/3 de Littlewood

Diana Marcela Serrano Rodríguez  
Universidad Nacional de Colombia  
diserranor@unal.edu.co

Sea  $\mathbb{K}$  el cuerpo de escalares  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , y  $c_0 := c_0(\mathbb{K})$  el espacio de Banach de sucesiones que convergen a cero. Por convención, cuando  $s = \infty$ , el valor  $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^s$  representa el supremo de los valores  $|x_j|$ . También definimos  $1/0 = \infty$  y  $1/\infty = 0$ , y para  $s \geq 1$  denotamos por  $s^*$  el índice conjugado de  $s$ , de modo que  $1/s + 1/s^* = 1$ . Finalmente, denotamos la sucesión de vectores canónicos de  $c_0$  por  $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ .

La desigualdad anisotrópica 4/3 inequality (véase [?, Theorem 1.1]) es una extensión de un resultado famoso obtenido en 1930 por J. E. Littlewood [?]. Esta afirma que dados  $a, b \in (0, \infty)$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe una constante  $C_{a,b}^{\mathbb{R}} \geq 1$  tal que

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |A(e_i, e_j)|^a \right)^{b/a} \right)^{1/b} \leq C_{a,b}^{\mathbb{R}} \|A\|,$$

para toda forma bilineal continua  $A: c_0 \times c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Los valores  $a, b$  satisfacen  $a, b \geq 1$  y  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$ .

Diversos autores han obtenido los valores óptimos de  $C_{a,b}^{\mathbb{R}}$  para varias duplas  $(a, b)$  (véase [?, Theorem 6.3]).



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En esta charla daremos la lista completa de los valores óptimos de  $C_{a,b}^{\mathbb{R}}$ . Además, daremos nuevas estimativas para  $C_{a,b}^{\mathbb{C}}$  (el análogo para formas  $\mathbb{C}$ -bilineales continuas), las cuales mostraremos que son exactas para varias duplas  $(a, b)$ . Este trabajo se basa en una colaboración conjunta con Nicolás Caro Montoya y Daniel Núñez Alarcón.

### **Aproximación de funciones reales positivas mediante series multiplicativas de Jacobi-Fourier**

Edinson Fuentes

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

edinson.fuentes@uptc.edu.co

En esta charla se presenta un método para la aproximación de funciones reales positivas mediante series multiplicativas de Jacobi-Fourier. Para ello, se introduce primero la familia de polinomios de Jacobi multiplicativos, los cuales surgen como solución de una ecuación multiplicativa de Sturm–Liouville. Luego, se presentan algunas propiedades algebraicas y analíticas de estos polinomios, incluyendo resultados sobre la convergencia de las series multiplicativas de Jacobi-Fourier. Finalmente, se analizan las diferencias y ventajas de utilizar series multiplicativas de Jacobi-Fourier en comparación con las series clásicas. Estos aspectos se ilustran con ejemplos numéricos, y los resultados pueden consultarse en [10].

### **Elementos de una Geometría y un Análisis sin puntos**

Francisco Vargas

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

francisco.vargas03@uptc.edu.co

Hoy en día, tendemos mayoritariamente a identificar la idea del continuo con la construcción de los números reales, entendidos geoméricamente como los puntos de una recta. Esta es la visión hoy tradicional de la Geometría y el Análisis. Se presentará un modelo para el continuo que parte de las ideas de C.S. Peirce, que prescinde de la idea de “punto” como componente indivisible y última de los espacios de distintas dimensiones. Esto permite reconstruir las nociones básicas de la geometría y el cálculo desde una perspectiva infinitesimal en un enfoque alternativo, por ejemplo, al del análisis no-estándar.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Sistema dinámico de una función racional (2,2) p-ádica**

Jeanneth Galeano  
Universidad Nacional de Colombia  
jgaleanop@unal.edu.co  
Oscar Francisco Casas  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

En este trabajo estudiamos el sistema dinámico generado por la función racional (2,2) definida por

$$f(x) = \frac{ax^2}{1-x^2},$$

donde  $a, x$  están en el campo de los números  $p$ -ádicos, la cual tiene tres puntos fijos diferentes. El comportamiento de estos puntos depende de dos parámetros,  $p$  y  $a$ . Encontramos estas condiciones, así como las cuencas de atracción y discos de Siegel.

### **Soluciones radiales a ecuaciones pseudo-diferenciales p-ádicas**

Oscar Francisco Casas Sánchez  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
oscar.casas01@uptc.edu.co  
Jeanneth Galeano-Peñaloza  
Universidad Nacional de Colombia

En la charla se mostrará el estudio de la ecuación pseudo-diferencial asociada al símbolo

$$A_{d_1, d_2}^\alpha(x) = \max\{|x|_p^{d_1}, |x|_p^{d_2}\}^\alpha,$$

actuando sobre una función radial  $\varphi(|x|_p)$ . La importancia de este símbolo es que el operador pseudo-diferencial asociado generaliza los operadores de Vladimirov y de Bessel.

## **2.3. Combinatoria**

### **Matroides orientadas valuadas y espacios lineales tropicales reales**

Andrés Molina Giraldo



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Universidad de los Andes  
a.molinag@uniandes.edu.co  
Johannes Rau  
Universidad de los Andes

We intend to give a correspondence between matroids over the hyperfield  $\mathbb{ST}$  with tropical linear spaces with an additional structure, called a real phase structure. This correspondence is compatible and generalizes previous bijection between linear tropical fans and matroids, real matroid fans and oriented matroids, and tropical linear spaces with valuated matroids.

### **Percolación Bootstrap Anisotrópica**

Daniel Ricardo Blanquicett Tordecilla  
Universidad Nacional de Colombia - Sede La Paz  
dablanquicett@unal.edu.co

Consider a  $p$ -random subset  $A$  of initially infected vertices in the discrete cube  $[L]^3$ , and assume that the neighborhood of each vertex consists of the  $a_i$  nearest neighbors in the  $\pm e_i$ -directions for each  $i \in \{1, 2, 3\}$ , where  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ . Suppose we infect any healthy vertex  $x \in [L]^3$  already having  $a_3 + 1$  infected neighbors, and that infected sites remain infected forever. In this paper, we determine the critical length for percolation up to a constant factor in the exponent, for all triples  $(a_1, a_2, a_3)$ . To do so, we introduce a new algorithm called the beams process and prove an exponential decay property for a family of subcritical two-dimensional bootstrap processes.

### **Enumeración de teselaciones coloreadas en grafos**

Diego Villamizar  
Xavier University of Louisiana  
dvillami@xula.edu  
Jose L. Ramírez  
Universidad Nacional de Colombia

En esta charla presentaremos el problema de particionar un grafo en componentes co-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

nexas coloreadas llamadas bloques. Usando funciones generatrices y técnicas enumerativas, determinamos el número esperado de bloques cuando se colorean los vértices de un grafo  $G$  (para ciertas familias de grafos) de forma independiente y uniforme. Este problema generaliza, en cierta medida, el problema de enumerar las teselaciones coloreadas de una grilla usando polinomios coloreados.

### **On the $\alpha$ -adjacency matrix and $\alpha$ -adjacency Estrada index for mixed graphs**

Eber Javier Lenes Puello

Universidad del Sinú, Seccional Cartagena

[eber.lenes@unisinu.edu.co](mailto:eber.lenes@unisinu.edu.co)

Enide Andrade

Universidad de Aveiro, Portugal

Let  $\hat{G}$  be a mixed graph and  $\alpha \in [0, 1]$ . Let  $\hat{D}(\hat{G})$  and  $\hat{A}(\hat{G})$  be the diagonal matrix of vertex degrees and the mixed adjacency matrix of  $\hat{G}$ , respectively. The  $\alpha$ -mixed adjacency matrix of  $\hat{G}$  is the matrix

$$\hat{A}_\alpha(\hat{G}) = \alpha \hat{D}(\hat{G}) + (1 - \alpha) \hat{A}(\hat{G}).$$

We study some properties of  $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$  for quasi-bipartite and pre-bipartite mixed graphs, giving a spectral characterization for these classes. We then address the problem, proposed by Nikiforov, of finding the smallest  $\alpha$  for which  $\hat{A}_\alpha(\hat{G})$  is positive semi-definite, proving it is at most  $\frac{1}{2}$  and equals  $\frac{1}{2}$  precisely when  $\hat{G}$  is quasi-bipartite. We also derive bounds for the spread and for the  $\alpha$ -mixed Estrada index of  $\hat{G}$ .

### **Funciones multsimétricas y politopos de transporte**

Eddy Pariguan

Pontificia Universidad Javeriana

[eddypa@gmail.com](mailto:eddypa@gmail.com)

Jhoan Sebastian Sierra Vargas

Pontificia Universidad Javeriana



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Los problemas clásicos de transporte en investigación de operaciones surgen al optimizar el costo de transportar bienes desde un conjunto de fábricas a un conjunto de centros de consumo, asumiendo que la oferta total es igual a la demanda total. Los politopos de transporte tienen aplicaciones en matemáticas discretas, optimización y estadística. Este trabajo se enfoca en una subfamilia bien conocida: los politopos de dos vías. La motivación principal proviene del estudio de la regla del producto de funciones multi-simétricas elementales introducida por F. Vaccarino y su relación con los politopos de transporte. En particular, se explora cómo la regla del producto en el caso clásico y su generalización cuántica presentan una estructura subyacente de politopos de transporte.

### **Conjuntos Co-Sidon Maximales**

Edward Felipe Fernández Luna  
Universidad del Cauca  
edwardfer@unicauca.edu.co  
Carlos Andrés Martos Ojeda  
I. E. La Pamba

Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de números enteros, se dice que  $A$  y  $B$  son conjuntos co-Sidon si las sumas de un elemento de  $A$  con un elemento de  $B$  son siempre distintas. Se ha investigado sobre las condiciones que deben cumplir  $A$  y  $B$  para que sean conjuntos co-Sidon. En [1,2] se prueban algunos resultados en este sentido. En esta ponencia vamos a considerar el problema de hallar el máximo cardinal de  $(A, B)$  contenidos en el intervalo entero  $[1, n]$  tal que  $(A, B)$  sean conjuntos co-Sidon.

### **Grafos fuertemente regulares y conjuntos diferencia**

Fernando Andrés Benavides Agredo  
Universidad de Nariño  
fandresbenavides@udenar.edu.co

En esta charla presentamos la no existencia de grafos fuertemente regulares y Dezagráficos con parámetros  $(p^m, k, 2^m, 2^m)$  con  $m = 1, 2$ . Además, como consecuencia se suministran varios parámetros para los cuales no existen conjuntos diferencia.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Sudokus y grafos: cuando el color resuelve el enigma**

Frandeiker Castro Julio  
Universidad del Atlántico  
fcastroj@mail.uniatlantico.edu.co

El Sudoku es un popular rompecabezas que consiste en completar una cuadrícula de  $9 \times 9$  con los números del 1 al 9, de modo que no se repita ningún número en la misma fila, columna ni subcuadro de  $3 \times 3$ . Aunque parece un simple juego de lógica, puede abordarse desde una perspectiva matemática rigurosa, utilizando la teoría de grafos, en particular la coloración de grafos.

La clave está en representar el Sudoku como un grafo: cada celda vacía se convierte en un vértice, y se conecta con otros vértices si pertenecen a la misma fila, columna o subcuadro. Así se construye un grafo donde cada vértice debe ser “coloreado” con un número del 1 al 9, sin repetir colores en los vértices vecinos, es decir, sin violar las restricciones del Sudoku.

Resolver un Sudoku equivale entonces a extender una coloración parcial (dada por las pistas iniciales) a una coloración propia del grafo, utilizando a lo sumo 9 colores. Además, esta conexión permite introducir conceptos matemáticos de forma accesible. La idea de que un número en una celda es en realidad un “color” y que el Sudoku es un problema de coloración hace que temas como número cromático o grafos de intersección se vuelvan más intuitivos para estudiantes o público general.

### **Un problema enumerativo sobre diagramas de barras asociados a cadenas de Pell**

Jose Efrain Aguilera Bolaños  
Universidad del Cauca  
joseaguilera@unicauca.edu.co  
Valentina Duque Paz  
Universidad del Cauca

Una cadena de Pell es una palabra sobre el alfabeto  $\{0, 1, 2\}$  que no contiene bloques máximos de 2 de longitud impar; es decir, una cadena de Pell es una palabra arbitraria sobre el alfabeto  $\{0, 1, 22\}$ . Este trabajo introduce el concepto de diagramas de Pell y grafos de Pell. Específicamente, se establecen funciones generatrices y fórmulas combinatorias para el



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

número de corners exteriores en los diagramas de Pell. También se estudia el número de vértices, el número de aristas y la sucesión de grado de los grafos de Pell.

### Generalized Pell sum graphs

Jose Luis Herrera Bravo

Universidad del Cauca

joseherrera@unicauca.edu.co

For an integer  $k \geq 2$ , let  $P^{(k)} = (P_n^{(k)})_n$  be the  $k$ -generalized Pell sequence which starts with  $0, \dots, 0, 1$  ( $k$  terms), and each term afterward is given by

$$P_n^{(k)} = 2P_{n-1}^{(k)} + P_{n-2}^{(k)} + \dots + P_{n-k}^{(k)}.$$

In this talk, we define the  $k$ -generalized Pell sum graph  $P_{k,n}$  for each integer  $n \geq 1$ . The vertices of  $P_{k,n}$  are  $1, 2, \dots, n$ , and any two vertices are adjacent when their sum is a term of  $P^{(k)}$ . Our study presents the degree of each vertex in  $P_{k,n}$  along with additional properties. Finally, we provide a recursive characterization of the connected components of each  $k$ -generalized Pell sum graph and conclude that these graphs are bipartite.

### Enumeración de Caminos del Caballo en el Plano

Jose Luis Ramírez

Universidad Nacional de Colombia

jlramirezr@unal.edu.co

Los caminos del caballo en un tablero de ajedrez han sido ampliamente estudiados en combinatoria y teoría de grafos. En esta charla, exploraremos la enumeración de ciertos caminos del caballo en el plano bajo algunas restricciones. Utilizaremos funciones generatrices y métodos de conteo directo para obtener resultados exactos y aproximaciones asintóticas, incluyendo probabilidades asociadas a la permanencia de los caminos en ciertas regiones del plano o la ordenada promedio de dichos caminos. Además, algunas de las sucesiones de conteo que encontraremos ya enumeran objetos conocidos, por lo que proporcionaremos biyecciones entre caminos del caballo y estas estructuras. Trabajo conjunto con Jean-Luc Baril, Nathanaël Hassler y Sergey Kirgizov.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Rango de Chvátal y envolvente entera de politopos paramétricos**

Juan Andrés Valero Sierra  
Universidad de los Andes  
ja.valeros@uniandes.edu.co  
Tristram Bogart  
Universidad de los Andes

El presente trabajo aborda el estudio del rango de Chvátal y la envolvente entera de politopos paramétricos, explorando su comportamiento en relación con funciones eventualmente cuasi-polinomiales (EQP). Se demuestran resultados clave, como la periodicidad del rango de Chvátal para los politopos EQP o que el punto que optimiza un funcional paramétrico en un politopo paramétrico tiene coordenadas EQP. Además, se establecen conexiones con bases de Hilbert de conos paramétricos y se proponen conjeturas sobre el comportamiento EQP del rango de Chvátal para politopos paramétricos.

### **La función suma de dígitos y los números colombianos**

Juan Gabriel Triana Laverde  
Universitaria Agustiniana  
juang.triana@uniagustiniana.edu.co

Sea  $n$  un número natural, se define  $\phi(n)$  como la suma de  $n$  y sus dígitos. Si  $m = \phi(n)$  diremos que  $n$  es generador de  $m$ , en caso de que  $m$  no tenga generadores diremos que  $m$  es colombiano. En esta presentación veremos algunas propiedades de los números colombianos, estudiaremos para determinados rangos de números cuántos con 0, 1 y 2 generadores hay, y probaremos que todo número no colombiano puede obtenerse a partir de la aplicación sucesiva de la función  $\phi$ , tomando como valor inicial un número colombiano.

### **Sobre Retículos Cuantizadores óptimos en las primeras dimensiones superiores**

Juan Miguel Velásquez Soto  
Universidad del Valle  
juan.m.velasquez@correounivalle.edu.co



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Bajo ciertas condiciones generales, un retículo en  $\mathbb{R}^n$  puede considerarse como un cuantizador vectorial; en este caso la celda de Voronoi del retículo se usa para convertir cada punto dentro de ella en un punto del retículo, obteniéndose así un conversor analógico-digital o quantizer.

Por diversas razones, interesa minimizar el error promedio cometido en este proceso; la integral de las distancias al cuadrado en la celda de Voronoi es la forma más común de medir este error. Esta es la cantidad que se quiere minimizar al variar los retículos.

El problema de hallar el retículo cuantizador óptimo solo ha sido resuelto en dimensiones 2 y 3, aunque hay adelantos dispersos en otras dimensiones superiores usando estrategias de métodos numéricos. Como es de esperarse, el lattice hexagonal es el mejor cuantizador en dimensión dos, mientras que en el caso 3 dimensional el mínimo ocurre en el lattice  $A_3^*$ .

El objetivo central de la charla es presentar un panorama actualizado del problema, y mostrar algunos adelantos logrados para los casos 4 y 5 dimensionales, usando algunas técnicas de combinatoria para describir la celda de Voronoi, y teoría de grafos para la constante de cuantización.

En especial hemos obtenido una fórmula para el momento de inercia normalizado en retículos de tipo I y exploraciones computacionales de familias de lattices en dichas dimensiones.

El trabajo se basa en resultados anteriores de Barnes para obtener el momento de inercia y en un trabajo de Conway–Sloane que describe cómo calcular el momento de inercia de politopos convexos.

Es de resaltar que dada la magnitud de las fórmulas, el uso del computador resulta esencial.“

### **Demostración del teorema de clasificación de grupos de Lie compactos mediante el juego de Kostant**

Juan Sebastián Cortés Cruz  
Universidad Nacional de Colombia  
juascortescru@unal.edu.co

Esta presentación está basada en el trabajo que estoy actualmente desarrollando en la escritura de mi tesis de maestría donde se ofrece una demostración alternativa y autónoma del



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

teorema de clasificación de grupos de Lie compactos utilizando el juego de Kostant. Mediante reglas combinatorias en diagramas de Dynkin, generamos todas las raíces positivas de los sistemas asociados, estableciendo una biyección entre configuraciones del juego y estructuras algebraicas. La demostración se fundamenta en tres pilares: (1) correspondencia exacta entre movimientos del juego y operaciones en sistemas de raíces, (2) exclusividad de los diagramas de Dynkin como únicos grafos que permiten configuraciones válidas, y (3) validación explícita en casos clásicos y excepcionales. Este enfoque proporciona una perspectiva innovadora para la clasificación, basada en dinámicas combinatorias.

### **AVANCES EN LA TEORÍA DE MICRO-MACRO SISTEMAS DINÁMICOS COMBINATORIOS**

Rafael Gabriel Díaz Camacho

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

rgdiazca@unal.edu.co

En esta ponencia revisamos ideas sobre una formulación combinatoria de la segunda ley de la termodinámica, introducimos nuevos ejemplos en el área, y discutimos problemas abiertos y posibles líneas de ataque.

### **Counting Subpaths in Dyck Paths**

Rigoberto Florez

The Citadel

rflorez1@citadel.edu

A Dyck path is a lattice path in the first quadrant of the  $xy$ -plane that starts at the origin, ends on the  $x$ -axis, and consists of an equal number of up-steps (U) and down-steps (D). In this talk, we discuss techniques for counting subpaths of Dyck paths. For example, in the Dyck path of length 14, UUUUDDUDDUDDDD, we observe that the subpath UD appears three times. We are interested in counting such patterns for all Dyck paths of a given length under certain restrictions.

### **Polinomios de dos niveles**



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Tristram Bogart  
Universidad de los Andes  
tc.bogart22@uniandes.edu.co  
Kevin Woods  
Oberlin College

We examine combinatorial counting functions with two parameters,  $n$  and  $q$ . For fixed  $q$ , these functions are (quasi-)polynomial in  $n$ . As  $q$  varies, the degree of this polynomial is itself polynomial in  $q$ , as are the leading coefficients. We carefully define these two-level polynomials, lay out their basic algebraic properties, and provide a schema for showing a function is a two-level polynomial. We provide many examples and outline proofs for several of them. These include chromatic polynomials for many infinite families of graphs, partitions of an integer into a given number of parts, placing non-attacking queens on a chessboard, Sidon sets, and Sheffer sequences.

## 2.4. Ecuaciones diferenciales

### El problema de Cauchy periódico para un sistema de ecuaciones no lineales

Alex Manuel Montes Padilla  
Universidad del Cauca  
amontes@unicauca.edu.co

#### Resumen

En este trabajo establecemos un resultado de buen planteamiento para el problema de Cauchy periódico asociado con el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2 \Phi - \partial_x^4 \Phi + \partial_x (\eta \partial_x \Phi) = 0, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

y la condición inicial

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x). \quad (2)$$

Específicamente, demostramos que el problema de Cauchy es localmente bien planteado para  $\eta_0, \partial_x \Phi_0 \in H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \geq 0$ . El sistema (1) describe la evolución de ondas de gran



XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

elongación y pequeña amplitud en un fluido, donde  $\Phi = \Phi(x, t)$  representa la velocidad potencial y  $\eta = \eta(x, t)$  corresponde a la elevación de la onda (ver [2]).

Para obtener nuestro resultado usamos el espacio de tipo Bourgain periódico  $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ ,  $s, \beta \in \mathbb{R}$ , donde  $X^{s,\beta}$  se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{X^{s,\beta}} = \| \langle |\tau| - \phi(k) \rangle^\beta \langle k \rangle^s \tilde{w} \|_{\ell_k^2 L_\tau^2},$$

y  $Y^{s+1,\beta}$  con respecto a la norma

$$\|w\|_{Y^{s+1,\beta}} = \| \langle |\tau| - \phi(k) \rangle^\beta |k| \langle k \rangle^s \tilde{w} \|_{\ell_k^2 L_\tau^2},$$

donde  $\langle a \rangle = 1 + |a|$  y  $\phi(k) = |k|^3 + |k|$  es el símbolo de Fourier asociado con la parte lineal del modelo (1). Aquí,  $\tilde{w}$  denota la transformada de Fourier en espacio-tiempo de  $w$ . Como es usual, para la demostración del resultado usaremos un argumento de punto fijo, combinado con estimativos lineales y no lineales apropiados.

## Referencias

- [1] A. Montes, R. Córdoba. Well-posedness and controllability of a nonlinear system for surface waves. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* Vol. **31**, (2024) 1–40.
- [2] J. Quintero, A. Montes. On the Cauchy Problem and Solitons para un Clase de Sistemas de Boussinesq 1D. *Differ Equ Dyn Syst.* Vol. **24**, (2016) 367–389.
- [3] J. Quintero. Solitary water waves for a 2D Boussinesq type system. *J. Partial Differ. Equ.* Vol. **23**, (2010) 251–280.

### Airy and Schrödinger-type equations on looping-edge graphs

Alexander Munoz Garcia  
Universidade de São Paulo  
alexmd@usp.br

The aim is to study the Airy and Schrödinger operators on looping-edge graphs, that is, a graph consisting of a circle and a finite number of infinite half-lines attached to a



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

common vertex. Characterizations of extensions generating unitary and contractile dynamics are provided for the Airy operator in terms of self-orthogonal subspaces and linear operators acting on indefinite inner product spaces (Krein spaces) associated to the boundary values at the vertex. Employing the same abstract techniques used in the former case, we characterize the self-adjoint extensions of the Schrödinger operator on T-shaped graphs, i.e., to graphs that consists of an internal edge that can be identified with  $[-L, 0]$  and a finite amount of half-lines attached to a common vertex identified with  $v=0$ . The theory to be discussed here can be considered as a first step towards a better understanding of the dynamics for the remarkable dispersive models NLS and KdV on metric graphs.

### **On the dynamics of non-criminal vs criminal population with time-delay**

Andrés Mauricio Rivera Acevedo  
Pontificia Universidad Javeriana Cali  
amrivera@javerianacali.edu.co  
Pablo Gustavo Amster  
Universidad de Buenos Aires

In this talk, we present and discuss the dynamics of the time-delayed non-autonomous differential equation system,

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= N(t)f(N(t)) - \frac{\varphi N(t)C(t)}{\nu + N(t)} + \sigma N(t)C(t), \\ \dot{C}(t) &= -\eta C(t) - l_e(t)C(t) + \frac{\gamma N(t - \tau)C(t - \tau)}{\nu + N(t - \tau)},\end{aligned}$$

where  $N(t)$  and  $C(t)$  represent the minded non-criminal and criminal population densities at time  $t$  respectively. The function  $f(N)$  represents the relative growth rate of the non-criminal population, and will be assumed to be of logistic type. Meanwhile, the function  $l_e(t)$  is a non-negative periodic function and  $\nu, \varphi, \gamma, \eta, \sigma$  are positive parameters. Finally,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  is the time delay between the triggered agglomeration of criminal individuals in the proximity of non-criminal individuals and interaction with non-criminal individuals themselves. In this talk, we will demonstrate the existence and local stability of periodic solutions. Specifically, it will be shown that solutions for small delays can be continued from the non-delayed case. Some numerical examples are provided to illustrate our results.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **On the Global Regularity of the Navier-Stokes Equations**

Brian David Vasquez Campos

Universidad del Tolima

bdvasquezc@ut.edu.co

In this presentation, we give a sufficient condition to guarantee the existence of a smooth solution of the Navier-Stokes Equation with the nice decreasing properties at infinity. In this way, we prove the existence of smooth physically reasonable solutions to the Navier-Stokes problem. Additionally, we show the existence of a smooth curve of entire vector fields of order 2 that extends the solution to the complex domain for positive time

### **Examining the Impact of Rising Temperatures on Leaf Vein Structure and Architecture**

Camilo Ernesto Medina González

Universidad Nacional de Colombia

cemedinag@unal.edu.co

Juan Carlos Galvis

Universidad Nacional de Colombia

Se investigó el impacto del aumento de la temperatura en la formación de la arquitectura de la venación en las hojas. Se empleó un modelo de redes biológicas, estableciendo una configuración inicial constante para las redes y los bordes, y variando un coeficiente metabólico como equivalente a la variación de temperatura para evaluar su impacto. Los resultados demuestran una relación inversamente proporcional entre la conductividad de las venas y el valor del coeficiente metabólico  $c_0$ . La estructura de la red se mantuvo sin cambios, conservando las mismas venas funcionales pero variando en tamaño, reduciéndose a medida que aumentaba el coeficiente metabólico.

### **Estudio de un sistema de competición de interespecies con quimiorepulsión**

Carlos Alberto Banquet Brango

Universidad de Córdoba

cbanquet@correo.unicordoba.edu.co



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

Elder Jesús Villamizar Roa  
Universidad Industrial de Santander

En esta presentación se analiza una ampliación del modelo clásico de competencia entre especies propuesto por Lotka y Volterra, en el cual se parte de la premisa de que los individuos de ambas poblaciones en competencia se distribuyen aleatoriamente en el área que comparten, dejando una marca de olor en el entorno (como, por ejemplo, proteínas urinarias), y esta marca olfativa repele a la otra especie. A diferencia de las señales visuales o acústicas, la señal olfativa puede perdurar en ausencia del emisor durante un período de tiempo considerable. Las marcas de olor son comúnmente empleadas entre los vertebrados terrestres en el contexto de la delimitación y defensa del territorio.

Denotando las densidades de las especies competidoras como  $u$  y  $v$ , y la densidad de la señal química (por ejemplo, un odorante volátil) como  $w$ . El modelo de competencia entre especies con quimiorrepulsión se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(d_u \nabla u + \chi u \nabla w) + \mu_1 u(1 - u - a_1 v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_v \Delta v + \mu_2 v(1 - v - a_2 u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau w_t = d_w \Delta w - \lambda w + \alpha v, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $d_u > 0$ ,  $d_v > 0$ ,  $d_w \geq 0$ , son los coeficientes de difusión,  $\chi > 0$  es el coeficiente de quimiorrepulsión,  $\mu_1 > 0$  y  $\mu_2 > 0$  son las tasas de crecimiento poblacional y  $a_i > 0$  (para  $i = 1, 2$ ) son los coeficientes que describen la fuerza de la competencia. Las funciones  $u$  y  $v$  están definidas en  $\Omega \times (0, +\infty)$ ,  $N \geq 1$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado con frontera suave. El sistema (3) se complementa con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

y los datos iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\lambda$  describen las tasas de producción y degradación de la señal, respectivamente. Mediante este mecanismo indirecto, la primera especie intenta evitar encuentros con los competidores de la segunda especie.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

El sistema (3) fue propuesto en Tello y Wrzosek [?], donde los autores mostraron la existencia de soluciones fuertes para los modelos completamente parabólicos, parabólico-elípticos y parabólico-ODE. En esta charla se muestra la existencia de soluciones en ciertos espacios  $L^p(\Omega)$  con pesos en tiempo y se hacen algunas simulaciones numéricas con el fin de determinar si el modelo describe la situación ecológica real."

### **Multiplicidad de soluciones para sistemas elípticos de tipo Hamiltoniano con no-linealidades cóncavas-convexas, Parte II**

Carlos Vélez

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

cauvelez@unal.edu.co

Óscar Agudelo

Universidad de Bohemia del Oeste en República Checa

En esta charla, la cual es la segunda parte de la charla propuesta por Oscar Agudelo, se estudian aspectos relacionados con la existencia de múltiples soluciones para problema de valores en la frontera

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda v^r + v^p & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v = \mu u^s + u^q & \text{en } \Omega, \\ u > 0, v > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en el cual  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio suave acotado,  $\Delta$  es el operador Laplaciano,  $\mu, \lambda \geq 0$ ,  $r, s \in (0, 1)$  y  $p, q \in (1, \infty)$ .

Los resultados que aquí se presentan están motivados por los resultados de Ambrosetti, Brezis y Cerami (ver [1]), y establecen que bajo condiciones adicionales, existe una función continua y decreciente

$$\lambda^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

que satisface que en la región

$$S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda \leq \lambda^*(\mu)\}$$



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

el sistema  $(P)$  tiene al menos una solución. En contraste, en la región exterior a  $S$ , el sistema  $(P)$  no tiene soluciones y, en el interior de  $S$ , el sistema  $(P)$  tiene al menos dos soluciones.

Estos aspectos forman parte de un trabajo en progreso en colaboración con Oscar Agudelo (Universidad de Bohemia del Oeste) y Bernhard Ruf (Universidad de Milán).

### Referencias

- [1] A. Ambrosetti, H. Brezis y G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, 122(2):519–543, 1994.

### Population dynamics of a Filippov Gause predator-prey model with or without competition among predators with respect to prey density

Christian Camilo Cortés García

Universidad Surcolombiana

christian.cortes@usco.edu.co

In this paper we explore the dynamics of two new predator-prey models that incorporate competition or non-competition between predators in response to variations in prey abundance in the environment, allowing us to more realistically capture the non-linear dynamics present in the predator-prey system under varying conditions of prey availability. In particular, if predators compete for food when the prey population size is below its critical value, then the model describing such dynamics could have unstable boundary equilibria and no positive inner equilibria, with the non-regular tangent point replacing the role of the positive inner equilibrium, and which may or may not be surrounded by an asymptotically stable limit cycle. On the other hand, and contrary to the first proposed model, if we consider that predators compete with each other when the population size of the prey is greater than its critical value, we have positive inner equilibria coexisting in both vector fields, so that there could be an asymptotically stable limit cycle around all their positive inner equilibria.

### Modelo Matemático de Coinfección de VIH/SIDA y Hepatitis B (VBH) en Población Humana



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Cristian Camilo Espitia Morillo  
Universidad de los Llanos  
cristian.espitia@unillanos.edu.co  
Juan Felipe Pacazuca Santiago  
Laboratorio Nacional de Computación Científica

La presente propuesta es un trabajo preliminar de investigación donde se presenta un modelo de coinfección entre el virus de VIH y posterior síndrome SIDA con el virus de Hepatitis B en población humana, con el objetivo de analizar la dinámica poblacional de las enfermedades incluyendo los efectos de tratamiento con antirretrovirales y posteriormente diseñar estrategias de control que permitan mitigar la propagación de las enfermedades, a la vez de evaluar el impacto de adhesión al tratamiento. El modelo considera transmisión vertical y contacto con fluidos corporales tanto en la infección de VIH como en la de hepatitis B, entre las hipótesis principales se asume que los individuos pueden ser infectados por ambos virus y que el tratamiento puede suprimir la replicación viral. El submodelo de VIH/SIDA es basado en el trabajo de grado [1] titulado: “Población Adulta e Infantil en la Dinámica de la Infección, un Modelo Matemático para VIH/SIDA”. Mientras que el submodelo de infección por hepatitis B ha sido resultado del análisis literario de diferentes referencias bibliográficas de modelos matemáticos de hepatitis B y coinfección, tales como [2], [3], [4] y [5].

### **Ondas en fluidos: generación y propagación.**

David Andrade  
Universidad del Rosario  
deandrade@gmail.com

Los tsunamis son un tipo de ola que típicamente se genera en la superficie del océano debido a rupturas del lecho marino. Uno de los casos más conocidos ocurrió en diciembre del 2004, cuando una cadena de terremotos en el océano Índico dio lugar a un tsunami que devastó las costas del sureste asiático.

Con el objetivo de comprender mejor los efectos devastadores de estas olas, Hammack propuso el primer modelo matemático capaz de describir la generación de olas debido a desplazamientos del fondo marino. Su modelo asume que el océano es un fluido ideal, incompresible y cuyo flujo es irrotacional. Su resultado principal es una linealización de las



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

ecuaciones de Euler para un fluido con dos fronteras móviles: la superficie libre, es decir, a la superficie del océano y el fondo marino, el responsable por la generación del tsunami.

En este trabajo presentamos una formulación diferente de las ecuaciones de Euler completas, es decir, sin simplificaciones adicionales, adaptadas a una configuración con una superficie libre y un fondo submarino móvil. Esta formulación permite la implementación de un método numérico que permite simular la generación de olas debido a desplazamientos del fondo marino.

### **Regularity properties of Fourier integrals operators: a modern perspective**

Duvan Cardona

Ghent University, Belgium y Research Foundation – Flanders FWO (Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek – Vlaanderen)

duvanc306@gmail.com

Un célebre resultado demostrado por Terence Tao (Medallista Fields, 2006) establece la continuidad débil  $(1,1)$  de operadores integrales de Fourier con orden  $-(n-1)/2$ . Este problema fué propuesto a Tao, por uno de los padres del análisis armónico moderno (y su supervisor doctoral en Princeton): Elias Stein. El objetivo de esta ponencia es presentar nuestra extensión al teorema de Tao en el caso general de operadores integrales de Fourier con fases complejas, problema que en análisis armónico estuvo abierto por 20 años. Una introducción histórica en la materia se presentará así como los básicos en el área. No se requiere información previa sobre estos tópicos para atender la charla. Trabajo conjunto con Michael Ruzhansky.

### **ON THE EXISTENCE AND OPTIMAL CONTROL THEORY RELATED TO THE KELLER-SEGEL SYSTEM**

Élder Jesús Villamizar Roa

Universidad Industrial de Santander

jvillami@uis.edu.co

In this talk we study the following three-dimensional parabolic-parabolic chemo-repulsion model with nonlinear signal production and bilinear control, including or not a logistic



XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

reaction term:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= \nabla \cdot (u \nabla v) + r u - \mu u^p, \\ \partial_t v - \Delta v + v &= u^p + f v 1_{\Omega_c}, \end{cases}$$

where  $1 \leq p \leq 5/3$ . Secondly, if  $f \in L^{5/2}(0, T; L^{5/2+}(\Omega_c))$ , any weak solution  $(u, v)$  satisfying the regularity criteria  $u^p \in L^{5/2}(Q)$  is in fact more regular, arriving in particular to  $u, \nabla v \in L^5(Q)$  which is the critical regularity to solve a related optimal bilinear control problem. In fact, this setting let us to prove the existence of global optimal solutions, and the differentiability of the control-to-state mapping via the Implicit Function Theorem in Banach spaces. Then, we can identify the gradient of the (reduced) cost with respect to the control introducing the adjoint problem. In particular, we derive first-order necessary optimality conditions for local optimal solutions.

### Sobre la multiplicidad de soluciones para problemas de Dirichlet que involucran operadores no locales

Emer de Jesus Lopera Arias  
Universidad Nacional de Colombia  
edloperar@unal.edu.co

En este trabajo estudiamos una clase de problemas del tipo

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_K u(x) - \lambda u(x) = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un conjunto abierto acotado con frontera Lipschitz,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  con  $f(x, 0) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ , y  $\mathcal{L}_K$  es un operador integrodiferencial no local con condición de frontera de Dirichlet homogénea. Calculando los grupos críticos del funcional de energía asociado al problema (4) en el origen y en el infinito, probamos que tiene tres soluciones no triviales si  $\lambda < \lambda_1$  y dos si  $\lambda \geq \lambda_1$ , donde  $\lambda_1$  es el primer valor propio de  $-\mathcal{L}_K$ .

### Reconstrucción de un coeficiente dependiente del espacio en la ecuación BBM lineal mediante formulación de optimización



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Felipe Alexander Pipicano Guzmán  
Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD  
felipe.pipicano@unad.edu.co  
Juan Carlos Muñoz Grajales  
Universidad del Valle

En este estudio se considera la identificación de un coeficiente dependiente del espacio,  $c(x)$ , dentro de la ecuación lineal de Benjamin–Bona–Mahony (BBM), la cual describe la propagación de ondas unidireccionales de amplitud moderada. Dicho coeficiente modela la variación espacial de la velocidad lineal de la onda en un dominio de longitud  $L$ . El problema se plantea como un problema inverso: se conoce la forma de la onda  $u(\cdot, T)$  a un tiempo final  $T$  y se desea determinar la función  $c(x)$  que produzca dicha medición al resolver la ecuación BBM lineal.

La formulación del problema directo parte de la ecuación:

$$ut + (c(x)u)_x - \beta u_{xxt} = 0,$$

con condiciones iniciales y de frontera homogéneas en un dominio unidimensional. Se prueba la buena colocación para este modelo (es decir, tiene solución única y estable) bajo hipótesis razonables sobre  $u_0$  y  $c(x)$ .

En el problema inverso, el objetivo es reconstruir  $c(x)$  valiéndose de la información de  $u(x, T)$ . Puesto que las mediciones pueden presentar ruido o ser incompletas, el planteamiento resulta típicamente mal condicionado. Para remediarlo, se adopta la regularización de Tikhonov, de modo que el funcional a minimizar combina el ajuste a los datos con una penalización sobre la norma de  $c$ . Se emplea el algoritmo L-BFGS-B (un método cuasi-Newton de memoria limitada) para llevar a cabo la minimización, resolviendo en cada iteración tanto el problema directo como su correspondiente adjunto.

El artículo demuestra la existencia de un minimizador del funcional regularizado y, además, establece un resultado de estabilidad local: si el tiempo de observación  $T$  no es muy grande y  $\beta$  se elige en forma adecuada, entonces la reconstrucción de  $c(x)$  depende de manera continua de la medición final  $u(x, T)$ . Esto implica que perturbaciones moderadas en los datos no alteran drásticamente la solución. También se obtiene unicidad local, es decir, no existen dos coeficientes distintos que produzcan exactamente la misma señal en  $t = T$ .



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En la parte numérica, se plantea un esquema en elementos finitos para la aproximación espacial y un método implícito de segundo orden en el tiempo, todo implementado con el software FEniCS y Dolfin-Adjoint. Se incluyen pruebas computacionales donde se reconstruyen perfiles de  $c(x)$  con secciones constantes y transiciones suaves. Estos experimentos demuestran la eficacia del método y su sensibilidad ante la elección de  $T$  y el parámetro de regularización. Por último, se discuten posibles extensiones, como considerar la ecuación BBM no lineal o dominios de dimensión superior, subrayando el potencial de la estrategia para aplicaciones más complejas.

### **Dinámica Fraccionaria y Energía Generalizada a partir de la segunda ley de Newton**

Javier Alexander Tenorio Quiñones

Universidad Tecnológica de Pereira

detenor2@utp.edu.co

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

This work focuses on the fractional formulation of Newton's second law, using the Riemann-Liouville and Caputo differentiation operators to describe uniformly accelerated motion with fractional orders  $\alpha \in (0, 1)$  [?].

Since its conceptualization by Leibniz and L'Hôpital in the 17th century, fractional calculus has been studied by various mathematicians such as Baleanu et al. [?] and Diethelm [?], who have developed applications of this approach in physics and engineering. The Riemann-Liouville derivative is expressed as a convolution integral that extends the concept of conventional differentiation, allowing for the modeling of memory-affected processes. On the other hand, Caputo's derivative simplifies the physical interpretation of initial conditions, facilitating its use in real dynamic systems [?].

The fractional formulation of Newton's second law introduces a differential equation in terms of fractional-order derivatives. By applying the Laplace transform, general solutions for position, velocity, and kinetic and potential energy are obtained, allowing analysis of the influence of the parameter  $\alpha$  on the system's evolution [?]. In the case of free fall, the fractional equation for position is expressed as:



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)}$$

This equation reveals that, for lower values of  $\alpha$ , the effective acceleration decreases, which results in a slower descent of the body. This effect correlates with physical systems where medium resistance or memory effects alter the conventional trajectory described by classical motion equations [?].

The study of kinetic and potential energy under this approach highlights the dependency on the fractional parameter in the conservation of system energy. Kinetic energy is expressed as:

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{with } v = D^\alpha x(t)$$

while potential energy is related to height according to:

$$U = mgx(t)$$

The values of  $\alpha$  affect the rate of change of kinetic and potential energy, demonstrating that fractional calculus can provide a more precise description of physical systems in viscoelastic media or with nonlinear dissipation [?].

Numerical simulations based on this formulation have shown that, by varying  $\alpha$ , a significant deviation in the trajectory of the free-falling body is observed. In particular, the results indicate that for  $\alpha \approx 1$ , the motion approaches classical dynamics, while for  $\alpha < 1$ , the system exhibits damping effects characteristic of materials with memory [?].

These findings have been corroborated by recent research exploring applications of fractional calculus in diffusive phenomena and thermal processes. For example, in heat transport models in heterogeneous materials, the inclusion of fractional terms in conduction equations allows for capturing anomalous diffusion effects observed in complex systems [?].

This work aims to show how the introduction of fractional operators into classical dynamical laws enables a systematic incorporation of memory effects into the evolution of physical variables such as position and velocity. Building on this approach, we develop a theoretical framework that extends classical models like the harmonic oscillator, Hooke's law, and viscoelastic systems, offering a richer and more accurate description of complex physical phenomena characterized by non-local and history-dependent behavior.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Modelado Matemático de la Interacción entre Tumores y el Sistema Inmunológico con Consideración de Retardos Temporales**

Jeimy Leandra Moyano Ruiz  
Universidad de los Llanos  
jlmoyano@unillanos.edu.co  
Carolina Ballesteros Velasquez  
Universidad de los Llanos

El cáncer constituye una de las principales causas de mortalidad global, con proyecciones que alcanzan los 30.2 millones de casos para 2040. Este estudio desarrolla un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales con retardo temporal para analizar la interacción dinámica entre células tumorales, células efectoras inmunitarias e interleucina-2 (IL-2). Se evaluaron tres patrones de crecimiento tumoral: logístico clásico, logístico generalizado y exponencial. Mediante simulaciones numéricas, se analizó el comportamiento del sistema bajo diferentes valores de retardo temporal ( $\tau$ ). Los resultados muestran que, sin retardo temporal, el sistema tiende a puntos de equilibrio estables, mientras que la introducción de retardos genera oscilaciones características en las variables. Notablemente, estas oscilaciones ocurren independientemente del modelo de crecimiento tumoral seleccionado, con diagramas de fase que exhiben estabilidad alrededor del punto para todas las funciones estudiadas. Se concluye que, independientemente de cómo se modifique el término que describe la tasa de crecimiento logística del tumor, los diagramas de fase y puntos de estabilidad son los mismos para los diferentes valores de  $\tau$ . A diferencia de modelos previos, el sistema demuestra robustez ante diferentes funciones de crecimiento tumoral, sugiriendo que la dinámica de interacción tumor-efector-interleucina mantiene propiedades cualitativas consistentes que podrían contribuir al desarrollo de estrategias terapéuticas más efectivas.

### **Existencia de solución para problemas no locales de tipo Kirchhoff con no linealidad exponencial**

Jesús Alberto Leon Tordecilla  
Universidad del Sinú, Universidad Nacional de Colombia-Sede La Paz  
jleontordecilla@gmail.com

Nosotros investigamos la existencias de soluciones positivas para problemas elípticos de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

tipo Kirchhoff envolviendo un operador no local. La no linealidad en la ecuación combina un término no local junto con un término exponencial que puede ser subcrítico, crítico o supercrítico en el sentido de la desigualdad de Trudinger-Moser.

### **Neumann problem for fractional Ginzburg-Landau equation on a upper-right quarter plane**

Jesús Fernando Carreño Díaz

Universidad Nacional Autónoma de México

jesuscarreno1994@gmail.com

Elena Kaikina

Universidad Nacional Autónoma de México

We consider the initial-boundary value problem for the Ginzburg-Landau equation with fractional Laplacian on a upper-right quarter plane. We study the main questions of the theory of IBV- problems for nonlocal equations: the existence and uniqueness of a solution, the asymptotic behavior of the solution for large time and the influence of initial and boundary data on the basic properties of the solution. We generalize the concept of the well-posedness of IBV- problem in the Sobolev spaces to the case of a Neumann type of boundary data. We also give optimal relations between the orders of the Sobolev spaces to which the initial and boundary data belong. The lower order compatibility conditions between initial and boundary data are also discussed.

### **Estimaciones bilineales y clases críticas para la unicidad en las ecuaciones de Navier-Stokes**

Jhean Eleison Pérez López

Universidad Industrial de Santander

jelepere@uis.edu.co

En esta charla nos centramos en las estimaciones bilineales y en la unicidad de las soluciones blandas para las ecuaciones de Navier-Stokes en espacios críticos. Para ello, construimos marcos generales en los que se cumplen las estimaciones para el término bilineal de la formulación blanda sin recurrir a normas auxiliares, tales como las normas con peso en el tiempo



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

de tipo Kato. Inicialmente, se obtienen condiciones necesarias en espacios críticos abstractos y, posteriormente, se consideran estructuras adicionales para derivar las estimaciones en clases generales de espacios funcionales. Las demostraciones se fundamentan principalmente en caracterizaciones y estimaciones en los correspondientes espacios preduales.

### **Physical Model of Aerial Maneuvers in Elite Gymnastics**

Jhoan Sebastian Tenjo Garcia  
Universidad Nacional de Colombia  
jtenjo@unal.edu.co  
Diego Gerardo Roldan Jimenez  
Universidad Nacional de Colombia

Elite gymnasts perform exceptional movements that can be accurately described using mathematical modeling. In this talk, we present a physical model of the airborne phase during gymnastic performances. We describe the complex dynamics governing the execution of multiple flips and twists within a single maneuver. We combine translational dynamics for the gymnast's center of mass with rotational motions in the sagittal and vertical axes, and demonstrate how body configuration (tucking or extending) influences momentum and energy. By introducing a time-varying moment of inertia, we capture how elite gymnasts modulate angular velocity during flight. We also explore considerations such as kinetic energy decomposition at take-off and potential landing forces. The model, which culminates in a set of ordinary differential equations, offers a structured approach for analyzing and predicting high-difficulty skills in competitions.

### **Front tracking para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación**

Jonhatan Castillo Barajas  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá  
jcastilloba@unal.edu.co

El método de front tracking es un método de aproximación de soluciones para el problema de Cauchy asociado a un sistema hiperbólico de leyes de conservación, el cual consiste en analizar las discontinuidades del problema con una condición inicial aproximada por una



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

función constante a trozos y resolver las interacciones que se generan, a través del estudio inicial de las soluciones del problema de Riemann asociado al sistema. En esta presentación se discute el método de front tracking y se estudian las propiedades de las soluciones del problema de Cauchy obtenidas como límite de soluciones construidas mediante este método.

### **Existencia de múltiples soluciones para un problema elíptico cuasilineal**

JORGE COSSIO

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

[jcossio@unal.edu.co](mailto:jcossio@unal.edu.co)

Sigifredo Herrón y Carlos Vélez

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

En esta conferencia se estudia la existencia de múltiples soluciones para un problema elíptico cuasilineal que involucra el  $p$ -Laplaciano. Se demuestra la existencia de múltiples soluciones cuando la  $p$ -derivada en cero y la  $p$ -derivada en infinito de la no linealidad son mayores que el primer valor propio del  $p$ -Laplaciano. La prueba utiliza bifurcación de infinito y bifurcación de cero para demostrar la existencia de ramas no acotadas de soluciones positivas (respectivamente de soluciones negativas). Además se prueban algunas propiedades cualitativas de las soluciones. Este trabajo extiende a ecuaciones cuasilineales un resultado de J. Cossio, S. Herrón, y C. Vélez para ecuaciones semilineales.

### **BIFURCATION ANALYSIS, MODULATIONAL INSTABILITY AND SOLITON SOLUTIONS FOR A COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER-TYPE EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS**

José Manuel Escorcía Tafur

Universidad EAFIT

[jmescorcit@eafit.edu.co](mailto:jmescorcit@eafit.edu.co)

This work investigates the complex dynamics of a coupled nonlinear Schrödinger-type equation with varying coefficients. A two-dimensional dynamical system is associated with this general model by utilizing a travelling-wave transformation and imposing the coefficients to satisfy a Riccati system, and its bifurcation is detailed by planar dynamical systems theory.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

The bifurcation scrutiny leads to the explicit construction of soliton solutions. The chaotic behavior of the coupled Schrödinger equations is shown by subjecting the dynamical system to a small perturbation term. Finally, the instability region is determined by doing a linear stability analysis. The dynamics of the gain power is explored by the different selection of the coefficients.

### **Blow-Up dispersivo para un sistema de ecuaciones KdV de quinto orden-Schrodinger no lineal**

Jose Manuel Jimenez

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

[jmjimene@unal.edu.co](mailto:jmjimene@unal.edu.co)

Eddy Bustamante

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

En este trabajo estudiamos el fenómeno de blow-up dispersivo para un sistema de ecuaciones de tipo KdV de quinto orden-Schrodinger no lineal. Como resultado principal demostramos que la parte no lineal de la solución de dicho sistema es más regular que la solución misma y utilizamos dicha propiedad para construir datos iniciales que dan lugar al fenómeno de blow-up dispersivo para la solución asociada a tales datos iniciales.

### **A neural network approach for solving the heat equation in coffee industry applications**

Josué David Acosta Castrillón

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

[jodacostacal@unal.edu.co](mailto:jodacostacal@unal.edu.co)

We introduce a Robust Variational Physics-Informed Neural Network (RVPINN) method for solving parabolic partial differential equations (PDEs), with a particular focus on modeling the industrial-scale freezing of coffee extracts. Our approach revisits the foundational aspects of Physics-Informed Neural Networks (PINNs), which incorporate the strong form of the governing PDEs into the training loss function. However, standard PINNs often struggle with convergence in stiff problems or low-regularity regimes. To address these challenges, we



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

highlight the advantages of the RVPINN framework, which enforces the PDE constraints in a variational (weak) form, improving stability and accuracy in complex scenarios.

### **Analytic and numerical analysis of a Schrödinger equation with derivative in the nonlinear term**

Juan Carlos Muñoz Grajales

Universidad del Valle

[juan.munoz@correounivalle.edu.co](mailto:juan.munoz@correounivalle.edu.co)

Deissy Marcela Pizo

Universidad del Valle

In this work, we investigate a Schrödinger-type equation that incorporates a derivative in the nonlinear term and includes diffusion effects. This equation arises in various physical applications, such as modeling low-order magnetization in ferromagnetic nanocables and the collision of ferromagnetic solitons propagating through a weakly ferromagnetic medium. We establish a result of local well-posedness for the Cauchy problem associated with this model and propose a Fourier spectral numerical scheme to approximate its solutions in the periodic case. Additionally, we develop an error analysis for the semidiscrete formulation of the proposed numerical scheme. Finally, we numerically explore the behavior of the solutions under certain limiting values of the model parameters.

### **Estructura de cuencas de atracción en sistemas lineales suaves a trozos con bifurcación Big-Bang mediante métodos analíticos**

Juan Carlos Vargas Bernal

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

[jcvargasb@unal.edu.co](mailto:jcvargasb@unal.edu.co)

Simeón Casanova Trujillo

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

En sistemas dinámicos discretos a trozos, se han identificado bifurcaciones de codimensión 1 y 2, permitiendo caracterizar cambios significativos en su comportamiento. En la última década ha predominado un fenómeno denominado bifurcación Big-Bang, en el cual infinitas



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

curvas de bifurcación de codimensión 1 se intersecan, dando lugar a la coexistencia de órbitas periódicas y órbitas periódicas de todos los períodos posibles generando una estructura compleja. Dentro de este fenómeno emergen dos dinámicas particularmente interesantes: el aumento de período y la adición de período. En el primero, se observa un incremento infinito en el período de órbitas periódicas, lo que sugiere una evolución ininterrumpida de infinitas bifurcaciones. En el segundo, la adición de período, las órbitas periódicas siguen patrones estructurados como las sucesiones de Farey, donde en infinitos intervalos de los parámetros, los períodos de las nuevas órbitas periódicas corresponden a la suma de períodos de órbitas periódicas anteriores. Estas características se relacionan directamente con la estructura de los conjuntos de Cantor, proporcionando un marco matemático que describe la organización de estos períodos. Como fruto de este trabajo, se analizará la estructura de cuencas de atracción en sistemas lineales suaves a trozos donde ocurre la bifurcación Big-Bang, utilizando herramientas analíticas que permiten caracterizar estas regiones y su evolución en el espacio de parámetros. La naturaleza lineal de estos sistemas facilita un estudio detallado que podría servir como base para futuras generalizaciones hacia sistemas de mayor dimensión y sistemas no lineales. El carácter infinito y estructurado de las configuraciones dinámicas que surgen en estos sistemas convierte su estudio en un problema de gran interés dentro de la teoría de bifurcaciones en sistemas dinámicos a trozos. En esta ponencia, se explorará la relación entre la organización de las órbitas periódicas para el aumento de periodo y para la adición de periodo que está basada en las sucesiones de Farey, aumentando un poco más el marco teórico para comprender la complejidad de estos fenómenos."

### **On the boundary stabilization of the KdV-KdV system with time-dependent delay**

Juan Ricardo Muñoz

University of Dubrovnik

`juan-ricardo.munoz-galeano@unidu.hr`

The boundary stabilization problem of the Boussinesq KdV–KdV type system is investigated in this paper. An appropriate boundary feedback law consisting of a linear combination of a damping mechanism and a delay term is designed. Then, considering time-varying delay feedback together with a smallness restriction on the length of the spatial domain and the initial data, we show that the problem under consideration is well-posed. The proof com-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

bines Kato's approach and the fixed-point argument. Last but not least, we prove that the energy of the linearized KdV–KdV system decays exponentially by employing the Lyapunov method.

### **Patrones de Turing en un modelo depredador - presa Leslie - Gower con difusividad heterogenea**

JUAN SEBASTIAN SALAS GARCIA

Universidad Surcolombiana

garciajuansebastian1199@gmail.com

CHRISTIAN CAMILO CORTES

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Dado que la dinámica entre presas y depredadores que interactúan bajo el mismo ecosistema depende del tiempo y del espacio en el cual se encuentra ubicadas, diversos investigadores han propuestos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales reacción difusión en las que se asume difusividad constante. Sin embargo, como la velocidad de movimiento entre presas y depredadores varían respecto a la región donde ambas especies se encuentran ubicadas, en este trabajo se identificó nuevos patrones de Turing en modelos difusivos depredador – presa, al asumir que la dinámica de ambas especies es descrita por un modelo Leslie-Gower con difusividad heterogénea. A través del análisis de estabilidad local y global del modelo propuesto sin difusión, se determinó las regiones donde se presenta patrones de Turing bajo condiciones de difusividad homogénea, y con base a ello se identificaron nuevos patrones al considerar difusividad heterogénea. Se determinó que la matriz de difusividad tiene un impacto sobre la formación de nuevos patrones de Turing, y que pueden ser visto como combinación de patrones al considerar difusividad homogénea.

### **Análisis en el espacio de fases y osciladores anarmonicos**

Julio Cesar Delgado Valencia

Universidad del Valle

delgado.julio@correounivalle.edu.co

En esta charla presentaremos una breve introducción al Cálculo de Weyl-Hörmander y



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

algunas propiedades espectrales de osciladores anarmónicos. Para esto se introduce una métrica de Hörmander en el espacio de fases adaptada a los osciladores de interés. Para obtener propiedades espectrales se obtienen desigualdades de Weyl por medio de la inclusión de potenciales negativos del Hamiltoniano correspondiente en las clases de Schatten-von Neumann.

### **Trayectorias de partículas bajo una distribución de presión**

Marcelo V. Flamarion

Pontificia Universidad Católica del Perú

[mvellosouflamarionvasconcellos@pucp.edu.pe](mailto:mvellosouflamarionvasconcellos@pucp.edu.pe)

Examinamos las trayectorias de partículas en un flujo bidimensional de un fluido ideal influenciado por una onda gravitacional no lineal en la superficie. Estas trayectorias están gobernadas por un sistema dinámico cuya formulación se simplifica en un marco en movimiento que sigue la onda viajera no lineal, haciendo que el sistema sea autónomo. Esto permite que las trayectorias de las partículas se expresen en forma Hamiltoniana. Realizamos un análisis detallado de estas trayectorias, considerando los efectos de un flujo de fondo dentro del volumen del fluido.

### **Problema de difusión no local con término de absorción**

Mauricio Bogoya López

Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá

[mbogoyal@unal.edu.co](mailto:mbogoyal@unal.edu.co)

Estudiamos un problema de difusión no local con término de absorción. Analizamos la existencia y unicidad de las soluciones, la extinción de las soluciones y el perfil de extinción.

### **Positive solutions of singular problems**

Maya Chhetri

The University of North Carolina at Greensboro

[m\\_chhetr@uncg.edu](mailto:m_chhetr@uncg.edu)



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

We consider classes of singular elliptic problems with the zero Dirichlet boundary condition. Through a historical lens, we trace the evolution of our understanding regarding the regularity, existence, and behavior of positive solutions of purely singular problems, with a specific emphasis on their behavior at the boundary, of such problems. Additionally, if time permits, we will present some findings, particularly focusing on existence results when the singularity at the origin is coupled with sublinear growth at infinity.

### **Estabilidad global y bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa con una respuesta funcional general**

Miller Cerón Gómez

Universidad de Nariño

millercg@udenar.edu.co

En este estudio, analizamos el impacto de una respuesta funcional general en la dinámica de un sistema presa-depredador. El modelo presenta tres estados de equilibrio: extinción total, extinción del depredador y coexistencia entre ambas especies. Descubrimos que la existencia de un único punto de equilibrio de coexistencia está determinada por si la respuesta funcional es monótona. El equilibrio de extinción siempre resulta inestable, mientras que el equilibrio donde solo sobreviven las presas es globalmente estable. En el caso del equilibrio de coexistencia, este puede ser localmente estable, globalmente estable o dar lugar a un ciclo límite mediante una bifurcación de Hopf. Demostramos que, para garantizar estabilidad global (aunque no es suficiente), la respuesta funcional debe ser estrictamente creciente. Por otro lado, para que ocurra una bifurcación de Hopf, es necesario que la densidad de presas sea menor que la mitad de su capacidad de carga y que la respuesta funcional no crezca más rápido que la densidad de presas en el punto de coexistencia. Además, la estabilidad del ciclo límite depende de las segundas y terceras derivadas de la respuesta funcional.

### **Multiplicidad de soluciones para sistemas Hamiltonianos con no linealidades concavas y convexas.**

Oscar Agudelo

University of West Bohemia in Pilsen

oiagudel@kma.zcu.cz



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

.En esta charla consideramos el problema de Dirichlet en un dominio suave y acotado para un sistema elíptico con no linealidades de carácter cóncavo cerca del origen y convexo al infinito. El estudio de este problema está motivado por los resultados de Ambrosetti, Brezis y Cerami (ver [1]). En esta primera charla discutimos regularidad de soluciones del sistema, presentamos un principio de comparación y además un resultado a la Brezis-Nirenberg para un problema de cuarto orden asociado. Este último resultado, relaciona mínimos locales del funcional de energía asociado al problema de cuarto orden, en el contexto de la topología  $C^2$  con mínimos locales en una topología Sobolev y es esencial en el estudio de multiplicidad de soluciones del sistema en cuestión. Este trabajo es hecho en colaboración con Bernhard Ruf (Universidad de Milán) y Carlos Vélez (Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín).

Esta charla está propuesta con una segunda parte, la cual expondrá Carlos Vélez. En la segunda parte se aborda la cuestión de multiplicidad de soluciones para el problema utilizando los resultados presentados en esta charla."

### **Limit cycles bifurcating from periodic integral manifold in non-smooth differential systems**

OSCAR ALEXANDER RAMIREZ CESPEDES

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

osaramirez@udistrital.edu.co

Douglas Duarte Novaes

Universidade Estadual de Campinas

This work addresses the perturbation of higher-dimensional non-smooth autonomous differential systems characterized by two zones separated by a codimension-one manifold, with an integral manifold foliated by crossing periodic solutions. Our primary focus is on developing the Melnikov method to analyze the emergence of limit cycles originating from the periodic integral manifold. While previous studies have explored the Melnikov method for autonomous perturbations of non-smooth differential systems with a linear switching manifold and with a periodic integral manifold, either open or of codimension 1, our work extends to non-smooth differential systems with a non-linear switching manifold and more general periodic integral manifolds, where the persistence of periodic orbits is of interest. We illustrate our findings through several examples, highlighting the applicability and significance



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

of our main result.

### **Aspectos dinámicos del acoplamiento skew del mapa logístico**

Oswaldo Ozuna  
UMICH, MORELIA, MÉXICO  
osvaldo.osuna@umich.mx  
osvaldo.osuna@umich.mx  
Uniatlantico

En esta charla el objetivo fundamental es estudiar algunos aspectos de la evolución asintótica de las órbitas obtenidas por iterar el endomorfismo

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (f_{\mu}(x), f_{\mu}(y) + \epsilon(x - y)),$$

donde  $\mu > 1$  es el parámetro de la familia logística:  $f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$  y  $\epsilon > 0$ , es el parámetro de acoplamiento. Este mapa biparamétrico es un híbrido entre dos clásicos en la teoría de los sistemas dinámicos, por un lado el paradigmático mapa cuadrático y por el otro el acoplamiento skew. El resultado principal será mostrar de manera detallada la construcción de un compacto invariante en el espacio de parámetros, junto con una descripción del comportamiento de las preimágenes de zonas en  $\mathbb{R}^2$  que juegan un rol importante en la comprensión de la dinámica del acoplamiento.

### **Stability in Non-Autonomous Equations with Variable Delays: From Theory to Applications**

Pablo Amster  
Universidad de Buenos Aires  
pamster@dm.uba.ar  
Gonzalo Robledo  
Universidad de Chile

We shall discuss some stability criteria for scalar non-autonomous equations of linear type where the delay may depend both on the time and space variables. Our novel results



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

include the study of absolute asymptotic stability under hypotheses that extend the well-known autonomous case, and conditional stability for the case of negative feedback. This work unifies tools from delay differential equations and applied dynamics.

### **Ciclos limites infinitesimales y no infinitesimales en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower**

Paulo César Tintinago Ruiz

Universidad del Quindío

pctintinago@uniquindio.edu.co

Leonardo Duvan Restrepo Alape

Universidad del Tolima

En este trabajo se exponen las principales propiedades de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower, descrito por un sistema bidimensional no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el modelo se determinan: las condiciones de existencia de los puntos de equilibrio y la naturaleza de cada uno de ellos, acotamiento de las soluciones, verificando que el modelo está bien propuesto; existencia de curvas separatrices, homoclínicas y heteroclínicas y la existencia de al menos dos ciclos limites infinitesimales y su estabilidad (usando el método de cantidades de Lyapunov), y la existencia de un ciclo limite no infinitesimal que resulta del rompimiento de una curva heteroclínica con su respectiva estabilidad. Se mostrarán algunas simulaciones que reflejan los resultados matemáticos obtenidos.

### **EQUILIBRIUM STABILITY FOR OPEN ZOOMING SYSTEMS**

Rafael José Alvarez Bilbao

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

rafael.alvarez@uptc.edu.co

Eduardo Santana

Universidade Federal de Alagoas

"We prove that for a wide family of open zooming systems and zooming potentials we have equilibrium stability, i.e., the equilibrium states depend continuously on the dynamics



and the potential. We consider the open zooming systems with special holes and quite general contractions and zooming potentials with locally Hölder induced potential, which include the Hölder ones. We also prove stability for skew-products with the base being a zooming system like above. As a consequence of finiteness and stability, we obtain uniqueness of equilibrium state."

### Controlabilidad para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq

Ricardo Córdoba Gómez  
Universidad de Nariño  
rcordoba@udenar.edu.co

#### Resumen

En este trabajo estudiamos la controlabilidad exacta para el siguiente sistema unidimensional tipo Boussinesq,

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2 \Phi - \partial_x^4 \Phi + \partial_x(\eta \partial_x \Phi) = 0, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

el cual fue derivado en [2] como un modelo que describe la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud en presencia de tensión superficial en términos de la velocidad potencial  $\Phi = \Phi(x, t)$  y la elevación superficial  $\eta = \eta(x, t)$ .

Siguiendo el mismo enfoque utilizado en el caso de la ecuación KdV (ver [3]) y la ecuación Boussinesq (ver [4]), demostramos que para  $T > 0$  y estados inicial y final

$$(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}), \quad s \geq 0,$$

existe una función de control

$$F(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t))$$

tal que el problema de Cauchy asociado con el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2 \Phi - \partial_x^4 \Phi + \partial_x(\eta \partial_x \Phi) = f_1, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 = f_2, \end{cases} \quad (6)$$



XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

con la condición inicial

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \Phi_0(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),$$

tiene una solución  $(\eta, \Phi) \in C([0, T], H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$  que satisface la condición final

$$\eta(x, T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x, T) = \Phi_T(x), \quad x \in \mathbb{T},$$

donde el espacio de Sobolev de tipo periódico  $H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , está definido por

$$H^s(\mathbb{T}) = \left\{ w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k e^{ikx} \quad : \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |w_k|^2 < +\infty \right\}$$

y el espacio  $\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$  está definido por la norma

$$\|w\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} = \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |k|^2 |w_k|^2 \right]^{1/2},$$

donde  $w_k = \widehat{w}(k)$  denota el  $k$ -coeficiente de Fourier con respecto a la variable espacial  $x$ .

**Palabras & frases claves:** Sistema Boussinesq, Análisis espectral, Controlabilidad exacta.

## Referencias

- [1] A. Montes, R. Córdoba. Well-posedness and controllability of a nonlinear system for surface waves. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* Vol. **31**, (2024) 1–40.
- [2] J. Quintero, Solitary water waves for a 2D Boussinesq type system, *J. Partial Differ. Equ.* 23(3) (2010), 251-280.
- [3] D. Russell, B. Zhang, Exact Controllability and Stabilizability of the Korteweg-De Vries Equation, *Transactions of the American Mathematical Society.* 348 (1996), 3643-3672.
- [4] B. Zhang B, Exact controllability of the generalized Boussinesq equation, In *Control and estimation of distributed parameter systems*, *Internat. Ser. Numer. Math.* 126 (1996), 297-310.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Solución de la Ecuación de Schrödinger por el Método de Elementos Finitos en pozos cuánticos de nitruros.**

Ricardo León Restrepo Arango

Universidad EIA

ricardo.restrepo@eia.edu.co

Maximiliano Botero Correa

Universidad EIA

En este trabajo se utiliza la técnica de elementos finitos (FEM) para resolver la ecuación diferencial parcial (EDP) de Schrödinger para calcular la absorción óptica no lineal asociada con las transiciones intersubbandas de electrones en un sistema de cuatro niveles de energía en pozos cuánticos dobles de AlGa<sub>N</sub>/InGa<sub>N</sub> con tensión uniaxial. Los autovalores de energía y las autofunciones de onda se determinan dentro de la aproximación de masa efectiva en función de las coordenadas y la composición estequiométrica de los materiales. Aplicamos un esquema numérico de malla para resolver la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión, utilizando un software comercial para ello. El método se prueba con algunas de las configuraciones más conocidas de la ecuación de Schrödinger y se compara con soluciones analíticas, mostrando una gran precisión y estabilidad. También proporcionamos soluciones para distintas configuraciones sobre cómo usar algoritmos de malla para obtener las energías propias y las funciones de onda de problemas de Schrödinger. El potencial de confinamiento que se modela para los electrones está determinado por las diferencias en las constantes de red de los materiales de las barreras y de los pozos cuánticos, configurándose como AlGa<sub>N</sub>/InGa<sub>N</sub>/AlGa<sub>N</sub>/InGa<sub>N</sub>/AlGa<sub>N</sub>. Estas diferencias generan brechas de energía, campos eléctricos autoinducidos y autopolarizaciones.

### **Some conditions for existence of blow-up for the generalized Quasi-geostrophic equations**

RICARDO MARTINS MENDES GUIMARAES

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

rmmg1315@unicamp.br

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

In this work, we investigate potential blow-up scenarios for the inviscid generalized surface quasi-geostrophic (gSQG) equation in  $\mathbb{R}^2$ , within a more singular regime ( $\beta \in (1, 2)$ ). Employing techniques developed in [?], we prove that, under certain conditions on the solution and the initial data at the origin, and assuming that the level sets of the active scalar contain a hyperbolic saddle, there exists  $T^* \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  such that a saddle-type singularity may form, which implies that the solution blowup in  $T^*$ .

Moreover, if the gradient satisfies the upper bound  $\ln(\gamma)$ , where  $\gamma$  denotes the opening of the hyperbolic saddle, we obtain a lower bound on the blow-up time.

### **Modelo matemático del trastorno bipolar tipo II y su tratamiento farmacológico de mantenimiento con litio**

Ricardo Pinilla Estupiñan

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

rpinillae@unal.edu.co

David Angulo García

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

El trastorno bipolar se caracteriza por episodios recurrentes y alternantes de manía, hipomanía y depresión, los cuales tienen efectos severos en el comportamiento de quienes lo padecen. El trastorno bipolar tipo II es particularmente significativo, ya que presenta la mayor tasa de intentos de suicidio en comparación con otras categorías dentro del espectro bipolar. Además, debido a la falta de claridad en su fisiopatología, el desarrollo de tratamientos farmacológicos efectivos resulta difícil; los disponibles son escasos y de eficacia limitada.

En esta charla, se presenta y analiza un modelo matemático desarrollado para describir los estados de ánimo en el trastorno bipolar tipo II y su tratamiento de mantenimiento con litio. Se emplean principios de dinámica no lineal y procesos estocásticos para capturar tanto la polaridad como la variabilidad de los estados de ánimo. Adicionalmente, se incorpora un modelo farmacocinético de dos compartimentos con absorción y excreción lineales para representar el tratamiento con litio. Este modelo tiene como objetivo proporcionar una comprensión más profunda de los mecanismos subyacentes a las fluctuaciones del estado de ánimo y optimizar las estrategias de tratamiento, contribuyendo así a mejores resultados clínicos para los pacientes con trastorno bipolar tipo II.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **La Integral Rugosa: Integrales que doman la irregularidad**

Sergio Duvan Nuñez Sanchez

Universidad Nacional de Colombia

snunezs@unal.edu.co

La teoría de caminos rugosos extiende de manera elegante la integración estocástica clásica en una forma determinística y la resolución de ecuaciones diferenciales a trayectorias que presentan irregularidades demasiado pronunciadas para los métodos tradicionales. En lugar de exigir derivabilidad o condiciones de Lipschitz, se mide la suavidad de un recorrido mediante su seminorma de Hölder, que cuantifica la oscilación local del camino. Cuando esta seminorma supera cierto umbral (suma de exponentes mayor que uno), la integral de Young garantiza convergencia de las sumas de Riemann. Sin embargo, muchas trayectorias relevantes —como las de procesos estocásticos— tienen una regularidad inferior a ese umbral.

Para cubrir este caso, la teoría eleva la señal original a un objeto de segundo nivel llamado camino rugoso, que incorpora información adicional sobre el área de Lévy —una medida de cómo el camino “gira” entre pares de coordenadas—. Junto con la señal principal, este segundo componente permite definir integrales corregidas que recuperan la convergencia perdida. El espacio natural de integrandos en este contexto son los llamados caminos controlados: funciones que, en pequeña escala, siguen linealmente a la señal principal más un resto suficientemente regular.

Un elemento clave de la construcción es el corchete, análogo determinista de la variación cuadrática de Itô, que captura el componente no geométrico de segundo orden. Sobre ese corchete se define una segunda integración de Young que, combinada con la integral frente a la señal primaria, produce la versión rugosa de la fórmula de Itô. Esta fórmula repite la clásica regla de cadena pero añade un término de corrección proveniente del corchete.

Gracias a estas herramientas, se demuestra la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales forzadas por señales de muy baja regularidad.

### **Estudio de un Sistema No Lineal de Ecuaciones en Derivadas Parciales Asociado a Fluidos Estratificados en Tres Dimensiones**

TOVIAS ENRIQUE CASTRO POLO

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

toviascastro@mail.uniatlantico.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En este trabajo se estudian propiedades matemáticas de un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales que describe la dinámica de los movimientos internos de un fluido estratificado exponencialmente en el espacio tridimensional. Se analiza la existencia y unicidad de la solución débil del sistema, el cual involucra un término de advección no lineal en un intervalo finito. Se emplea el método de Galerkin para construir soluciones aproximadas y establecer la existencia local.

### **Sectorial pseudodifferential operators on $L_1(\mathbb{R}^n)$ and $BUC(\mathbb{R}^n)$**

WEYMAR ANDRES ASTAIZA SULEZ

Universidad del Cauca

wastaiza@unicauca.edu.co

Mostrar propiedades de pseudo operadores sectoriales sobre espacios

$$L_1(\mathbb{R}^n) \text{ y } BUC(\mathbb{R}^n)$$

basados en trabajos de Amann. En general se extienden resultados conocidos de símbolos elípticos y su relación con operadores sectoriales. Nota (Se anexa artículo aceptado en "Analysis and PDE in Latin America, ICMAM Latin America", como resumen extendido)

## 2.5. Educación Matemática

**Una exploración sobre creatividad y pensamiento matemático desde la resolución de problemas en educación superior.**

Alejandra Castaño Morales

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

alcastanom@unal.edu.co

Jaider Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En este trabajo se indaga sobre la dinámica del proceso creativo en estudiantes universitarios, sus relaciones con las habilidades matemáticas al enfrentarse a problemas sobre teoría de números y las posibilidades que estas ofrecen en el desarrollo del pensamiento matemático. No se trata de establecer influencias o modelos explicativos de unas sobre otras, más bien de abrir una discusión sobre la conveniencia de potenciar estas habilidades en educación superior, especialmente en los programas de matemáticas donde su enfoque formativo se centra básicamente hacia el desarrollo de habilidades de carácter lógico deductivas. Se abre una posibilidad para empezar a dar respuesta a interrogantes como ¿Están los programas de matemáticas desarrollando en sus estudiantes habilidades matemáticas y creatividad matemática? ¿Dadas las habilidades matemáticas desarrolladas en estudiantes de los programas de matemáticas, cómo es la dinámica de su proceso creativo? Y de manera más general ¿Los estudiantes de los programas de matemáticas están siendo formados para pensar matemáticamente?

### **La construcción de un túnel de viento para mejorar la comprensión de conceptos científicos y matemáticos en estudiantes de bachillerato**

Andres Felipe Urrea Pedraza

Colegio Rochester

[andres.urreapedraza@rochester.edu.co](mailto:andres.urreapedraza@rochester.edu.co)

Simón Camilo Pérez Rojas

[simon.perezrojas@rochester.edu.co](mailto:simon.perezrojas@rochester.edu.co)

En el Colegio Rochester, las aplicaciones en vida real de los conceptos pertenecientes a las materias que pertenecen al grupo STEM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) son fundamentales para lograr un proceso de aprendizaje holístico. Es por ello que reconocer como la ciencia y la matemática está presente en el día a día adquiere la misma importancia que simplemente entender el concepto teórico. Con este pensamiento como base, se realizó una investigación acerca de la efectividad de implementar un túnel de viento de bajo costo en una clase de bachillerato. Se realizó un estudio en el cual se aborda el procedimiento para determinar la eficacia del túnel de viento en el aula de clase. Esta ponencia describirá la investigación hecha y abrirá la discusión de la implementación de esta herramienta en la educación escolar.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros profesores de matemáticas**

Angela María Ossa Nieto

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

angelanieto05@gmail.com

Eliécer Aldana Bermúdez

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

El desarrollo del pensamiento algebraico debe ser una meta a alcanzar de manera gradual desde los primeros años de escolaridad. Es imprescindible que los docentes posean una perspectiva amplia del álgebra, tal como sugieren varias investigaciones y experiencias pedagógicas Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), para que estén preparados para modificar las actividades matemáticas en la escuela hacia la consecución de niveles progresivos de aprendizaje. El modelo de niveles de estructuración de la actividad matemática sugerido por Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) puede contribuir a que los profesores en formación comprendan las particularidades del pensamiento algebraico elemental a través de la identificación de los objetos y procesos matemáticos característicos de este.

La proporcionalidad puede ser tratada desde diversas perspectivas o interpretaciones, en función de los contextos de uso (vida diaria, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.), lo que implica la implicación de elementos y procesos particulares de estos campos en las técnicas de solución de los problemas pertinentes. Por lo tanto, la capacitación de docentes debe considerar el avance de conocimientos y habilidades matemáticas y didácticas en relación a este asunto, a través de intervenciones formativas específicas. Sin embargo, las investigaciones llevadas a cabo acerca del problema del razonamiento proporcional en la capacitación de docentes son limitadas, tal como indica Rivas (2013). Una investigación en torno a la capacitación de docentes de matemáticas requiere aclarar el modelo de conocimientos y crecimiento profesional que se implementa. A partir de una experiencia educativa, el objetivo es examinar los conocimientos matemáticos particulares de futuros docentes y el grado de habilidad epistémica para reconocer dichos conocimientos. En nuestra investigación, hemos optado por el modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), por un lado, se sostiene que el docente debe poseer un conocimiento matemático común en relación a un cierto nivel educativo donde imparte su enseñanza, así como también un entendimiento extenso del contenido matemático que le facilite su articulación con los ni-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

veles superiores. Por otro lado, conforme se involucre algún contenido matemático particular, es evidente que el docente requiere un entendimiento didáctico-matemático de los diferentes aspectos que inciden en el proceso de enseñanza (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional). Tanto el saber matemático en sí mismo, como el especializado, mantienen una relación estrecha entre sí.

Como el problema de investigación es el diseño, ejecución y evaluación de una intervención formativa destinada a fomentar en los futuros docentes de educación secundaria habilidades y saberes didácticos-matemáticos sobre un tema particular, la proporcionalidad, comprendemos que la metodología debe ser la ingeniería didáctica, en nuestro caso interpretada en un sentido amplio sugerido por Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) de Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). De igual manera, para el estudio del proceso de enseñanza se utiliza de nuevo la noción de hecho didáctico significativo (HDS) propuesta por estos autores.

### **Enfoque Innovador para la Enseñanza de las Matemáticas: Empoderando a Estudiantes de Ingeniería y Ciencias mediante el Aprendizaje Potenciado por TIC**

Anibal Sosa

Universidad Icesi

uasosa@icesi.edu.co

Hendel Yaker

Universidad del Valle

Ante la falta de eficacia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los programas de ciencias e ingeniería, sumado a la persistente baja motivación y altas tasas de reprobación entre los estudiantes, la Universidad Icesi diseñó e implementó una reforma curricular. Esta reforma redefine el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de ingeniería y ciencias, contextualizando ejes temáticos dentro de marcos de desarrollo científico y tecnológico actuales. Asimismo, enfatiza el desarrollo de nuevas habilidades, en particular el uso eficiente de herramientas computacionales, clave para las disciplinas STEM modernas. Se diseñaron e implementaron cuatro nuevos cursos de Matemáticas Aplicadas para pregrado en la Facultad de Ingeniería, Diseño y Ciencias Aplicadas, basados en metodologías de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

aprendizaje activo.

Desde lo pedagógico, la reforma adopta un enfoque de aprendizaje activo fundamentado en la teoría constructivista, que incentiva a los estudiantes a explorar, plantear preguntas significativas y participar en experimentación y validación numérica. Prioriza la flexibilidad, permitiendo a los docentes adaptar los planes de curso según el progreso de los estudiantes. Un pilar central es la integración de herramientas computacionales modernas, como Google Colab, que facilita el aprendizaje interactivo y es accesible desde diversos dispositivos, incluidos teléfonos móviles. Esta tecnología fomenta el trabajo interdisciplinario y enriquece el aprendizaje de matemáticas aplicadas al brindar experiencia práctica en programación y resolución numérica de problemas, esenciales para abordar desafíos reales.

La reforma integra estratégicamente temas contextualizados y experimentación computacional, lo cual ha demostrado aumentar la motivación estudiantil y reducir las tasas de reprobación. Al vincular conceptos matemáticos con aplicaciones reales y tecnología moderna, el programa busca mejorar la relevancia y el interés en estudiantes de STEM, favoreciendo así una mayor retención y éxito académico.

La eficacia de la reforma se evalúa mediante seguimiento continuo del desempeño estudiantil en áreas clave: habilidades de resolución de problemas, competencias computacionales, motivación, autonomía en el aprendizaje y capacidades comunicativas. Tras tres años de implementación, los resultados indican: - Mejoras significativas en la capacidad de modelar y resolver problemas matemáticos en contextos aplicados. - Mayor dominio de herramientas computacionales. - Avances en el aprendizaje autodirigido y en la argumentación y comunicación. - Una reducción notable en las tasas de reprobación, evidencia sólida del éxito de la reforma.

Esta iniciativa contribuye a las comunidades de educación en ingeniería y matemáticas al demostrar cómo el aprendizaje activo, junto con tecnologías educativas, puede transformar la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros y científicos. El desarrollo exitoso de habilidades computacionales y de resolución de problemas alineadas con aplicaciones reales subraya la importancia de incorporar herramientas tecnológicas en la educación matemática. El modelo ofrece un referente escalable para instituciones que busquen mejorar tanto la efectividad pedagógica como el éxito estudiantil en áreas STEM.

Para los docentes de matemáticas, la reforma ha impulsado un cambio de rol: de lectores tradicionales a diseñadores de entornos de aprendizaje, con énfasis en prácticas docentes reflexivas. Este giro prioriza el pensamiento matemático mediante interacciones en el aula



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

que incluyen validación y negociación social de significados. La reflexión continua sobre las prácticas de enseñanza ha consolidado un enfoque centrado en el estudiante y orientado a procesos, promoviendo la mejora constante de las estrategias pedagógicas.

### **Salgamos del aula, una experiencia para desarrollar competencias en el área de matemáticas**

Baltazar Ramón Parada

Colegio Las Américas, I.E.D de la Secretaría de Educación de Bogotá

bramonp@educacionbogota.edu.co

La ponencia presentada, pretende mostrar como se logra evidenciar el desarrollo de competencias matemáticas cuando se proponen actividades y retos matemáticos en entornos distintos al aula de clase, además se debe reconocer que al lado de los conceptos y procesos matemáticos se logra aportar formación en valores y se garantizan procesos de aprendizaje para favorecer a los jóvenes.

### **Una mirada crítica a La regla de L'Hopital**

Campo Elías González Pineda

Universidad Tecnológica de Pereira

cegp@utp.edu.co

En esta ponencia se muestra como la regla de L'Hopital es en general mal aplicada y su ineficiencia para calcular límites indeterminados. Se discuten los límites indeterminados fundamentales de la geometría y la función exponencial. Se dan una reglas que facilitan el calculo de algunos límites indeterminados que con dicha regla serian difíciles de calcular.

### **Desentrañando Emociones Académicas: Efectividad de Auto-Informe a través de la Teoría Cognitiva de las Emociones y la Teoría de Control-Valor en estudiantes de secundaria con fracaso escolar en matemáticas**

Carlos Alberto Jojoa Naspiran

Universidad de Cuauhtémoc. IE Pedro Uribe Mejía

carlos.jojoa.pum@gmail.com



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Ricardo Arrubla Sánchez  
Fundación Universitaria del Área Andina

La teoría cognitiva de las emociones (OCC) y la Teoría de Control Valor (CVT) son enfoques que abordan la comprensión de las emociones humanas en situaciones cotidianas y de contextos educativos. Por ello, este trabajo identifica y categoriza en forma efectiva las emociones de metas y las emociones de logro, a partir de la aplicación y posterior análisis de un Auto-Informe que permite la construcción y desarrollo de una Estructura Cognitiva en Contexto Emocional (ECCE) integrando las dos teorías. El estudio se realizó con 15 estudiantes de secundaria con Fracaso Escolar (FrE) en matemáticas de un colegio público del eje cafetero bajo un enfoque cualitativo. Para articular dichas teorías, se propuso un análisis de contenido y triangulación de datos. El análisis permitió identificar 464 experiencias emocionales diferentes, clasificadas en 17 tipos de emociones. La nueva distribución diaria de las emociones a través de tablas y figuras, destaca la eficacia del Auto-Informe en combinar ambas teorías y confirma su capacidad para ofrecer una comprensión de las emociones en la educación matemática. Los resultados muestran que la frustración es la emoción más experimentada, además, como las experiencias emocionales en el aula de clases (AuCl) se relacionan con las evaluaciones cognitivas y las metas establecidas dentro y fuera del entorno escolar. Así se trazan nuevas direcciones y enfoques pedagógicos centrados en el bienestar emocional del alumno. Se propone áreas de investigación futura, como la validación y refinamiento de los autoinformes, estudios longitudinales e intervenciones pedagógicas basadas en las emociones.

### **CONCEPTO DE ROTACIÓN, TRASLACION Y HOMOTECIAS MEDIANTE GEOGEBRA**

Cristián Camilo Pardo Garzón

Universidad del Quindío

[ccpardog@uqvirtual.edu.co](mailto:ccpardog@uqvirtual.edu.co)

Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

La ponencia del estudiante de pregrado Cristian Camilo Pardo, sobre los aprendizajes de los movimientos en el plano, a partir de los conceptos como la rotación, traslación y homotecias



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

mediante la aplicación de los niveles de Van Hiele y el uso de los recursos tecnológicos.

### **Equivalencias geométricas: Igualdad entre áreas de figuras bidimensionales**

Daniela Díaz Olave

Universidad del Valle

diaz.daniela@correounivalle.edu.co

Genny Rocío Uicab Ballote

Universidad Autónoma de Yucatán, México

La presente investigación, aborda el diseño de una actividad enfocada en la enseñanza de las equivalencias geométricas, específicamente la igualdad entre áreas de figuras bidimensionales. Esta investigación se desarrolla en el marco del proyecto iniciado en el verano de investigación Jaguar 2024, bajo la dirección de la Dra. Genny Rocío Uicab Ballote, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. A partir de un enfoque didáctico, se busca mejorar la comprensión de los conceptos geométricos mediante estrategias que favorezcan el aprendizaje significativo.

### **Enseñanza correlacionada de las matemáticas en la escuela bajo el enfoque integrado STEAM**

Eblin Martínez Martínez

Universidad de Antioquia

eblin.martinez@udea.edu.co

René Alejandro Londoño Cano

Universidad de Antioquia

La investigación pretende analizar contribuciones de maestros en la estructuración de una propuesta de currículo integrado STEAM para la enseñanza correlacionada de las matemáticas con otras ciencias en la escuela, con el fin de mitigar la fragmentación de sus saberes, favorecer su aplicación en problemas del mundo real e incrementar las posibilidades de que los estudiantes puedan proyectarse con mayor facilidad hacia carreras STEAM (Uzuriaga y Martínez, 2006 y García-Mejía y García-Vera, 2020). De esta manera, a partir de una propuesta de desarrollo profesional docente (Ponte, 2012) se hace necesario adoptar una me-



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

tecnología basada en diseño IBD, por lo que se pretende incursionar en un proceso tanto de innovación curricular como de prácticas de enseñanza.

### **Estado del arte en Educación Matemática: El caso de la universidad del Quindío**

Eliécer Aldana Bermúdez  
Universidad del Quindío  
Celiecerab@uniquindio.edu.co  
July Tatiana Gutiérrez Jiménez  
Universidad el Quindío

Esta ponencia tiene como objetivo reportar la producción de 35 Trabajos de Pregrado, 70 de Maestría, y 5 Tesis Doctorales, desarrolladas en la Universidad del Quindío en el Grupo de Investigación en Educación Matemática (GEMAUQ). Las investigaciones se han agrupado de acuerdo con las siguientes categorías: Líneas de investigación, objetos matemáticos, marcos teóricos y paradigmas metodológicos) con el fin de analizar y explorar diferentes aspectos relacionados con los avances y resultados de la investigación en educación matemática a nivel superior.

### **Comprensión y enseñanza de las razones trigonométricas en estudiantes con discapacidad visual, usando el Trigonotiflo.**

Estiven Valdés Vargas  
Universidad del Quindío  
estiven.valdesv@uqvirtual.edu.co  
Claudia Cecilia Vargas Ayala  
Universidad del Quindío

Este trabajo de investigación de desarrollo didáctico hace parte de los avances de la tesis de pregrado que los ponentes desarrollan en la universidad del Quindío en Colombia. Con él, se quiere implementar un material de apoyo didáctico de elaboración propia llamado Trigonotiflo, el cual es dinámico, tangible y en alto relieve. Al utilizar el Trigonotiflo se pretende facilitar la comprensión y la enseñanza de las razones trigonométricas básicas en



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

estudiantes con discapacidad visual de los grados 10° y 11° de bachillerato. Este trabajo de grado se desarrolla con un enfoque cualitativo, se aplica en un estudio de caso, pues cuenta con la participación de dos estudiantes de 14 y 15 años en condición de baja visión. Utiliza la ingeniería didáctica como metodología y tiene como objetivos específicos el diseño, la construcción, la aplicación y la validación de la pertinencia de esta ayuda didáctica. Hasta la fecha, este trabajo de grado va en su etapa de aplicación, mientras que la etapa de diseño y construcción es transversal a todo el cronograma, pues, para su mejoramiento, se nutre constantemente de los comentarios, sugerencias y demás aportes de los estudiantes del estudio de caso. Este trabajo es un aporte muy significativo para los docentes de matemáticas que enseñan en estos grados, y que constantemente requieren realizar ajustes razonables para este tipo de población. También, será una herramienta valiosa para los estudiantes con baja visión, pues les otorga más autonomía en el aprendizaje de la trigonometría, la cual les abre un abanico de posibilidades dada la transversalidad de esta en otras ciencias.

La proyección con esta propuesta de investigación es el diseño de una rúbrica de evaluación del objeto matemático que fortalezca la transformación curricular en las instituciones educativas de la región.

### **Conocimiento matemático de los profesores de básica primaria en el desarrollo de proyectos transversales.**

Eudys Esther Ballesteros Palmett

Universidad de Antioquia

[eudys.ballesteros@udea.edu.co](mailto:eudys.ballesteros@udea.edu.co)

Luz Stella Mejía Aristizábal y Carlos Mario Jaramillo López

Universidad de Antioquia

Esta investigación, que se realiza en una institución educativa pública de Medellín, Colombia, analiza el conocimiento matemático de los docentes de básica primaria en la integración de las matemáticas en proyectos transversales. A partir de una encuesta preliminar, se identificaron dificultades en la conceptualización de la transversalidad, el diseño e implementación de proyectos y la formación matemática docente.

El estudio, con enfoque cualitativo y basado en estudio de casos, emplea talleres de formación y técnicas como observación participante, entrevistas, comunidad de aprendizaje y análisis documental. La información se categoriza en Atlas.ti, permitiendo un análisis



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

detallado.

Las metodologías innovadoras en educación matemática, como la Resolución de Problemas (Lorenzo et al., 2022), STEAM (Ponte, 2007), Aprendizaje Basado en Proyectos (Lasso, 2023) y Proyectos Transversales (Garzón & Acuña, 2016), favorecen la integración disciplinar y el aprendizaje contextualizado. Sin embargo, su implementación depende del conocimiento docente en tres dimensiones clave: contenido especializado, didáctico y curricular (Ponte, 1998, 2012).

Los resultados en matemáticas en América Latina siguen siendo bajos. PISA 2022 indica que el 75

Para mejorar la enseñanza de las matemáticas se pueden implementar proyectos transversales como metodología, para la cual es esencial una formación docente que fomente la reflexión pedagógica, la integración curricular y la colaboración entre educadores. Este estudio busca evidenciar la importancia de fortalecer el conocimiento matemático de los docentes para lograr una enseñanza más significativa y contextualizada en la educación básica primaria; así como, identificar cuáles son los conocimientos matemáticos que pone en práctica un docente de básica primaria en el diseño e implementación de proyectos transversales.

### **Las matemáticas: desde el salón a la realidad**

Felipe González Morales

Colegio Rochester

fgonzalezm@rochester.edu.co

En nuestro colegio, la vivencia es una parte fundamental del proceso de aprendizaje. Reconocer el entorno como un elemento clave del aprendizaje permite que los estudiantes no solo adquieran conocimientos matemáticos, sino que también comprendan cómo aplicarlos en distintos contextos. Por ello, en todos los niveles se desarrollan proyectos que integran los temas vistos en clase, ya sea a través de la experimentación o de la modelación. Entre estos proyectos, creamos modelos 3D, juegos, representaciones matemáticas, análisis de datos y obras de arte, entre otros.

## **EL USO DE LAS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS EN TAREAS CONTEXTUALIZADAS MEDIANTE UN APRENDIZAJE HÍBRIDO**



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

FRANCISCO ANTONIO GUTIERREZ CARDONA  
UNIVERSIDAD DEL QUINDIO  
Cfagutierrez@uniquindio.edu.co  
JHON DARWIN ERAZO HURTADO  
UNIVERSIDAD DEL QUINDIO

La siguiente ponencia hace parte de la investigación a nivel de doctorado sobre la articulación de teorías, que permitan la configuración epistémica y cognitiva del concepto de gráficas trigonométricas a partir de su implementación en situaciones problema en contexto. Este se hace con la intención de fortalecer los aprendizajes de las matemáticas en estudiantes de secundaria y media, donde se propone diversas representaciones y registros desde expresiones algebraicas y/o simbólicas como las funciones y sus respectivas representaciones gráficas, que se moverán en el pensamiento numérico variacional, a partir de un aprendizaje en modalidad híbrida.

**Fortalecimiento del aprendizaje en estructura multiplicativa con una estrategia didáctica apoyada en la enseñanza kinestésica**

Francisco Javier Gómez  
Dinamarca (Medellín)  
fg19119@gmail.com

Implementar una estrategia didáctica apoyada en la enseñanza kinestésica para el fortalecimiento del aprendizaje estructura multiplicativa de los estudiantes de grado tercero de a de la Institución Educativa Félix De Bedout Moreno de la ciudad de Medellín, Colombia. Diagnosticar el nivel de las competencias de estructura multiplicativa en estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Félix de Bedout Moreno

Diseñar una estrategia didáctica apoyada en la enseñanza kinestésica para el fortalecimiento de las competencias de estructura multiplicativa en estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Félix de Bedout Moreno

Mostrar una estrategia didáctica apoyada en la enseñanza kinestésica para el fortalecimiento de las competencias de estructura multiplicativa apoyado en herramientas tecnológicas y Valorar el impacto de la enseñanza kinestésica en el fortalecimiento de las competencias de estructura multiplicativa en diferentes grados escolares de primaria y secundaria.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

**Implicaciones didácticas de las interpretaciones y usos de enunciados condicionales: entre la lógica, la matemática y el lenguaje común.**

Francisco Vargas  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
francisco.vargas03@uptc.edu.co

Se abordará, dentro del área de Educación Matemática, la presencia de diferentes interpretaciones de los conectivos lógicos (específicamente de la implicación lógica) en enunciados matemáticos y extramatemáticos. La perspectiva teórica adoptada será interdisciplinar, con elementos de la psicología del razonamiento, de la lógica, y de la pragmática de la comunicación junto con constructos teóricos propios de la educación matemática como el de obstáculo epistemológico (Brousseau), las concepciones intuitivas (Fischbein) y la perspectiva comunicacional (commognition) de Sfard. Se presentarán resultados que comprenden y extienden los ya publicados por el autor en (Vargas y Stenning, 2020a), y en (Vargas y Stenning, 2020b).

**Comprensión matemática a partir de la interacción artística con la Teoría Fractal**

Haliaphne Acosta Aguilar  
Universidad de Santiago de Chile  
haacostaa@unal.edu.co

En la presente charla se presentará y se dará a conocer la propuesta de un taller que pone en evidencia la interacción de los diversos saberes del Arte y la Ciencia. Para el diseño de este taller, que se divide en ocho sesiones, se llevó a cabo una revisión teórica y plástica de varios artistas y matemáticos, y se hizo uso del software (UltraFractal5), que permite la creación y apreciación de forma visual de la Teoría Fractal. Así, los asistentes además de conocer el taller propuesto, conocerán las creaciones y los resultados obtenidos de la primera puesta en escena del taller en cuestión.

Cada sesión del taller se realizó bajo parámetros establecidos que dan cuenta de la conexión y la comprensión de conceptos fundamentales de la Teoría Fractal: Autosimilitud, Iteración y Dimensión; conceptos que, en cada una de las actividades, se desarrolló plásticamente. Además, se realizó una introducción desde la historia del Arte, transversal a desarrollos Matemáticos, pasando por personajes como: Da Vinci, Escher, Fibonacci, Can-



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

tor, Mandelbrot, Koch, Kandinsky, Malévich, Mondrian, LeWitt, Vasarely, Calder, Agam, Nake, Noll y Nees.

De cada una de las sesiones se obtuvieron desarrollos plásticos y reflexiones en relación al Arte y la Ciencia, siendo esto lo que permitió concluir que el desarrollo de talleres, similares al que se llevó a cabo, permite el conocimiento, la comprensión, la interacción y la creación desde la Teoría Fractal; además de permitir experiencias de todo tipo, tanto visuales como sensitivas, espaciales y académicas. De igual forma, como menciona [3], la incorporación de este tema combina la curiosidad, la sencillez y la belleza, permitiendo enfocar las actividades del aula en búsquedas e investigaciones si estas son motivadas; es el momento preciso (secundaria) dado que se inicia el desarrollo de la capacidad de formalizar y se tiene un grado significativo de la abstracción a nivel general.

## **CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE CURVAS EN COORDENADAS POLARES**

Heiller Gutiérrez Zuluaga

Universidad del Quindío [hgutierrez@uniquindio.edu.co](mailto:hgutierrez@uniquindio.edu.co)

Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

El trabajo que se presenta es uno de los resultados de la investigación en desarrollo de estudios del doctorado en Ciencias de la Educación- Rudecolombia en la línea de Educación Matemática, la cual aporta a la reflexión académica de algunos elementos acerca del aprendizaje en lo relacionado con el pensamiento espacial y geométrico, en el cual poco se ha dado a conocer los significados que las coordenadas polares tienen en las acciones y en las actividades humanas. Dentro de las actividades propias del doctorado se realizó la pasantía internacional en la ciudad de Osorno (Chile) donde se desarrollaron diferentes actividades con estudiantes del programa para Profesor(a) de Educación Media en Matemática y Computación de la Universidad de los Lagos. Por ello, se realizó un trabajo cuyo propósito fue Indagar que conocimientos tienen los futuros profesores de matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia) y la Universidad de los Lagos (Chile) sobre curvas en coordenadas polares. La experiencia como docente de matemática en los diferentes niveles de formación me ha permitido identificar diversas dificultades que presentan los estudiantes, posiblemente



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

a la instrucción previa recibida, las cuales afectan el proceso de comprensión de las curvas en coordenadas polares, por lo cual, para este estudio se plantea como pregunta indagadora: ¿Qué conocimientos tienen los futuros profesores de matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia) y la Universidad de los Lagos (Chile) sobre curvas en coordenadas polares y su fenomenología?. Para dar respuesta a la pregunta, se aplicó un instrumento que consta de tres (3) interrogantes con el objetivo de indagar acerca del manejo que tienen los estudiantes del objeto matemático de curvas en coordenadas polares. El estudio permitió concluir entre otras, que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia) muestran un mayor dominio en temas relacionados al uso de los cardioides, mientras que los de Chile evidencian una mejor comprensión en aplicaciones que involucran curvas como la elipse. Además, algunos estudiantes presentan dificultades para pasar de una representación a otra en el mismo registro. Por otra parte, tanto los estudiantes de Colombia como los de Chile consideran importante incluir el estudio de otro sistema de representación distinto a las coordenadas rectangulares. Finalmente, los estudiantes de ambos países resaltan la utilidad de las coordenadas polares en distintos contextos.

### **UN ESCENARIO PROPICIO PARA LA COMPRENSIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON, MEDIANTE LA MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.**

Henry Grajales Echeverry

Universidad del Quindío [hgrajalese@uqvirtual.edu.co](mailto:hgrajalese@uqvirtual.edu.co)

Francisco Antonio Gutiérrez Cardona

Universidad del Quindío

Esta propuesta investigativa hace parte de un estudio más amplio en la formación de posgrado, en el campo de la Educación Matemática y en particular, la fenomenología originada desde la Física, en concreto la segunda ley de Newton. La secuencia didáctica a implementar, está pensada para estudiantes de educación media y tiene como objetivo consolidar en ellos el aprendizaje sobre los conceptos que configuran la Ley Fundamental De La Dinámica (Sebastiá, 2013), y la comprensión matemática de esta ley a partir de la modelación de sistemas de ecuaciones lineales. Es por esto, que desde los aportes realizados por Ubaldo et al. (2016), establece la relación entre estas dos teorías, para configurar los sistemas de ecuaciones lineales por medio de la fenomenología propia de la segunda ley de Newton llamada



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Tensión. En este sentido, se plantea una tarea en el contexto de la física orientada desde el marco teórico del análisis didáctico propuesto por Gómez (2007), a través, de sus cuatro tipologías de análisis (contenido, cognitivo, instruccional y actuación). Para ello, se plantea como metodología un enfoque cualitativo desde los postulados de (Creswell, 2009).

### **MathIAs: el Conocimiento especializado del Profesor y la Inteligencia Artificial en la formación de futuros profesores de Matemáticas.**

Jenny Patricia Acevedo Rincón

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander

jepaceri@uis.edu.co

En la actualidad los profesores (en formación y en ejercicio) cuentan con diversas herramientas que han desbordado cualquier capacidad humana de exploración y consumo para hacer de sus clases escenarios de innovación y transformación continua. Tal es el caso de la Inteligencia Artificial (IA) generativa que ha permeado varias profesiones y oficios, de manera que la docencia no se queda atrás. Su uso requiere de una exploración intuitiva y dedicada para que los resultados sean visibles en los esgueros por hacer del aula un escenario diferenciado y enriquecido de aprendizaje continuo (y retador) para quienes integran la comunidad educativa, principalmente estudiantes, profesores y padres de familia. Por lo que su uso inmediato permite la generación de contenidos adaptativos y podría transformar la enseñanza de las disciplinas abstractas en corto tiempo, si se considerara como un aliado estratégico visto desde la especialización del conocimiento del profesor que enseña matemáticas en los diferentes niveles educativos, lo que invita a revisar actuales parámetros de formación (inicial y continuada) de profesores que atiendan los retos del siglo XXI ante una sociedad en constante transformación y sobretodo, digitalizada. Por lo anterior, esta investigación pretende Caracterizar el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas revelado por los futuros profesores de matemáticas en las planeaciones didácticas enriquecidas con IA generativa con el fin de diseñar una propuesta formativa (inicial y continuada) para el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido matemático y la reflexión sobre las creencias de enseñanza de las matemáticas para una sociedad en constante transformación.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Estructuras y prácticas geométricas: el Conocimiento Especializado en la formación de profesores de primaria**

Jenny Patricia Acevedo Rincón  
Universidad Industrial de Santander  
jepaceri@uis.edu.co  
Campo Elías Flórez Pabón  
Universidad de Pamplona

La formación de profesores de distintos niveles educativos aborda aspectos didácticos y disciplinares de las matemáticas para aproximar las prácticas de enseñanza mediante el estudio de diversas teorías. Inicialmente, estos elementos convergen en la elaboración de planeaciones de clase, diseñadas para ser aplicadas en un salón de clases con estudiantes que poseen una comprensión básica de esta disciplina. Desde la perspectiva teórica del Conocimiento Especializado del Profesor que Enseña Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés Mathematics Teacher Specialised Knowledge), este estudio busca identificar los contenidos, prácticas y estructuras propias de las matemáticas que promuevan el desarrollo del conocimiento especializado —tanto didáctico como disciplinar— en los tópicos de Geometría y Medición, tal como se proponen en la formación de los futuros docentes de Educación Básica Primaria. La propuesta se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de investigación, el cual reconoce las experiencias que favorecen la construcción del conocimiento especializado en los futuros profesores. Entre sus conclusiones, se destaca la importancia de una formación docente basada en experiencias de aprendizaje que integren de manera articulada el conocimiento didáctico, pedagógico y disciplinar. En consecuencia, el estudio subraya que una formación inicial coherente y sólida es fundamental para que los docentes puedan guiar a sus estudiantes hacia un aprendizaje significativo y transformador, garantizando así una enseñanza de calidad en matemáticas.

### **Influencia de la Metacognición y las Inteligencias Múltiples en la Resolución de situaciones problema en matemáticas en educación Primaria**

Jesus Humberto Portilla Muñoz  
UNIVERSIDAD CESMAG - PASTO  
jhportilla@unicesmag.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Desde hace algunas décadas, el proceso de enseñanza de las matemáticas se denota lineal sin el criterio de un desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en el aprendizaje, más cuando se trata de una educación en primaria. En este contexto, la metacognición se contextualiza como el uso de estrategias y procesos cognitivos para la resolución de problemas matemáticos desde la planeación, monitorización, control y evaluación. En otro sentido, las inteligencias múltiples juegan un papel fundamental en la resolución de situaciones problema en matemáticas, ya que permiten a los estudiantes identificar sus propios procesos de pensamiento con la aplicación de estrategias personalizadas y mejorar su desempeño académico. Por lo anterior, en la actualidad los niños y niñas de educación primaria poseen aun dificultades en la comprensión y aprendizaje de las operaciones matemáticas permeando en se refleja y se vuelve consecutivo cuando ingresan a la educación media y secundaria creando un puente con los mismos escenarios a la educación superior. Por ende, resulta importante el cambio estratégico y metodológico frente a las competencias propias para la resolución de situaciones problema. En este sentido, el estudio analiza y conjetura la influencia en la aplicación de estrategias metacognitivas en la resolución de situaciones problema en matemáticas y cómo las inteligencias múltiples fortalecen los desafíos matemáticos de acuerdo a las diferentes habilidades de cada estudiante. Desde luego, es importante abordar los eventos que refieren a la planificación, retroalimentación y evaluación en escenarios que conllevan el proceso de resolución de situaciones problema. Para ello, es relevante concatenar la articulación entre la lógica, la creatividad, la imaginación, la interacción social y la autorregulación de criterios que son propios de las emociones en el aprendizaje. En efecto, “las estrategias metacognitivas usadas en la enseñanza de las matemáticas, buscan hacer de los conocimientos teóricos, constructos prácticos y convertir los saberes abstractos en herramientas concretas que mejoran los procesos cognitivos de enseñanza-aprendizaje en general” (Ordoñez y Sánchez, 2024, p. 27). De esta manera, los diferentes resultados de investigación permiten integrar procesos metacognitivos con un enfoque basado en inteligencias múltiples y como estos favorecen y conllevan un fortalecimiento en la comprensión y aprendizaje de los niños y niñas al enfrentar a situaciones problema en matemáticas. Asimismo, se destaca la importancia de implementar estrategias didácticas diversificadas que permitan a los niños y niñas desarrollar su pensamiento matemático de manera significativa y contextualizada. Palabras clave: Metacognición, inteligencias múltiples, resolución de problemas, educación primaria.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

**Pensamiento matemático sociocrítico y educación ambiental: Hacia la construcción de escenarios de aprendizaje emancipadores en la educación media**

Jhon Darwin Erazo Hurtado  
Universidad del Quindío  
jderazo@uniquindio.edu.co  
Eliécer Aldana Bermúdez  
Universidad del Quindío

Esta investigación se centró en la exploración del desarrollo del pensamiento matemático sociocrítico en estudiantes de educación básica secundaria, a través de la configuración de escenarios de aprendizaje donde se abordaron problemáticas contextualizadas con un enfoque ambiental. El trabajo se abordó desde el paradigma sociocrítico y la metodología cualitativa basada en la investigación-acción-participación, lo que permitió un ciclo iterativo de planificación, implementación, observación, reflexión y transformación necesario en la enseñanza de las matemáticas escolares, por lo que el propósito principal de este estudio fue el diseño e implementación de estrategias pedagógicas basadas en la resolución de problemas a partir de fenómenos medioambientales en contextos situados, para generar ambientes de aprendizaje transformadores y el desarrollo de un pensamiento matemático sociocrítico. Dado lo anterior, se buscó que estudiantes indagaran, desde sus intereses, problemáticas ambientales, para luego, utilizando herramientas matemáticas, analizar su impacto y promover así una educación matemática con sentido social, crítico y transformador, por ende, se diseñaron e implementaron situaciones problemáticas fundamentadas en el análisis de datos ambientales, utilizando herramientas matemáticas como la modelización mediante curvas de regresión, las cuales fueron trabajadas en aula a través de estrategias colaborativas que favorecieron el diálogo, el pensamiento crítico y la participación activa de los estudiantes en la construcción del conocimiento. El estudio se llevó a cabo en una institución educativa pública de Armenia, Colombia, con la participación de estudiantes de educación media y docentes de matemáticas. La selección de la población se realizó bajo criterios de accesibilidad y disposición para el desarrollo del estudio, permitiendo una interacción constante entre investigadores y participantes para la co-construcción de conocimiento en el aula. Para evaluar el impacto de las estrategias implementadas, se realizó un análisis cualitativo de las producciones escritas de los estudiantes, las discusiones en clase y sus reflexiones sobre las problemáticas ambientales abordadas. Particularmente, se analizó una situación ambiental utilizando el estudio de una



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

curva de regresión, lo que permitió observar cómo los estudiantes articularon conocimientos matemáticos con la interpretación crítica de datos ambientales. Además, se examinaron sus argumentaciones y la forma en que cuestionaron modelos matemáticos tradicionales desde una perspectiva sociocrítica. Finalmente, los resultados evidenciaron que la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque sociocrítico y ambiental no solo fortaleció la comprensión de conceptos matemáticos avanzados, sino que también promovió la formación de ciudadanos críticos y comprometidos con su entorno, pues se destacó que el pensamiento matemático sociocrítico permite trascender el aprendizaje instrumental de las matemáticas para convertirlas en una herramienta poderosas de análisis y transformación social. Asimismo, se concluyó que la modelización de fenómenos naturales y el análisis de datos ambientales constituyeron un medio eficaz para desarrollar habilidades analíticas y fomentar la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas reales, favoreciendo una educación matemática con sentido democrático y emancipador.

### **Aportes al desarrollo del pensamiento lógico matemático en la primera infancia, desde una articulación entre la motricidad fina y gruesa**

Jimena Alejandra García Reyes

Universidad del Quindío

[jimena.garcia@uqvirtual.edu.co](mailto:jimena.garcia@uqvirtual.edu.co)

Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

Esta propuesta de investigación explora los desafíos de la enseñanza y el aprendizaje del pensamiento lógico matemático en la educación inicial a través de una articulación entre la motricidad gruesa y fina se plantea la necesidad de superar las formas tradicionales de enseñanza que frecuentemente se centran en actividades como colorear y rellenar figuras las cuales no promueven adecuadamente el desarrollo del pensamiento crítico y analítico matemático el objetivo principal de este estudio es implementar una estrategia didáctica que integren de manera efectiva la motricidad fina y gruesa en el desarrollo del pensamiento lógico matemático en nivel preescolar.

## **DESARROLLO DE LA COMPETENCIA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

## **MATEMÁTICOS EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS DE LA SALUD**

JORGE DE JESUS TAMAYO ECHEVERRIA

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

JJTAMAYO@UNIMAGDALENA.EDU.CO

JHON JAIRO DE LA HOZ VILLAR

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

La modernización del estilo de vida, el vertiginoso desarrollo tecnológico y científico y el advenimiento de otras pandemias es cada vez latente, especialmente en los países más desarrollados y en vías de desarrollo, está llevando a que cada vez estemos más informados de lo que sucede tanto a nivel nacional e internacional sobre la evolución de muchas enfermedades infectocontagiosas; esto hace que la comunidad académica-científica esté siempre en contacto con eventos de carácter matemático y estadístico. Por todo lo anterior es importante potencializar y mejorar la educación en los primeros cursos de matemáticas en los estudiantes de ciencias de la salud y también mejorar la motivación de estos al estudio de las matemáticas, ya que los estudiantes presentan muchas veces dificultades para apreciar el poder de las matemáticas en ciencias de la salud.

Esta investigación tuvo como objetivo evaluar la efectividad y desarrollo de la competencia Resolución de Problemas Matemáticos (RPM), apoyadas en las competencias específicas, por medio de una intervención pedagógica especializada en estudiantes de Medicina que hacen parte de la Facultad de Ciencias de la Salud de una Universidad Pública del Caribe Colombiano; lo anterior fue posible, ya que se identificaron las disciplinas futuras que cursa el estudiante en el ciclo básico, que requieren dichas competencias, tales como las asignaturas de biofísica y bioestadística.

Se empleó un diseño de investigación cuasiexperimental, con un grupo control (GC) con 44 estudiantes y un grupo experimental (GE) de 49 estudiantes; esto incluyó un pre-test y post-test para medir las competencias específicas (argumentativa, interpretativa y propositiva) así como la competencia de RPM. El enfoque didáctico integró el aprendizaje significativo y sesiones guiadas de la RPM, fomentando la participación y la aplicación práctica. Como estrategia metodológica para captar el interés de los estudiantes fue importante vincular temas biomédicos tales como mediciones del cuerpo humano, flujos sanguíneos y de gases, cálculo de dosis, interpretación de gráficas epidemiológicas, etc., lo que permitió reforzar el aprendizaje y promover una comprensión conceptual más profunda.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Las puntuaciones post-test del grupo experimental mostraron un aumento notable en la eficiencia al resolver problemas matemáticos en comparación con el grupo control. Se comparó la ganancia de aprendizaje de cada uno de los grupos utilizando el índice de Hake  $h$ , que establece que:

ganancia baja:  $h < 0,3$ , ganancia media:  $0,3 \leq h < 0,7$ , ganancia alta:  $h \geq 0,7$ .

El índice de Hake alcanzado por el GC fue de  $h_{GC} = 0,76$  y por el GE de  $h_{GE} = 0,78$ . Se obtuvo un alfa de Cronbach de 0.81.

Es importante señalar que la enseñanza contextualizada de las matemáticas en los estudiantes de Medicina indica un efecto positivo de la resolución de problemas matemáticos; a su vez, les permite visualizar su utilidad con aplicaciones médicas en el mundo real, permitiéndoles a los profesores mejorar sus competencias específicas de resolución, procesos cognitivos en general y prepararlos mejor para su práctica clínica.

**Palabras clave:** Resolución de Problemas Matemáticos (RPM), aprendizaje significativo, competencias específicas, razonamiento cuantitativo.

## **EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA: MATEMÁTICA PARA LA CREATIVIDAD**

JULIAN DAVID SUAREZ GONZALEZ

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

u20192183421@usco.edu.co

DANIA NAYELY PARRA QUINTERO

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Esta propuesta pedagógica de investigación para la educación básica y media en Colombia, tiene en cuenta el modelo curricular abordado por Cárdenas, M.M. (2024). Que se concreta en los siguientes términos: “Es un viaje de descubrimiento y resolución de problemas: • Para los estudiantes y la familia, Aprendizaje Activo que incentiva intereses, habilidades y capacidades para desarrollar el pensamiento matemático; • Para los docentes, orientar con actividades creativas el Aprendizaje Autónomo en los estudiantes; • Para la comunidad educativa ampliada, es una propuesta curricular escrita en forma de colección



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

didáctica denominada «Matemáticas para la Creatividad», que desarrolla con enfoque Nolineal, Interdisciplinario y en diversos contextos”. Con una visión matemática interdisciplinaria se trata de un desarrollo pedagógico de las ciencias de la complejidad tal como lo explican los modelos pedagógicos propuestos por Jean Piaget y Rolando García. En relación a tres ejes fundamentales: • La creatividad como un elemento clave de pensamiento (De Bono, E. 1992); • Para la solución de problemas que se ejecuta a través de proyectos de aula abierta (Dewey, J. 1946); • Este método fortalece el pensamiento crítico para la comprensión reflexiva (Lipman, 2003). con una visión matemática interdisciplinaria e integradora.

### **Conocimiento Didáctico Matemático de Profesores Rurales Sobre el Sistema Métrico Decimal: Una Trayectoria didáctica.**

July Tatiana Gutiérrez Jiménez

Universidad del Quindío

[jtgutierrez@uniquindio.edu.co](mailto:jtgutierrez@uniquindio.edu.co)

Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

Desde la perspectiva del contexto rural, la educación en y para la diversidad adquiere una relevancia singular, pues los entornos multigrado y las realidades específicas de estas comunidades exigen procesos educativos adaptados a sus características particulares (Alarcón et al., 2024). En estos escenarios, las diferencias culturales, socioeconómicas y los variados ritmos de aprendizaje de cada estudiante obligan a repensar el modelo tradicional de enseñanza (Ochoa et al., 2024). Es imperativo diseñar estrategias pedagógicas inclusivas y flexibles que consideren, por ejemplo, la integración de saberes locales y la participación activa de la comunidad, elementos que favorecen la contextualización del currículo y promueven un aprendizaje significativo. Además, la heterogeneidad de estos entornos demanda una formación continua y especializada para los docentes, quienes deben estar preparados para abordar desafíos derivados tanto de la diversidad de estilos de aprendizaje como de la escasez de recursos. En este sentido, Barreto et al. (2024) destacan la necesidad de adaptar la enseñanza a las particularidades del entorno rural para garantizar una educación equitativa, mientras que Hidalgo (2021) subraya la urgencia de desarrollar nuevas perspectivas en la enseñanza de las matemáticas que respondan a los retos propios de estos contextos. Estas innovaciones no solo buscan elevar la calidad educativa, sino también impulsar una



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

transformación que permita a los estudiantes y a la comunidad en general acceder a oportunidades de aprendizaje que reflejen y valoren su identidad y contexto local. El objetivo de este estudio es examinar en profundidad los significados personales emergentes en los maestros rurales respecto al Sistema Métrico Decimal, utilizando una trayectoria didáctica fundamentada en el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2017) como herramienta principal para el cambio. Esta investigación no se limita a optimizar la enseñanza de las matemáticas, sino que también busca transformar radicalmente la percepción y comprensión de los docentes que trabajan en contextos multigrado de zonas rurales, reconociendo que sus experiencias y saberes personales constituyen un componente esencial en el proceso educativo. Para alcanzar estos fines, se ha diseñado un estudio que integra tanto los significados personales —las creencias, actitudes y experiencias individuales de los maestros— como las estructuras institucionales que influyen en la práctica educativa. La integración de estas dos dimensiones permite configurar un entorno educativo inclusivo y diverso, en el que se aborden de manera efectiva los desafíos específicos de la enseñanza en contextos rurales, tales como la escasez de recursos, la diversidad cultural y la necesidad de adaptarse a múltiples ritmos de aprendizaje (Gutiérrez, 2024; Gutiérrez et al., 2024). El estudio se fundamenta en un enfoque metodológico cualitativo (Bisquerra Alzina, 2022) y en la técnica del estudio de casos (Stake, 2020), lo que permite una exploración detallada y contextualizada de la experiencia docente. La incorporación de pautas de valoración e idoneidades se erige como una herramienta clave para lograr una transposición didáctica efectiva, facilitando el paso de los conocimientos teóricos a prácticas pedagógicas que respondan a las realidades específicas de los entornos rurales. Así, esta investigación no solo contribuye a enriquecer el conocimiento didáctico matemático, sino que también se posiciona como un agente de cambio en la formación y actualización profesional de los docentes, promoviendo una educación que sea simultáneamente inclusiva, contextualizada y transformadora. Los resultados obtenidos a partir de este enfoque metodológico evidencian que los docentes rurales asignan significados profundamente personales al Sistema Métrico Decimal, lo que revela una relación única entre su experiencia profesional y las realidades culturales y sociales de sus comunidades. Este hallazgo subraya la necesidad de comprender cómo las vivencias y percepciones individuales influyen en la forma en que se construye y se transmite el conocimiento matemático en contextos específicos. Además, se destaca la importancia de diseñar estrategias pedagógicas y didácticas que se ajusten a las particularidades de los entornos educativos rurales. Estas estrategias deben estar orientadas a atender los desafíos específicos que enfrentan tanto los estudiantes como los profesores,



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

considerando factores como la escasez de recursos, la diversidad cultural y la presencia de entornos multigrado (Sua, 2023). La adaptación de la enseñanza a estas condiciones no solo favorece la equidad educativa, sino que también enriquece la experiencia de aprendizaje al integrar saberes locales y contextuales. En conclusión, este estudio resalta la relevancia del Conocimiento Didáctico Matemático en contextos rurales, al tiempo que enfatiza la necesidad de enfoques educativos inclusivos y adaptativos que impulsen una enseñanza de calidad. La aplicación de estrategias fundamentadas en el lente teórico del Enfoque Ontosemiótico permite abordar de forma integral las diversas idoneidades didácticas, así como los significados personales e institucionales, facilitando una comprensión más profunda y significativa del Sistema Métrico Decimal. Esta aproximación metodológica no solo ayuda a superar las barreras presentes en entornos multigrado, sino que también favorece la creación de un ambiente de aprendizaje inclusivo y diverso, donde las diferencias individuales se convierten en un recurso valioso. En este escenario, los profesores rurales juegan un papel fundamental al contextualizar la enseñanza de las matemáticas para que responda a las necesidades y realidades de sus comunidades, lo que a su vez impulsa el desarrollo profesional docente y contribuye a la mejora sostenida de la calidad educativa en nuestra región.

### COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Luis Adriano Romero Osorio

Universidad del Quindío

[luisa.romero@uqvirtual.edu.co](mailto:luisa.romero@uqvirtual.edu.co)

Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

Esta investigación, surge a partir de un trabajo de investigación en la línea de educación matemática a nivel de pregrado, por otro lado, este proyecto profundiza en la comprensión del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes de licenciatura en matemáticas en la universidad del Quindío. Por lo tanto, mediante una experiencia de aula se pretende identificar la manera en cómo transitan los estudiantes cuando se ven expuestos a problemas relacionados con la integral definida, como consecuencia, emerge el planteamiento del problema de ¿Cómo desarrollar un proceso de enseñanza centrado en el aprendizaje, para fortalecer la Comprensión del concepto de Integral Definida, mediando una descomposición



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

genética del elemento matemático? Por consiguiente, con el fin de dar respuesta al planteamiento se propone como objetivo Fortalecer la Comprensión/construcción del concepto de Integral Definida, mediante un proceso de enseñanza centrado en el aprendizaje. para ello este estudio profundiza en la teoría APOS la cual está relacionada con las construcciones mentales, que son, las acciones, los procesos, los objetos, y los esquemas , activado por los mecanismos de construcción que hacen los estudiantes como son, la interiorización, la coordinación, la encapsulación, conversión, desencapsulación y la tematización de los objetos matemáticos (Dubinsky 1991). Esta teoría se apoya en los fundamentos teóricos y epistemológicos de Piaget (1982) desde la abstracción reflexiva. Bajo este orden de ideas, este proyecto usa un paradigma interpretativo, el cual, busca interpretar las realidades en el aula de clase de los estudiantes como actores principales del proceso enseñanza/aprendizaje (Hernández Sampieri, 2018), apoyado en un enfoque cualitativo (Bisquerra, 2004). de igual manera, la metodología propia de este marco teórico es el método ACE (Actividades, reflexión en Clase, ejercicios) (Arnon 2014), de igual manera, esta investigación toma los fundamentos y tiene como referencia la tesis doctoral de Aldana (2011) Para el desarrollo de esta investigación, se implementaron diferentes secuencias didácticas, cada una con un cuestionario articulado al eje de la secuencia, del mismo modo, al principio de la investigación se realizó una prueba diagnóstica, la cual permite realizar una comparativa en función de los procesos esperados, y los procesos realizados por los estudiantes. Así mismo, esta experiencia permitió indagar acerca de los conceptos previos de los estudiantes, y del como esa transición de temas fundamentales, como funciones y límites, se ve ligado a la comprensión de un tema de matemática avanzada como lo es la integral definida. Por ello, en esta ponencia , se desarrollará una comparación entre los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba diagnóstica, y los resultados de aquellos estudiantes que participaron e el desarrollo de las secuencias didácticas.

### **El desarrollo de la inteligencia viso-espacial a través de las nociones topológicas.**

Mariam Angelly Jiménez Agudelo

Secretaria de Educación de Dosquebradas – Risaralda.

angelly292@gmail.com

Carlos Andrés Barco Rojas

Escuela Superior de Administración Pública ESAP



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

La educación inicial requiere experiencias estimulantes para el reconocimiento del espacio y los objetos. Las experiencias deben abordar la totalidad del espacio, incluidas las nociones topológicas, menos exploradas en la educación inicial. Desde un enfoque neuropsicológico, estas experiencias fomentan el desarrollo del pensamiento espacial y la percepción de objetos en el espacio. La propuesta de intervención que se plantea busca fomentar el desarrollo de la inteligencia viso-espacial en niños de preescolar a partir de la estimulación de habilidades de procesamiento visual y la exploración de nociones topológicas básicas como interior, exterior, frontera, continuidad y homeomorfismo. Las actividades diseñadas buscan estimular habilidades visuales y perceptivas, así como la construcción de objetos en transformaciones topológicas equivalentes. La metodología se basa en la experimentación, observación, razonamiento y manipulación, promoviendo el desarrollo del pensamiento espacial. La relación entre habilidades visuales y la topología es significativa, pero poco explorada en la población preescolar. En conclusión, esta propuesta destaca la importancia de la experimentación, el juego y la curiosidad en la comprensión del entorno para los niños en la educación inicial; la investigación académica en este ámbito es limitada, lo que resalta la relevancia de este estudio para comprender mejor la relación entre procesamiento visual y topología en la etapa preescolar.

### **MathLinkUCN: Un espacio de inclusión y desarrollo del talento matemático en Antofagasta, Chile.**

Matías Benjamín Fábrega Fajardo

Universidad Católica del Norte

[matias.fabrega@alumnos.ucn.cl](mailto:matias.fabrega@alumnos.ucn.cl)

Sebastián Cuéllar Carrillo

Universidad Católica del Norte

MathLinkUCN es un programa semestral de la Universidad Católica del Norte en Antofagasta, Chile, orientado al desarrollo del talento matemático en estudiantes de altas capacidades de enseñanza media. Se estructura en niveles progresivos según edad y experiencia, abordando contenidos como resolución de problemas, teoría de grafos, álgebra y programación. Las actividades incluyen clases semanales, proyectos personales, mentoría, electivos temáticos y charlas de divulgación. Desde su creación en 2023, ha acogido a más de 120



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

estudiantes, consolidando una experiencia pedagógica inclusiva, inmersiva, contextualizada e innovadora en la región de Antofagasta.

**SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL MARCO DE LOS NIVELES DE VAN HIELE PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ELIPSE EN LA EDUCACIÓN MEDIA A TRAVÉS DEL USO DE TIC.**

Maycol Andres Vasquez Diaz

Universida del Quindio

MAVASQUEZD@uqvirtual.edu.co

Francisco Antonio Gutierrez Cardona

Universidad del quindio

El presente trabajo de investigación se enmarca en el área de profundización de educación matemática. La finalidad del trabajo es diseñar una secuencia didáctica, en la cual se pueda implementar con el uso del software GeoGebra mediado por el modelo TPACK, para la comprensión del concepto de la elipse por medio de la representación gráfica y algebraicas clasificadas en cada uno de los niveles del modelo de Van Hiele.

Esta secuencia se implementó en un grupo de veintitrés (23) estudiantes de grado undécimo del colegio oficial Rafael Uribe Uribe ubicado en el municipio de Calarcá del departamento del Quindío Colombia, aplicando la metodología de los modelos de VAN HIELE

**Explorando las relaciones geométricas entre el perímetro y el área**

Yenny Fernanda Millan Sanchez

Universidad del Quindío

yennyfdamillan@gmail.com

Linda Poleth Montiel Buriticá

Universidad Autónoma de Guerrero

El propósito de este estudio es explorar las relaciones geométricas entre el perímetro y el área que establecen los estudiantes de primaria de una institución educativa del municipio del Valle. Para ello, se diseñaron tres secuencias didácticas, cada una compuesta por una consigna matemática y tres momentos, siguiendo las directrices de los registros de representación de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Duval (2006). Un ejemplo de estas secuencias didácticas se ilustra en la Imagen 1, en la cual se muestra su estructura. Estas directrices se toman como una perspectiva crucial, puesto que los registros semióticos proporcionan herramientas para desarrollar la aprehensión conceptual y favorecen la transición entre distintos registros de representación, un proceso en el que las funciones cognitivas juegan un papel fundamental.

En este sentido, la capacidad de los estudiantes para movilizar y articular diferentes formas de representación —como gráficas, expresiones numéricas y lenguaje verbal— no solo fortalece su comprensión de los conceptos geométricos, sino que también potencia su razonamiento matemático y su capacidad para resolver problemas en diversos contextos. La investigación se enmarcó en un enfoque cualitativo (Creswell, 2017) y se desarrolló como un estudio de casos (Stake, 2020), con la participación de veintisiete estudiantes. Algunos de los resultados obtenidos en la aplicación de las secuencias didácticas, evidencian la importancia de los registros de representación semiótica para el aprendizaje, ya que permiten a los estudiantes movilizar diferentes formas de expresión matemática, promoviendo una construcción más sólida del conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez, el profesor, por su parte, también tiene la responsabilidad de guiar este proceso, seleccionando, diseñando adecuadamente cada una de sus clases de manera progresiva. De tal forma que encamine a los estudiantes al desarrollo de las funciones cognitivas, para garantizar la interiorización de los conceptos matemáticos en mención.

### **Una apuesta a la inclusión: potenciando el pensamiento lógico-matemático mediante las Matemáticas Recreativas, en armonía con la discapacidad visual**

Yorla Tobar Valencia

Universidad del Cauca

yorlatoba@unicauca.edu.co

Aumentar el interés hacia las matemáticas y lograr buenos resultados en su enseñanza y aprendizaje se ha convertido en una preocupación de profesores actuales y en formación; mientras que los estudiantes en edad escolar se preguntan por su utilidad en la vida cotidiana. En el año 2024, esto nos motivó a desarrollar la práctica pedagógica con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga, ubicada en Popayán, Cauca, donde pudimos evidenciar dichas preocupaciones como profesoras en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca. Nuestro mayor reto fue adap-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

tarnos para garantizar la participación de una estudiante con discapacidad visual (ceguera total congénita), llamada Lorena, que nos permitió explorar por primera vez la educación inclusiva, descrita por Acosta (2015) como una forma de convivir y explorar la diversidad, asegurando la igualdad de derechos y oportunidades para todos; esto requiere brindar una enseñanza equitativa a todos los estudiantes y estructurar las clases adaptadas al tacto y el oído de los estudiantes con discapacidad visual, utilizando materiales acordes a sus necesidades y capacidades, con diferentes texturas que representen la realidad, como modelos tridimensionales. Con la intención de fomentar la transversalidad de las matemáticas en otros espacios, el proyecto fue extendido hacia el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, ya que es útil en todas las áreas académicas, en nuestra formación integral y en la toma de decisiones en la vida diaria. De acuerdo con Aristizábal (2021), este pensamiento permite a los estudiantes reconocer y trabajar sus errores, tomar decisiones de manera lógica y fomentar la capacidad argumentativa, aspectos que son influyentes en el desempeño académico al razonar lógicamente. Como parte del proceso formativo se espera que los estudiantes dominen este pensamiento, pero usualmente no se trabaja explícitamente en su desarrollo, sino que se espera que el estudiante lo desarrolle naturalmente de acuerdo a su edad. Por lo anterior, se desarrolló la práctica pedagógica en el marco de la educación inclusiva, enfocada en fomentar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en el grupo de estudiantes de grado décimo a través de las Matemáticas Recreativas, un curso electivo en nuestra carrera que se aleja de la memorización de fórmulas y se adapta a las necesidades educativas; además, permite conocer la utilidad de las matemáticas en contextos cotidianos como los espacios de juego tan importantes en la edad escolar. De acuerdo con Gardner (1997), las Matemáticas Recreativas son un conjunto de actividades lúdicas, juegos y acertijos para enseñar matemáticas de manera atractiva al buscar soluciones y estrategias para ganar; estas promueven el desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes y favorecen el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

### **Desarrollo del Pensamiento Espacial Métrico en Educación Inicial mediante la implementación de manipulativos físicos**

YUDY CASTILLO PALOMINO

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

yudy.castillo@uqvirtual.edu.co

Eliécer Aldana Bermúdez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

En esta propuesta se abordan elementos relacionados al aprendizaje de las figuras geométricas y a su vez, se exploran algunos desafíos que involucran el desarrollo del pensamiento Espacial Métrico mediante la implementación de objetos manipulables, en donde se infiere la necesidad de implementar algunas secuencias didácticas las cuáles permiten identificar los errores y las dificultades que se presentan en los estudiantes al momento de enfrentarse a un problema. Este estudio tiene como objetivo desarrollar el pensamiento espacial métrico de niños en educación inicial, a partir de Situaciones didácticas asertivas y la implementación de material manipulativo. La evidencia de las dificultades presentadas en los estudiantes con relación a la construcción y aprendizaje del concepto de las figuras geométricas ha presentado algunos antecedentes los cuales se han manifestado en esta literatura en donde se expresa la preocupación por la manera tan tradicional en la que se están transmitiendo los conceptos y su aprendizaje. Debido a esto, esta propuesta de investigación señala el vínculo e interconexión entre la teoría y práctica al momento del estudiante resolver o enfrentarse a problemas contextualizados mediante el uso o la implementación de manipulativos físicos. Debido a esto, se espera que los estudiantes del grado preescolar puedan generar nuevos conocimientos en el objeto matemático que se quiere trabajar, y a su vez, desarrollen habilidades que les facilite la comprensión de conceptos de manera más creativa y diversificada.

### 2.6. Física matemática

#### **Takesaki duality and some of its possible physical applications**

Aleksandr Pinzul

Instituto de Física, Universidade de Brasilia

[aleksandr.pinzul@gmail.com](mailto:aleksandr.pinzul@gmail.com)

We start with reviewing the notion of continuous crossed products of von Neumann algebras by the action of some Abelian group. In this framework, Takesaki's duality is introduced. Restricting to the case when the Abelian group is  $\mathbb{R}$ , allows us to make this consideration more "physical".



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

After that we discuss the relevance of this mathematical theory to physics. Towards this end, we briefly discuss two examples: Quantum Field Theory on de Sitter space (Witten et al) and the measurement problem in non-Abelian gauge theories (the work in progress with A. Balachandran).

### **Topological phases of non-interacting systems: A general approach based on states**

Giuseppe De Nittis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

denittis.giuseppe@gmail.com

In this work we provide a classification scheme for topological phases of certain systems whose observable algebra is described by a trivial  $C^*$ -bundles. The classification is based on the study of the homotopy classes of configurations, which are maps from a quantum parameter space to the space of pure states of a reference fiber  $C^*$ -algebra. Both the quantum parameter space and the fiber algebra are naturally associated with the observable algebra. A list of various examples described in the last section shows that the common classification scheme of non-interacting topological insulators of type A is recovered inside this new formalism.

### **Renormalization on the DFR spacetime**

Juan Felipe Lopez

Universidad de los Andes

jf.lopezr@uniandes.edu.co

Andrés Fernando Reyes Lega

Universidad de los Andes

An approach to renormalization of scalar fields on the Doplicher-Fredenhagen-Roberts (DFR) quantum spacetime is presented. The effective non-local theory obtained through the use of states of optimal localization for the quantum spacetime is reformulated in the language of (perturbative) Algebraic Quantum Field Theory. The structure of the singularities associated to the non-local kernel that codifies the effects of noncommutativity is analyzed



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

using the tools of microlocal analysis.

### Berry and Uhlmann Phases

Julián David Calderón Gómez

Universidad de los Andes, Pontificia Universidad Católica de Chile

jd.calderon@uniandes.edu.co

La fase geométrica, descubierta por primera vez por M. V. Berry (1984) en el llamado régimen adiabático, fue posteriormente reinterpretada por B. Simon (1984) como la holonomía de una conexión natural que gobierna el transporte paralelo de estados cuánticos puros en un espacio de Hilbert. Basándose en esta idea, A. Uhlmann (1986) extendió el concepto a estados mixtos. En este contexto, L. Dabrowski y A. Jadczyk (1989) profundizaron en el marco de Uhlmann, dotándolo de la estructura de un fibrado principal e interpretando la fase como una holonomía asociada. Siguiendo esta línea, Corach y Maestripieri (2001) desarrollaron una construcción análoga en el contexto de las  $C^*$ -álgebras, considerando una fibración principal sobre el espacio de elementos positivos e invertibles del álgebra y obteniendo la ecuación de elevación horizontal, en concordancia con las ideas originales de Uhlmann, Dabrowski y Jadczyk. La fase de Uhlmann ha sido estudiada en el contexto de sistemas fermiónicos unidimensionales con invariancia traslacional, como el modelo de Ising y la cadena de Kitaev. En el caso de temperatura cero, dentro del modelo de Ising XY, la fase de Berry asociada al Hamiltoniano de una sola partícula, parametrizado por la zona de Brillouin, coincide con el índice  $Z_2$  derivado del conocido teorema de Shale-Stinespring. La fase de Uhlmann emerge entonces como un candidato natural para caracterizar este índice en el caso de temperatura finita  $T > 0$ . Viyuela, Rivas y Martín-Delgado (2013) han mostrado que, en el límite de temperatura cero, la fase de Uhlmann recupera su valor correspondiente a temperatura nula. En este trabajo, exploramos la relación entre la fase de Uhlmann y la fase de Berry obtenida mediante un proceso de purificación, formulado en el marco de una  $C^*$ -álgebra unital  $A$ . Establecemos una condición suficiente para que esta correspondencia se mantenga a nivel del espectro de las respectivas holonomías. Este es un trabajo en conjunto con Andrés Reyes Lega, Profesor Asociado del Departamento de Física de la Universidad de los Andes, y Alexander Cardona Guío, Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Approximation of the quasi-local Bartnik mass in general relativity

Leon Escobar-Diaz

Universidad del Valle, Colombia.

leon.escobar@correounivalle.edu.co

Chris Stevens

University of Canterbury, New Zealand.

In talk, we show how to employ the eth-operators and the spin-weighted spherical harmonics to express the ADM mass of a static space-time based on the mean values of its components over a radius- $r$  sphere. While initially derived for standard spherical coordinates, we showcase its adaptability by demonstrating its usefulness in expressing a quasilocal mass—specifically, the Bartnik mass—of an almost round 2D-hypersurface in terms of some specific boundary conditions.

### Some calculations of conformal classes on the torus

Leonardo A. Cano G.

Universidad Nacional de Colombia

lcanog@unal.edu.co

In the talk we show some calculations which relate rotational tori, product tori and Hopf tori.

### PRODUCTO TENSORIAL Y APLICACIONES

LILIANA POSADA VERA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

liliana.posada@correounivalle.edu.co

El concepto de producto tensorial aparece por primera vez en 1938, donde Whitney descubrió la construcción de un producto tensorial para grupos y módulos abelianos. Hasta entonces, esta operación se conocía indirectamente en casos especiales como el producto tensorial de espacios vectoriales. La definición de producto tensorial se amplió con el paso de los años. Luego Schatten escribe sobre normas cruzadas y aborda dos de ellas: la mayor: la



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

norma tensorial proyectiva, y la menor: la norma tensorial inyectiva. Grothendieck extendió posteriormente la teoría de espacios vectoriales topológicos a los productos tensoriales de espacios localmente convexos (los denominados espacios nucleares). El objetivo de esta ponencia que es de tipo divulgativo, busca mostrar la incursión del producto tensorial en algunos contextos como la teoría de la medida en el caso vectorial y en la física cuántica donde aparece el producto tensorial infinito de espacios de Hilbert y los espacios de Fock. Lo que se quiere mostrar son algunas propiedades y resultados matemáticos que caracterizan al producto tensorial en estos contextos.

### **Antifragilidad y respuesta al daño en la sincronización de osciladores en redes**

Manuel Polo González

Universidad Nacional de Colombia

MPOLOG@UNAL.EDU.CO

En esta investigación, presentamos un marco matemático para evaluar el impacto de los daños, definidos como la reducción del peso en un enlace específico, sobre sistemas oscilantes idénticos gobernados por el modelo de Kuramoto y acoplados a través de redes de peso. Analizamos cómo las modificaciones de peso en un único enlace afectan al sistema cuando su función global es lograr la sincronización de osciladores acoplados a partir de fases iniciales aleatorias. Se introducen diferentes medidas que permiten la identificación de casos en los que el daño mejora la sincronización (respuesta antifrágil), lo deteriora (respuesta frágil) o no tiene un impacto significativo. Utilizando soluciones numéricas del modelo de Kuramoto, investigamos los efectos del daño en enlaces de red donde surge la antifragilidad. Nuestro análisis incluye gráficos de lollipop de tamaños variables y una evaluación completa y todos los enlaces de 109 grafos no isomorfos con seis nodos. El enfoque es general y puede aplicarse para estudiar la antifragilidad en otros sistemas osciladores con diferentes mecanismos de acoplamiento, ofreciendo una vía para la exploración cuantitativa de la antifragilidad en diversos sistemas complejos.

### **Gas de Fermi en un espacio no-conmutativo**

Nicolás Fernando Pérez Cantillo

Universidad de los Andes



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

n.perez@uniandes.edu.co

La presente propuesta de ponencia tiene como objetivo buscar vincular conceptos clave de la física estadística, la mecánica cuántica y la geometría no-conmutativa para obtener una nueva perspectiva sobre los efectos de presiones de degeneración en espacios no-conmutativos. Para ello, el trabajo se centrará en tres aspectos principales: en primer lugar, la reproducción del operador de Dirac en un círculo y en una esfera bidimensional, utilizando herramientas del álgebra de Clifford. En segundo lugar, se calculará la presión de degeneración de un sistema de fermiones tanto en geometrías convencionales, en las estructuras propuestas, como no-conmutativas, siendo estas últimas modeladas mediante la representación de la esfera fuzzy a partir de matrices  $n \times n$ . Finalmente, se compararán los resultados obtenidos a ambas geometrías para identificar nuevas conexiones entre estos campos y su aplicabilidad en la descripción de la presión de degeneración y un acercamiento al colapso estelar. Este estudio puede abrir caminos hacia nuevas interpretaciones de la degeneración estelar en sistemas fermiónicos y el comportamiento de la materia bajo condiciones extremas.

### 2.7. Geometría

#### **Some results of the extension of the current theory in $\mathbb{R}^n$ to $C^2$ -manifolds.**

Alvaro Jaramillo

Universidad Tecnológica de Pereira

aljamil@utp.edu.co

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

This presentation introduces an extension of the classical theory of currents in  $\mathbb{R}^n$  to the more general setting of  $C^2$  differentiable manifolds. We review the fundamental definitions in the Euclidean case, then develop an analogous formulation on manifolds, using local coordinate charts and the underlying differentiable structure. In particular, we focus on studying the mass of a current and the flat norm, and we show how both notions can be coherently and effectively defined and analyzed in this new setting. The mass continues to be interpreted as a measure of the current's geometric size, while the flat norm allows one



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

to quantify the distance between currents, even when they exhibit irregularities or have different boundaries. We show that several fundamental results from the classical theory, such as the lower semicontinuity of the mass and the characterization of normal currents can be extended to the case of  $C^2$  manifolds.

### **Regularidad óptima de geodésicas y encajamientos para métricas de Hölder**

Andrés Vargas Domínguez

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá

[a.vargasd@javeriana.edu.co](mailto:a.vargasd@javeriana.edu.co)

La existencia de encajamientos isométricos de variedades con métricas Riemannianas diferenciables en espacios Euclidianos es un problema famoso que John Nash resolvió positivamente en los años setenta. Más de veinte años después, S. Ivanov y D. Burago consideraron el mismo problema en el contexto de métricas diferenciables de Finsler, mostrando cuán diferente puede ser el caso puramente Finsleriano del caso Riemanniano. De hecho, la situación para encajamientos isométricos (incluso locales) para métricas Hölder continuas, pero no diferenciables, es mucho más delicado. En esta charla se introducen algunas herramientas que permiten resolver óptimamente este problema en el contexto Finsleriano general. Por ello, el objetivo es doble. La primera parte consiste en estudiar la regularidad óptima de las geodésicas asociadas a métricas Hölder continuas y, segundo, como consecuencia de ello, obtener resultados sobre la existencia de encajamientos isométricos de variedades dotadas de estas métricas en espacios normados.

### **Multiestacionalidad en redes de reacciones químicas**

Astrid Liliana Contreras Mendoza

Universidad Industrial de Santander

[astrid.122196@gmail.com](mailto:astrid.122196@gmail.com)

Las Chemical Reaction Network Theory (CNRT) se originó en la década de los 70 a través del trabajo pionero de Fritz Horn y Roy Jackson. Esta teoría se desarrolló con el propósito de modelar matemáticamente sistemas complejos de reacciones químicas. Su enfoque es único porque nos permite estudiar la dinámica y estabilidad de estos sistemas químicos sin la



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

necesidad de conocer todos los parámetros cinéticos exactos.

Las redes de reacciones representan interacciones entre especies y estas interacciones se pueden modelar por medio de un grafo, y la evolución de las concentraciones de las especies por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que en muchos casos de interés van a ser polinomiales.

En esta charla se presentará una introducción a este campo de las Redes de Reacciones (CRNT), las estructuras básicas que se estudian y algunos métodos y problemas comunes. Nos enfocamos en analizar los estados estacionarios del sistema, abordando las siguientes preguntas: Dada una red de reacción química, una cinética y unas constantes de reacción específicas, ¿existe un estado de equilibrio en el sistema? En caso afirmativo, ¿puede haber más de uno? Además, considerando una concentración inicial de las especies, ¿es posible alcanzar múltiples estados estacionarios? Este análisis se centra en estudiar la propiedad de Multiestacionalidad de una CNRT.

### **Grupos de Veech de curvas superelípticas infinitas**

Camilo Ramírez Maluendas  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales  
camramirezma@unal.edu.co

En 1989 el matemático William Veech asoció a cada superficie de translación  $S$  un grupo de isometría

$$\Gamma(S) < GL_+(2, \mathbb{R}),$$

llamado el *grupo de Veech*, y probó (para el caso  $S$  compacta) que, si la superficie de Riemann definida por el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  cocientado por  $\Gamma(S)$  tiene área hiperbólica finita, entonces el comportamiento del flujo geodésico en  $S$  obedece a una dicotomía análoga a la del toro plano  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ .

Estamos interesados en el problema de realización de subgrupos de  $GL_+(2, \mathbb{R})$  como grupos de Veech de superficies de translación no compactas. En esta charla definiremos las curvas superelípticas infinitas y exploraremos los subgrupos de  $GL_+(2, \mathbb{R})$  que pueden aparecer como grupos de Veech de una curva superelíptica infinita.

Referencias



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Referencias

[CMR23] Ramírez Maluendas, Camilo. On Veech groups of infinite superelliptic curves. arXiv preprint arXiv:2106.08395, 2023.

#### **An obstruction problem and Courant algebroids**

Camilo Rengifo Gutiérrez

Universidad de La Sabana

camiloregu@unisabana.edu.co

The first Pontryagin class is incarnated as an obstruction for the global existence of Courant extensions of a transitive Lie algebroid.

#### **Genericity of bumpy metrics for free boundaries CMC embeddings**

CARLOS WILSON RODRÍGUEZ CÁRDENAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

cwrodrig@uis.edu.co

Let  $(M, g)$  be an  $(n + 1)$ -dimensional Riemannian manifold with smooth boundary  $\partial M$ , and let  $\Sigma^n$  be a free-boundary CMC hypersurface of  $M$ . We will show that almost all metrics on  $M$  make  $\Sigma$  non-degenerate. In other words, the set of all metrics  $g$  on  $M$  for which  $\Sigma$  is non-degenerate is generic in the space of Riemannian metrics.

#### **Funciones zeta topológicas y motivicas de suspensiones**

Edwin León Cardenal

Universidad de la Rioja

edwin.leon@unirioja.es

En 2002, Artal, Cassou-Noguès, Luengo y Melle-Hernández demostraron que la llamada función zeta topológica de un germen de una singularidad de hipersuperficie compleja no es un invariante topológico. Al hacerlo, proporcionaron una fórmula explícita para la función



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

zeta topológica local de la suspensión por  $N = 2$  puntos de un germen de una singularidad de hipersuperficie  $f$ . En una nota añadida en las pruebas de imprenta del trabajo anterior, un corresponsal sugiere una fórmula general para el caso de la suspensión por  $N$  puntos. Esta generalización aparentemente ha permanecido sin cuestionar durante más de dos décadas, pero es fácil comprobar que no es exacta. En esta charla presentamos una corrección a la fórmula sugerida y damos una generalización para la función zeta local motívica. Este es un trabajo conjunto con Enrique Artal, Pedro González-Pérez y Manuel González-Villa.

### **Nuevas Soluciones al Problema de Yamabe en Variedades Producto: Un Enfoque desde la Teoría de Bifurcación.**

Elkin Cárdenas Díaz

Universidad del Cauca

[ecardenas@unicauca.edu.co](mailto:ecardenas@unicauca.edu.co)

Mayer Alina Ipia Camacho

Universidad del Cauca

En esta ponencia exploramos cómo la teoría de la bifurcación puede revelar nuevas soluciones al problema de Yamabe en variedades producto. Nos enfocamos en el caso particular del producto de una variedad riemanniana compacta sin frontera y curvatura escalar nula, junto con una variedad riemanniana compacta con frontera, también con curvatura escalar nula y curvatura media constante en su borde. El primer objetivo es demostrar la existencia de una secuencia de instantes de bifurcación dentro de una familia de soluciones al problema de Yamabe, empleando herramientas clásicas de la teoría de bifurcación. El segundo objetivo es abordar la clasificación de ciertos instantes de degeneración, previamente indecidibles, conocidos como instantes neutros, mediante el uso de técnicas de bifurcación equivariante.

### **Generalización del Teorema de Morley en Trapecios: Una Perspectiva desde el Infinito**

Fernando Valdés Macías

Universidad Tecnológica de Pereira

[fernandov@utp.edu.co](mailto:fernandov@utp.edu.co)



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En este trabajo se explora una generalización del clásico Teorema de Morley más allá de los triángulos, demostrando que la propiedad de formación de un triángulo equilátero persiste en configuraciones geométricas extendidas. Mediante el análisis de triángulos con vértices en el infinito, se muestra que al llevar un vértice a un punto ideal, la figura resultante se transforma en un trapecio. En este contexto, se prueba que las trisectrices de ángulos adyacentes en el trapecio intersecan formando un triángulo equilátero, análogo al caso triangular. La metodología combina herramientas de geometría euclidiana, límites y análisis de coordenadas, evidenciando que la simetría angular de Morley trasciende la estructura triangular. Este resultado amplía el alcance del teorema original y sugiere conexiones profundas entre invariantes geométricos en figuras no convencionales. Palabras clave: Teorema de Morley, Trapecios, Triángulos Infinitos, Geometría Euclidiana, Puntos en el Infinito, Trisectrices.

Abstrac This work explores a generalization of the classical Morley's Theorem beyond triangles, demonstrating that the property of forming an equilateral triangle persists in extended geometric configurations. By analyzing triangles with vertices at infinity, we show that moving a vertex to an ideal point transforms the figure into a trapezoid. In this context, we prove that the trisectors of adjacent angles in the trapezoid intersect to form an equilateral triangle, analogous to the triangular case. The methodology combines Euclidean geometry tools, limits, and coordinate analysis, revealing that Morley's angular symmetry transcends triangular structures. This result extends the scope of the original theorem and suggests deep connections between geometric invariants in non-conventional figures. Keywords: Morley's Theorem, Trapezoids, Infinite Triangles, Euclidean Geometry, Points at Infinity, Trisectors.

1

Relevancia Este estudio ofrece una perspectiva innovadora para esta presentación, destacando cómo propiedades clásicas pueden recontextualizarse en marcos geométricos extendidos. La conexión entre triángulos infinitos y trapecios abre líneas de investigación en teoría de invariantes y geometría proyectiva, con potencial

### **TítUna familia de curvas en el espacio de Minkowski**

Héctor Efrén Guerrero Mora

Universidad del Cauca

heguerrero@unicauca.edu.co

Willy Will Sierra Arroyo

Universidad del Cauca



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En esta ponencia, usando un concepto tipo Lancret, definimos una nueva familia de curvas en el espacio euclideo tres dimensional. Se encuentra su ecuación natural o ecuación intrínseca, la cual depende de dos funciones escalares, la curvatura y la torsión, que determinan el comportamiento de la curva. Se halla una representación de su vector de posición, el cual permite mostrar algunas aplicaciones de esta familia en el espacio euclideo tres dimensional. Luego, usando el concepto de campo vectorial Killing a lo largo de una curva y otras técnicas de la geometría pseudo-riemanniana, generalizamos este resultado al espacio de Minkowski. En este proceso, dependiendo del carácter causal de la curva, obtenemos resultados de tipo Lancret; que proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de esta familia en el espacio tridimensional de Minkowski. También deducimos en este espacio la ecuación intrínseca de esta familia en tres casos: cuando la curva es no nula con un vector de aceleración no nulo, en el caso de una curva espacial con vector de aceleración nulo, y finalmente cuando la curva es nula. Se examina el paralelo que existe entre los resultados obtenidos en el espacio euclidiano tres dimensional con los obtenidos en la respetiva generalización.

### Superficie $L_1$ -2-tipo nulas en espacios tridimensionales

Hector Fabian Ramirez Ospina

Universidad Nacional de Colombia

[hframirezo@unal.edu.co](mailto:hframirezo@unal.edu.co)

En esta charla estudiaremos las superficies  $L_1$ -2-tipo nulas inmersas en los 3-espacios no planos Riemannianos y Lorentzianos, donde  $L_1$  denota el operador Cheng-Yau de la superficie. Estas superficies están caracterizadas por la siguiente descomposición espectral de su vector posición en <sup>4</sup>

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2, \quad L_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \quad L_1\psi_2 = \lambda_2\psi_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

donde  $\psi_0$  es un vector constante en  $\mathbb{R}_1^4$ , y  $\psi_1, \psi_2$  son funciones no constantes diferenciables en  $M^2$ ,  $\mathbb{R}^4$ -evaluadas. Y donde uno de los valores propios es cero.

El objetivo principal aquí es estudiar la existencia o no de superficies de tipo  $L_1$ -2 nulas inmersas en un espacio tridimensional no plano (riemanniano o lorentziano). Cabe destacar



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

que en [1] los autores demostraron que los cilindros en estos espacios son superficies de tipo  $L_1$ -2 no-nulas, por ende, en nuestro estudio no las consideramos, a diferencia de lo que ocurrió en el estudio de las superficies de tipo  $\Delta$ -2 nulas.

[1] S. C. Garcia-Martínez, P. Lucas and H. F. Ramírez-Ospina.  $L_1 - 2$ -Type Surfaces in 3-Dimensional De Sitter and Anti De Sitter Spaces, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, **46:139** (2023).

### **El modelo estereográfico del espacio de de Sitter**

JEISON DE JESUS BENAVIDES LUNA

Universidad del Valle

benavides.jeison@correounivalle.edu.co

Heber Mesa Palomino

Universidad del Valle

Introduciremos un modelo para el espacio de de Sitter el cual hemos llamado el modelo estereográfico. En este modelo las geodésicas son caracterizadas por líneas y círculos euclidianos, además podemos identificar la frontera ideal (frontera en infinito) del espacio de de Sitter como dos esferas concéntricas disjuntas. También se estudiarán las hipersuperficies espaciales; en particular, el comportamiento de aquellas que son propiamente inmersas, completas y no compactas al “acercarse a la frontera ideal”

### **Geometría integral en espacios homogéneos.**

Jhonatan Cartagena Cartagena

Universidad Tecnológica de Pereira

j.cartagena@utp.edu.co

Carlos Arturo Escudero

Universidad Tecnológica de Pereira.

En esta conferencia se hablará sobre los espacios homogéneos y la condición necesaria para la existencia de una forma de volumen invariante por la acción de un grupo que actúa transitivamente en la variedad. Como aplicación, se presentarán ciertas fórmulas integrales de interés y se discutirán algunas generalizaciones en espacios de curvatura constante.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### **Comportamiento de funciones armónicas sobre variedades rotacionalmente simétricas.**

John Edison Bravo Buitrago  
Universidad de los Andes  
j.bravob@uniandes.edu.co  
Jean Carlos Cortissoz  
Universidad de los Andes

Mostramos que el criterio de March para la existencia de una función armónica no constante y acotada en un modelo débil (es decir,  $\mathbb{R}^n$  con una métrica simétricamente rotacional) es también una condición necesaria y suficiente para la solubilidad del problema de Dirichlet en el infinito en una familia de métricas que generalizan las métricas con simetría rotacional en  $\mathbb{R}^n$ . Cuando el problema de Dirichlet en el infinito no es soluble, probamos algunas estimaciones cuantitativas sobre cuán rápido debe crecer una función armónica no constante.

### **Multiplicidad de métricas conformes de $Q$ curvatura constante**

Jurgen Alfredo Julio Batalla  
Universidad Industrial de Santander  
jajuliob@uis.edu.co

Un problema de interés en geometría Riemanniana consiste en comprender cómo se comportan invariantes geométricos de una variedad  $(M, g)$  bajo transformaciones conformes de la métrica  $g$ . Generalmente este tipo de problemas implica el estudio de una ecuación diferencial sobre la variedad  $(M, g)$ . La situación modelo la encontramos con la curvatura escalar, pues entender las deformaciones conformes de este invariante conduce a estudiar las ecuaciones de tipo Yamabe. De hecho, encontrar soluciones positivas de estas ecuaciones en  $(M, g)$  permiten, por ejemplo, construir métricas conformes a  $g$  de curvatura escalar constante. En tal sentido se considera que el invariante análogo de orden superior es la  $Q$ -curvatura. En este caso la ecuación diferencial que gobierna los cambios conformes es la ecuación de Paneitz-Branson. En esta charla revisaremos un resultado reciente que garantiza múltiples métricas conformes de  $Q$ -curvatura constante en productos de esferas.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Solutions To The Curve Shortening Flow On Spaces Of Constant Curvature

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

leosorio@utp.edu.co

Katherine Cardona Camelo

Universidad Tecnológica de Pereira

We explore soliton solutions to the curve shortening flow (CSF) on two-dimensional spaces of constant curvature, building upon prior research conducted on the sphere and hyperbolic space. The curve shortening flow, driven by geodesic curvature vectors, governs the evolution of immersed curves, providing significant insights into geometric transformations and the formation of singularities. Although soliton solutions of the CSF have been extensively investigated in Euclidean settings, there remains limited understanding regarding these solutions on non-Euclidean surfaces.

Building on previous findings, we characterize soliton curves on the unit sphere, explicitly identifying conditions under which curves evolve through isometries. These conditions occur precisely when their geodesic curvature is proportional to the inner product between their tangent vector and a fixed vector in Euclidean space, resulting in a two-parameter family of soliton solutions.

Additionally, soliton solutions in two-dimensional hyperbolic space are examined by categorizing curves based on the spacelike, timelike, or lightlike properties of a fixed vector in Minkowski space. Each category corresponds to distinct solutions whose geodesic curvature directly relates to their tangent vector fields. We further investigate how these solitons can be described via systems of ordinary differential equations with differentiated initial conditions, identifying complete two-parameter families of embedded solutions converging to a constant geodesic curvature at infinity.

This presentation advances our geometric understanding of soliton behaviors within the curve shortening flow on spaces of constant curvature, providing novel insights complemented by visualizations to facilitate deeper comprehension.

### Homogeneous $G_2$ and Sasakian instantons on the Stiefel 7-manifold

luis ernesto portilla paladines

Universidad del Cauca



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

`luisportilla@unicauca.edu.co`

Andres Julian Moreno

Universidade Estadual de Campinas

We study homogeneous instantons on the seven dimensional Stiefel manifold  $V 5;2$  in the context of  $G_2$  and Sasakian geometry. According to the reductive decomposition of  $V 5;2$ , we provide an explicit description of all invariant  $G_2$  and Sasakian structures. In particular, we characterise the invariant  $G_2$ -structures inducing a Sasakian metric, among which the well known nearly parallel  $G_2$ -structure (Sasaki-Einstein) is included. As a consequence, we classify the invariant connections on homogeneous principal bundles over  $V 5;2$  with gauge group  $U(1)$  and  $SO(3)$ , satisfying either the  $G_2$  or the Sasakian instanton condition. Finally, we analyse the Yang Mills condition for those invariant connections.

### **Problema Isoperimétrico en el plano aplicando geometría integral**

MATEO RIOS CORREA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

`M.RIOS1@UTP.EDU.CO`

CARLOS ARTURO ESCUDERO SALCEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

El problema isoperimétrico es uno de los problemas clásicos más antiguos [1], estudiado por matemáticos como Zenodoro, Euler, Steiner y Weierstrass, y cuya relevancia ha perdurado hasta la actualidad. A lo largo del tiempo, ha sido objeto de múltiples generalizaciones, incluyendo formulaciones en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, en esta conferencia se abordará su versión en el plano euclidiano, desde una perspectiva moderna basada en la geometría integral. Se presentará una demostración rigurosa de la desigualdad isoperimétrica utilizando la medida cinemática [2] como herramienta central. A partir del análisis de un conjunto de curvas congruentes, se deducirá la ecuación de Poincaré [3], que describe el conjunto de posiciones en las cuales dos recintos se intersectan bajo movimientos rígidos del plano. Posteriormente, se enunciará la ecuación de Blaschke [4], una extensión que permite relacionar el área de intersección entre dominios del plano con sus longitudes mediante una fórmula integral precisa. Ambas ecuaciones se apoyan en nociones fundamentales como la rotación de las tangentes y la orientación de las fronteras. Y finalmente se obtendrá la desigualdad de Bonnesen [3],



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

que mejora el problema clásico.

### **SuperVariedades y sus Categorías Derivadas**

Pedro Hernandez Rizzo  
Universidad de Antioquia  
pedro.hernandez@udea.edu.co

En esta charla presentaremos un panorama general sobre el estudio de las categorías derivadas de haces coherentes en el contexto de la super geometría algebraica. Así mismo, mediante ejemplos ilustrativos, expondremos nuestros avances hacia el establecimiento de un vínculo entre la supergeometría algebraica compleja y la teoría de representaciones de supercarcajes [?], inaugurando lo que podría ser la teoría supergeométrica de representaciones (ver, e.g., [?], [?]). Este es un trabajo conjunto con Alexander Quintero Vélez (UNAL-Med) y Alexander Torres-Gómez (UdeA).

### **RESULTADOS DE CLASIFICACIÓN DE HIPERSUPERFICIES EN $\mathbb{S}^4$ QUE SATISFACEN $\square\vec{H} = \lambda\vec{H}$**

Sandra Carolina García-Martínez  
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá  
sacgarciam@unal.edu.co  
Luis Jose Alías  
Universidad de Murcia

Sea  $M^3$  una hipersuperficie inmersa en la esfera Euclidea 4-dimensional  $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$  y denotemos por  $\vec{H}$  su vector de curvatura media en  $\mathbb{R}^5$ . En esta charla clasificaremos aquellas hipersuperficies que satisfacen la condición

$$\square\vec{H} = \lambda\vec{H}$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , donde  $\square$  denota el operador de Cheng–Yau de la hipersuperficie. En particular, probamos que (abiertos) de 3-esferas grandes totalmente geodésicas  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^4$  son las únicas hipersuperficies en  $\mathbb{S}^4$  que satisfacen la condición  $\square\vec{H} = \mathbf{0}$ . También obtenemos (abiertos) de 3-esferas pequeñas totalmente umbilicales  $\mathbb{S}^3(r) \subset \mathbb{S}^4$ ,  $0 < r < 1$ , y el toro de Clifford son las



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

únicas hipersuperficies en  $\mathbb{S}^4$  las cuales satisfacen la condición  $\square \vec{\mathbf{H}} = \lambda \vec{\mathbf{H}}$  para un número real  $\lambda \neq 0$ . Esto caracteriza los toros de Clifford  $\mathbb{S}^2(\sqrt{1/3}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{2/3}) \subset \mathbb{S}^4$  como las únicas hipersuperficies no-triviales en  $\mathbb{S}^4$  con  $\square \vec{\mathbf{H}} = \lambda \vec{\mathbf{H}}$  para un número real  $\lambda$ . Este trabajo es una continuación al estudio de la condición que se inició en [?] con el caso 2-dimensional, superficies inmersas en espacios de forma no llanos.

### **El programa Gauss-Manin Connection in Disguise y su aplicación a superficies K3**

Walter Andrés Páez Gaviria  
Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
wapaezg@unal.edu.co

En esta charla, explicaremos cómo construir un álgebra diferencial de formas cuasimodulares de Siegel meromorfas, de género dos, mediante la introducción de un espacio de móduli de superficies K3 con una polarización determinada por un retículo específico. El álgebra de funciones regulares globales de este espacio de móduli constituirá una versión puramente algebraica del álgebra de formas cuasimodulares buscada. Se demostrará la existencia de ciertos campos vectoriales algebraicos sobre este espacio de módulos, los cuales generalizan las relaciones de Ramanujan entre series de Eisenstein y proporcionan la estructura diferencial del álgebra. Finalmente, mediante el pullback de esta álgebra a través de un mapa de períodos generalizado, obtendremos su versión trascendental. Esta construcción hace parte de un programa iniciado por Hossein Movasati en la década pasada, cuyo objetivo principal es la construcción geométrica de álgebras diferenciales de formas cuasimodulares y automorfas sobre dominios no necesariamente hermiticos simétricos.

## **2.8. Historia de la matemática**

### **Simbiosis Filosófica y Matemática del concepto del infinito**

Andrés Felipe Moreno Sanabria  
Universidad Pedagógica Nacional



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

afmorenos@upn.edu.co

Se presenta parte del desarrollo del trabajo de grado titulado Simbiosis filosófica y matemática del concepto infinito para optar al título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). La idea general del trabajo consiste en identificar posibles relaciones entre filosofía y matemáticas sobre el concepto de infinito en el siglo XVII. Se parte de una revisión documental en la que se identifican algunos filósofos de la época que abordan el concepto de infinito, algunos matemáticos que abordaron el infinito (como herramienta u objeto de estudio) y se reflexiona acerca de las posibles relaciones que emergieron en sus trabajos. Una conclusión inicial consiste en observar la existencia de diferentes nociones de infinito empleadas por matemáticos de la época y algunas influencias recíprocas entre tales ideas y propuestas filosóficas. Por último, se observa la pertinencia del trabajo en la formación de profesora de matemáticas

### **Teorema de Cauchy, de Cauchy a Dixon.**

David Santiago Cuartas Gomez

Universidad nacional de Colombia

dcuartas@unal.edu.co

El propósito de este trabajo es presentar un bosquejo tanto histórico como matemático del famoso teorema de Cauchy del análisis complejo desde sus inicios hasta su forma general.

Originalmente, dicho teorema fue establecido por Cauchy y Gauss (de forma independiente) aproximadamente en 1810. Para  $\Omega$  abierto y conexo, el Teorema de Cauchy afirma que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \quad (7)$$

para toda función  $f$  holomorfa en  $\Omega$  y toda trayectoria cerrada de  $\Omega$ . Motivados tal vez por problemas de la física matemática, establecieron como punto de partida el espacio de las funciones holomorfas en  $\Omega$ ,  $H(\Omega)$ , es decir funciones  $f \in C'(\Omega)$  que satisfacen las ecuaciones homogéneas de Cauchy-Riemann en  $\Omega$ . Caracterizaciones alternas de regularidad de funciones fueron consideradas tales como,  $D(\Omega)$  funciones derivables en  $\Omega$  en el sentido usual (Cauchy); y  $A(\Omega)$  funciones analíticas en  $\Omega$ , es decir representables como series de potencias



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

en cada punto de  $\Omega$  (Weierstrass).

A partir de estas nociones de regularidad es sencillo obtener:

$$A(\Omega) \subseteq H(\Omega) \subseteq D(\Omega). \quad (8)$$

Fue el mismo Cauchy quien obtuvo una primera prueba de su teorema haciendo uso del cálculo de variaciones (aproximadamente en 1810). Sin embargo, las definiciones de trayectorias cerradas y dominios no eran claras, y la noción de regularidad usada era la de función holomorfa, es decir que usa la continuidad de la derivada, hipótesis cuestionada. Después, en una carta dirigida a su amigo Bessel, Gauss presenta (aproximadamente en 1810) una demostración usando la continuidad de la derivada y el teorema de Green del análisis vectorial, del cual no había una demostración limpia; demostración que Cauchy redescubre y publica en 1825.

En el año 1910, Goursat presenta una prueba del Teorema de Cauchy para bordes de triángulos sin hacer uso de la continuidad de la derivada. Más exactamente, para funciones que sean continuas en  $\Omega$  y derivables en  $\Omega$  salvo en un número finito de puntos.

Posteriormente, E. Artin aproximadamente en 1930 haciendo uso del resultado de Goursat presenta una prueba del Teorema de Cauchy para funciones derivables dentro de un disco abierto y trayectorias cerradas del mismo. Este resultado se conoce como la versión local del Teorema de Cauchy, el cual desencadena otro resultado importante en el análisis complejo denominado la fórmula de Cauchy para un abierto convexo: sean  $\Omega$  convexo,  $f \in D(\Omega)$  y  $\gamma$  trayectoria cerrada en  $\Omega$ , entonces

$$f(z) \cdot \text{ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (9)$$

para todo  $z \in \Omega$  que no esté en el recorrido de  $\gamma$  ( $z \notin \hat{\gamma}$ ), donde  $\text{ind}(\gamma, z)$  es el índice de  $\gamma$  en  $z$ .

Dicha fórmula implica,

$$A(\Omega) \subseteq H(\Omega) \subseteq D(\Omega) \subseteq A(\Omega), \quad (10)$$

es decir, los tres conceptos de regularidad coinciden.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Además, E. Artin formula y demuestra dos versiones generales del teorema de Cauchy sobre un dominio, una la versión Homotópica y otra la versión Homológica. Sin embargo, sus demostraciones dependen de argumentos topológicos y geométricos no simples, así, una demostración analítica era anhelada.

Dicho objetivo es alcanzado por S. Zacks y A. Zygmoud en 1969, sin embargo esta demostración hace uso de resultados avanzados como el teorema de Runge. Beardon también presenta una demostración avanzada y analítica del problema. En 1971, J. Dixon solo usando resultados fundamentales del análisis complejo demuestra el teorema, dándonos a todos una demostración precisa, analítica y accesible.

### **¿Fue Veronese el instaurador de la primera geometría no arquimediana?**

José Luis Guevara Rodríguez  
Universidad Nacional de Colombia  
joguevarar@unal.edu.co  
Harol Esteban Rodríguez Delgado  
herodriguezd@upn.edu.co

En 1891, Giuseppe Veronese (1854-1917) presenta su obra más representativa, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, proponiendo una geometría que permite la inserción de segmentos infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Este laborioso intento representó el primer modelo de geometría no arquimediana en donde los infinitesimales resultaban ser plausibles y merecedores de un lugar dentro de las matemáticas. Sin embargo, matemáticos de la talla de Cantor estaban rotundamente en contra de esta aproximación, lo que los llevó a resaltar los desaciertos de la obra de Veronese e intentar demostrar la inconsistencia de los infinitesimales. En esta charla, exploraremos que hay un hueco histórico que obvia las ideas primigenias del trabajo de Veronese, cuando su obra debería considerarse como la precursora de la geometría no arquimediana, a pesar de que su surgimiento tuvo lugar en un contexto donde ya se exploraban conceptos relacionados con este tipo de geometría.

### **¿SON LAS MATEMÁTICAS CONSISTENTES? INCOMPLETITUD LÍMI-**



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

## **TES DE LA CERTEZA MATEMÁTICA**

Maira Alejandra Delgado Hernández

Univalle

maira.delgado@correounivalle.edu.co

Cristian Javier Acero Robayo

Universidad Distrital

En la presente ponencia se pretende mostrar un recorrido histórico a través de la teoría de conjuntos, para poder establecer solución a tres preguntas fundamentales en el campo de las matemáticas llevan a entender como por medio de una paradoja de autorreferencia nace la incompletitud como una grieta en la certeza matemática.

## **2.9. Lógica**

### **Introducción a la teoría de o-minimalidad y sus potenciales aplicaciones**

Alf Onshuus

Universidad de los Andes

aonshuus@uniandes.edu.co

La o-minimalidad es un área de la teoría de modelos que acota un marco analítico real que tiene un comportamiento dócil, es decir con propiedades parecidas a las que tienen las variedades algebraicas (reales o complejas).

Esto ha permitido que o-minimalidad haya sido utilizada de numerosas y sorprendentes maneras en otras ramas de las matemáticas como la teoría de números y geometría algebraica real, como por ejemplo en los resultados recientes de Tsimmerman en teoría de Hodge.

En esta charla queremos hacer una introducción a qué es, cuáles son las propiedades de los objetos que se definen dentro del marco de o-minimalidad, y cuándo puede uno esperar (y cuándo no) que los problemas que se estudian pueden hacer uso de esta herramienta.

### **Física y Teoría de Modelos: algunas interacciones recientes**

Andrés Villaveces Niño



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Nacional de Colombia

avillavecesn@gmail.com

Gustavo Daver Cipagauta Cuitiva

Universidad Nacional de Colombia

La teoría de modelos, entendida en sentido amplio (clases elementales abstractas, lógicas probabilísticas o de procesos estocásticos, lógicas infinitarias y/o continuas) ha servido esporádicamente como marco conceptual para abordar problemáticas surgidas de distintas formalizaciones de la física. Hace unos años, con Alexander Berenstein y Camilo Argoty usamos dos expresiones de la lógica continua para entender modelo-teóricamente representaciones de  $C^*$ -álgebras de operadores. Mucho más recientemente, con mi estudiante de doctorado Gustavo Cipagauta y en conversación con Boris Zilber hemos iniciado un camino que combina la lógica de procesos estocásticos (Fajardo-Keisler) con las clases elementales abstractas métricas para abordar temas surgidos de la interpretación estocástica de la cuántica. Presentaré una visión panorámica de varias de esas búsquedas y resultados.

### **Un retículo de sublógicas del cálculo proposicional intuicionista**

Arnold Oostra

Universidad del Tolima

noostra@ut.edu.co

En esta charla se presenta una estructura de 36 sublógicas del cálculo proposicional intuicionista determinadas por subconjuntos de conectivos.

### **Estructuras pseudofinitas estables**

DARIO ALEJANDRO GARCIA RICO

Universidad de los Andes

da.garcia268@uniandes.edu.co

En esta charla daremos un breve panorama sobre el estudio de estructuras pseudofinitas estables, mostrando diferentes ejemplos de naturaleza algebraica y combinatoria de clases de estructuras finitas cuyos ultraproductos son estables. En particular, mostraremos resultados



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

que muestran cómo el bosque siempre infinito puede obtenerse por medio de ultraproductos de grafos que corresponden a clases multidimensionales exactas. Finalmente, presentaremos una serie de preguntas abiertas relacionadas con el concepto de estabilidad en clases de estructuras finitas.

### **Equivalencia elemental en estructuras estocásticas**

Gustavo Daver Cipagauta Cuitiva

Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

[gdcipagautac@unal.edu.co](mailto:gdcipagautac@unal.edu.co)

Andrés Villaveces Niño

Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

Los conceptos de equivalencia elemental y sus derivados (subestructura elemental, extensión elemental, juego de Ehrenfeucht-Fraïsse) están en el corazón de la teoría de modelos. En el caso de las estructuras estocásticas –cuyas bases son los espacios de probabilidad adaptados–, Keisler, Hoover y Fajardo definieron la equivalencia elemental y el juego de Ehrenfeucht-Fraïsse en el marco de la lógica adaptada de la probabilidad. En nuestro trabajo de investigación doctoral en curso, nos hemos propuesto extender estos resultados en dos direcciones: (i) amalgamar la lógica de Keisler y compañía con la lógica continua –desarrollada para las estructuras métricas–, potenciando la correspondencia entre la sintaxis y la semántica (superando algunas limitaciones de expresividad señaladas por Hrushovski); (ii) explorar la posibilidad de definir el concepto de clase elemental abstracta para las estructuras estocásticas, abriendo la puerta a implementar nociones de clasificación que complementen los desarrollados por Keisler y compañía. Buscamos, al final, aplicar estas herramientas modelo-teóricas para comparar procesos estocásticos que den luces sobre las líneas divisorias al interior de la fenomenología cuántica y entre ella y la fenomenología clásica.

### **¿Se puede hacer cálculo diferencial la noción de Límite?**

José Luis Guevara Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia

[joguevarar@unal.edu.co](mailto:joguevarar@unal.edu.co)

Karol Stefany Herrera Cano



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Nacional de Colombia

Creemos que el abordaje del cálculo requiere del concepto del límite debido a nuestra formación matemática. Sin embargo, pretendemos mostrar que en efecto se puede hacer el cálculo diferencial sin esta noción mediante los elementos nilpotentes y con ayuda de los números duales. Además veremos que dicha construcción con elementos nilpotentes no es más que la construcción por medio del análisis no estándar.

### **Cadenas de Sugihara generalizadas**

Juan Ricardo Prada

Universidad Nacional de la Plata

[jrprada@ut.edu.co](mailto:jrprada@ut.edu.co)

José Luis Castiglioni

Universidad Nacional de la Plata

Se estudia una variación de una estructura tipo twist estudiada por Galatos y Raftery en A category equivalence for odd Sugihara monoids and its applications, algunas propiedades y relaciones con la lógica.

### **TABLEAUX PARA SISTEMAS LEWIS NO-NORMALES S3**

Luz Amparo Carranza Guerrero

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

[luza.carranzag@konradlorenz.edu.co](mailto:luza.carranzag@konradlorenz.edu.co)

Alfredo Burrieza Muñiz

Universidad de Málaga

El estudio de la lógica modal se remonta hasta Aristóteles y otros desarrollos en la edad media, surge en el siglo XX un nuevo impulso a raíz de las discusiones de la lógica clásica. En 1912 C.I. Lewis define un nuevo condicional al que llama implicación estricta, este se define en términos del condicional material y la noción de necesidad  $\Box(p \rightarrow q)$ . Las combinaciones de los axiomas planteados por Lewis proporcionaron diferentes sistemas normales, entre los más conocidos están  $K, T, S4, S5$ . Los sistemas no-normales son propuestos al buscar



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

sistemas mas debiles que el sistema  $K$ , estos se caracterizan por tener mundos normales y no normales. En los años 60 Samuel Kripke publica *Semantical Analysis of Modal Logic, y II: Non-Normal propositional Calculi*; aportando una herramienta básica para el análisis de la lógica modal y los sistemas modales no-normales. Los tableaux o tablas analíticas han sido ampliamente usados en el cálculo de lógicas modales, su poder como demostradores automáticos los hace atractivos en la expresión de resultados computacionales. Al aportar un procedimiento algorítmico las pruebas de completitud y consistencia se hacen sencillas, usando el algoritmo para el cálculo de Tableaux de los sistemas Lewis  $S2, S3, S5, S6, S7, S8$  y  $S9$  de la lógica modal no normal. Presentaremos el algoritmo para  $S3$  con ejemplos importantes y la construcción de un modelo refutador de algunas fórmulas invalidas.

### **Teoría de modelos de acciones que preservan la medida**

Sol Susana Santoyo Olivera

Universidad de Los Andes

s.faciolince@uniandes.edu.co

Un objeto de estudio en la teoría ergódica son las acciones que preservan la medida de grupos amenables en espacios de probabilidad sin átomos. Esto ha sido estudiado en el contexto de la teoría de modelos de la lógica continua. En esta charla, presentaría algunos de los resultados básicos, competentes a completitud, omega-categoricidad y pseudofinitud de dichas teorías. Esta charla se basa en trabajo conjunto con Alexander Berenstein.

## **2.10. Optimización, teoría de control y aplicaciones a economía**

### **Empaquetamiento de polígonos irregulares convexos: Algoritmos Genéticos como punto inicial para el modelo de Rectas Separadoras.**

Camilo Andres Aguilar Hoyos

Universidad del Atlántico

candresaguilar@mail.uniatlantico.edu.co

Alfredo Roa Narváez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad del Atlántico

El presente es un trabajo en andamio que aborda el problema de empaquetamiento de polígonos convexos irregulares dentro de una región rectangular de longitud fija y altura variable, con el objetivo de minimizar la altura ocupada. Para tal fin, se pretende implementar un algoritmo genético que se usará como punto inicial para un modelo de rectas separadoras. Este problema tiene múltiples aplicaciones en la industria, como en el sector metalúrgico, donde se busca optimizar el estampado de figuras poligonales a partir de planchas rectangulares para minimizar el desperdicio de material. De manera similar, en la industria textil, es fundamental optimizar los cortes de las prendas a partir de rollos o piezas rectangulares de tela. Estos son solo algunos ejemplos de los muchos escenarios en los que este problema se presenta.

### **Optimization of the aeration process in an SBR through the numerical solution of an inverse problem**

Estefanía Julieth Guevara Blanquicett

Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

[ejguevarab@unal.edu.co](mailto:ejguevarab@unal.edu.co)

This work presents the formulation and solution of an inverse problem related to the control of aeration in a Sequencing Batch Reactor (SBR), modeled by a strongly degenerate convection-diffusion-reaction system of equations, linked to a modified version of the Activated Sludge Model No. 1 (ASM1). The aeration phase is regulated by a proportional-integral (PI) controller, whose configuration depends on five key parameters: the proportional constant  $K$ , the integral constant  $T_i$ , the desired set point  $S_{Op}^s$ , and the aeration initiation and end times  $(t_a, T_a)$ . This study poses a constrained optimization problem aimed at minimizing the total nitrogen concentration in the effluent, while ensuring compliance with the limits established by Colombian environmental regulations. The objective function includes quadratic penalties when the sum of concentrations exceeds the allowed threshold during the draw phase. The constraints ensure the operational feasibility of the system and consistency with the technical control parameters. Numerical results are presented to validate the effectiveness of the optimal solution through simulations of the direct problem, demonstrating significant improvements in regulatory compliance.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **La paradoja de los retardos que aceleran**

Germán Obando

Universidad de Nariño

gdobando@udenar.edu.co

Nuestra propuesta se centra en comprender cómo varía la velocidad de convergencia al introducir diferentes magnitudes de retardo. Se demuestra que, si bien retardos muy grandes pueden desestabilizar el sistema (existe un límite máximo de retardo tolerable), hay un rango de retardos más pequeños donde la velocidad de acuerdo aumenta. Dentro de este rango beneficioso, generalmente existe un valor de retardo específico, denominado retardo óptimo, que maximiza la velocidad de convergencia. Es decir, operando el sistema con este retardo particular, los agentes alcanzan el acuerdo en el menor tiempo posible, incluso más rápido que si no hubiera ningún retardo. Para redes donde la comunicación entre agentes es bidireccional (análogo a grafos no dirigidos), se deriva una fórmula explícita que permite calcular este retardo óptimo basándose en las características estructurales de la red de comunicación. En resumen, este estudio confirma que los retardos temporales pueden ser beneficiosos para la rapidez del consenso en sistemas multiagente. La identificación y el cálculo de un retardo óptimo ofrecen una herramienta práctica con implicaciones importantes: abre la posibilidad de diseñar sistemas que utilicen deliberadamente un cierto retardo para mejorar su eficiencia, transformando una limitación comúnmente percibida en una potencial ventaja estratégica.

### **Un abordaje regularizado de primer orden para el problema de optimización de valor ordenado.**

Gustavo David Quintero Álvarez

Universidad del Atlántico

gdquintero@mail.uniatlantico.edu.co

El problema de optimización de valor ordenado forma parte de una amplia familia de problemas en los que el valor de una función se calcula ordenando valores de un conjunto o subconjunto de otras funciones. La función de valor ordenado incluye como casos particulares las funciones mínimo y máximo de un conjunto de funciones y es adecuada para aplicaciones que requieren estimación robusta. En este trabajo, se propone un método de primer orden con regularización cuadrática para resolver el problema de minimizar la función de valor



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

ordenado. Se presentan una condición de optimalidad para el problema y resultados teóricos sobre la complejidad de iteración y evaluaciones de función del método propuesto. Se ilustra la aplicabilidad del problema y del método en problemas de estimación de parámetros con presencia de valores atípicos (outliers).

### **Dinámicas Concéntricas: Estudiando la relación entre el producto interno bruto y el índice de calidad del sistema de salud a lo largo del tiempo**

Harold Wilson Bravo Flor

Universidad del Cauca

hwbravo@unicauca.edu.co

Henry Laniado Rodas

Universidad del Cauca

Este proyecto se basa en buscar, analizar y trabajar con la relación del producto interno bruto con el índice de calidad de la salud para así abrir un camino a crear y estructurar propuestas capaces de mejorar los sistemas de salud de cada país. Usar distintos modelos estadísticos para optimizar y escoger la mejor opción en cada caso, y por último estudiar uno de los objetivos secundarios el cual es analizar las afectaciones que pasaron durante y después del COVID-19 en países de diferentes ingresos.

### **Optimal Extraction with Impact on a Diffusion-Jump Pricing**

Jhonatan Steven Mora Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia

jsmoraro@unal.edu.co

Johanna Garzón

Universidad Nacional de Colombia

We study an optimal extraction problem where agent's actions in the spot market exert an additive proportional negative impact on the commodity price. The commodity price dynamics, prior to any activity by the agent, are evolved by a drifted Brownian motion with jumps. The agent's primary aim is to identify an optimal extraction strategy that maximizes their expected net profits.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Un Estudio Comparativo de Modelos Estadísticos y de Deep Learning Sobre las Predicciones de Series de Tiempo Macroeconómicas Colombianas**

JOHANNA LIZETH BUSTOS GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

jlbustosg@ut.edu.co

Los modelos de deep learning se han convertido en una de las herramientas de ajuste y pronósticos con mayor relevancia en la actualidad, es así como se plantea el estudio de su aplicación a series temporales macroeconómicas colombianas con el propósito de realizar un análisis comparativo del desempeño de estas en el funcionamiento de pronósticos. Por lo anterior, se estudian las siguientes series temporales macroeconómicas: la tasa de desempleo, el índice de precios al consumidor, y el indicador de seguimiento a la economía, las cuales fueron suministradas por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). Se implementan modelos ARMA con reducción de parámetros e intervención, redes neuronales recurrentes, redes neuronales convolucionales y redes neuronales híbridas. Se evalúa y se compara el desempeño de los pronósticos de los modelos implementados por medio de las métricas: MSE, MAE, MAPE, y RMSE. Finalmente, se realiza el análisis e interpretación de los resultados del estudio.

### **Análisis de Sensibilidad de un Algoritmo de Solución de Problemas de Diseño de Centrado mediante Programación Semi-Infinita**

Maria Gilma Agudelo Hernandez

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

magudelohe@unal.edu.co

Diego A. Muñoz

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Este trabajo presenta un análisis de sensibilidad de un algoritmo diseñado para resolver problemas de optimización semi-infinita generalizada (GSIP), específicamente en una aplicación de Diseño de Centrado. Se desarrollan los fundamentos teóricos que incluyen definiciones y propiedades de los GSIP, la descripción del algoritmo y su aplicación en la maximización del área de una bola inscrita en una región definida por restricciones. Se estudia cómo la solución óptima varía ante pequeñas perturbaciones en las restricciones, comprobando nu-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

méricamente la robustez del método.

### **Sobre políticas públicas para reducir el problema de criminalidad en Cali: una visión desde la teoría de control óptimo**

Mariana Alvarez Cano

Pontificia Universidad Javeriana Cali

maalvarezcano1123@javerianacali.edu.co

Alexander Alegria Castellanos

Pontificia Universidad Javeriana Cali

En Colombia, según la Policía Nacional (2024), alrededor de 12.000 personas son asesinadas anualmente; y en Cali, los homicidios ascienden aproximadamente a 1.000 por año. Si bien esta cifra ha disminuido en los últimos años, y la tasa de homicidios se encuentra entre las más bajas en cuatro décadas, en 2024 se registraron 41.6 homicidios por cada 100.000 habitantes, una cifra preocupante en comparación con el promedio nacional (25.4) y ciudades como Bogotá (15.2) y Medellín (11.4) (Ministerio de Justicia, 2025). Este fenómeno, junto con otros actos violentos, está estrechamente vinculado a dificultades estructurales como el desempleo, las brechas sociales y la falta de acceso a educación de calidad, impactando negativamente el bienestar social de las comunidades, generando costos económicos y sociales que limitan su desarrollo. Por tal motivo, resulta relevante contribuir al diseño de políticas públicas que reduzcan los incentivos para delinquir. Sin embargo, dado que los recursos tanto públicos como privados son limitados, es crucial preguntarse cómo optimizarlos para reducir la criminalidad de manera eficiente. En esta charla, se presentará y discutirá un modelo matemático tipo SIR, que simula los efectos sociales y económicos del comportamiento delictivo en una población, para determinar una combinación óptima de intervenciones y políticas públicas que minimice el costo económico asociado, al control de la tasa de crecimiento de población criminal (infectados) junto con un aumento del grupo que desiste del actuar delictivo (recuperados). De manera más precisa, se emplearán herramientas de cálculo variacional y teoría de control óptimo, para establecer un funcional de costos asociado a las estrategias que las autoridades de gobierno y ley implementan para reducir el actuar criminal bajo restricciones dinámicas de los tres grupos poblacionales. Se espera que los controles propuestos, es decir, las políticas preventivas y persuasivas implementadas mediante el programa distrital En la Buena tengan un impacto positivo y significativo en la reducción del crimen, generando



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

oportunidades para los sectores menos favorecidos de la sociedad caleña y contribuyendo a la sostenibilidad de la seguridad en el largo plazo.

### **Fenómenos críticos en percolaciones**

Mauro Montealegre Cárdenas

Universidad Surcolombiana

[mmonteval@usco.edu.co](mailto:mmonteval@usco.edu.co)

Joan Manuel Montealegre Cárdenas

Universidad Surcolombiana

Los modelos de las percolaciones como atractor estocástico discreto son tratados por Gros (2013), Érdi (2010) y Peitgen, Jürgens, y Saupe (1992), entre otros. La teoría de la Percolación permite estudiar fenómenos críticos y se han contextualizados en diversos campos como Matemática Discreta, Econofísica, Bioquímica, la Epidemiología o Ecología.

### **Estrategias matemáticas para combatir el Dengue con Wolbachia: Un caso de estudio en Cali**

Oscar Eduardo Escobar Lasso

Universidad del Valle

[escobar.oscar@correounivalle.edu.co](mailto:escobar.oscar@correounivalle.edu.co)

Olga Vasilieva

Universidad del Valle

Este estudio evalúa el impacto epidemiológico del control biológico basado en Wolbachia como estrategia para la reducción de infecciones por dengue en Cali, Colombia. La bacteria Wolbachia reduce la replicación del virus del dengue en los mosquitos *Aedes aegypti*, principales vectores del virus, disminuyendo así su capacidad de transmisión. Para analizar esta estrategia, se propone un modelo matemático SEIR-SEI que describe la dinámica de la infección en humanos y mosquitos, considerando tanto poblaciones de vectores silvestres como portadores de Wolbachia. Además, se incorpora un submodelo de invasión de Wolbachia con ecuaciones diferenciales que representan la competencia entre los mosquitos silvestres y los infectados con Wolbachia. Se asumen tasas diferenciales de transmisión y mortalidad, basa-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

das en la presencia de cepas  $wMel$  y  $wMelPop$ . Se realizaron simulaciones numéricas para distintos escenarios de liberación inundativa de mosquitos portadores de *Wolbachia*, variando la proporción de liberación respecto a la población silvestre. Los resultados mostraron que una liberación del 30 % al 70 % de hembras portadoras de *Wolbachia* puede conducir al reemplazo exitoso de la población de mosquitos silvestres y una reducción significativa en la incidencia del dengue. En conclusión, el control biológico basado en *Wolbachia* se perfila como una estrategia efectiva para mitigar brotes de dengue, como el ocurrido en Cali en 2010. La aplicación de modelos matemáticos proporciona una herramienta valiosa para evaluar y diseñar estrategias de control epidemiológico en contextos urbanos.

### **Modelo Matemático y Sensor en Tiempo Real para la Dinámica del Oxígeno Disuelto y la temperatura en Sistemas cerrados de Transporte de Peces**

Yineth Medina Arce

Universidad Surcolombiana

[yineth.medina@usco.edu.co](mailto:yineth.medina@usco.edu.co)

Luis Eduardo Bermúdez Narvaez

Universidad Surcolombiana

El transporte de peces en sistemas cerrados constituye un reto complejo que involucra la interacción dinámica entre variables fisicoquímicas y biológicas. En particular, la concentración de oxígeno disuelto (OD) y la temperatura del agua son factores críticos que afectan la viabilidad de los organismos transportados. Este trabajo presenta el desarrollo e implementación de un modelo matemático no lineal y un sistema de monitoreo en tiempo real, orientados a describir y controlar la dinámica del OD en condiciones de transporte cerrado. El modelo propuesto extiende la ecuación diferencial clásica de balance de oxígeno al incorporar términos de consumo metabólico dependiente del umbral crítico de OD, transferencia de oxígeno atmosférico y suministro de oxígeno suplementario. La inclusión de un umbral fisiológico específico para cada especie introduce una bifurcación en el sistema, generando oscilaciones periódicas en la concentración de OD que reflejan la capacidad adaptativa de los peces frente a condiciones hipóxicas. Estas oscilaciones, modeladas mediante funciones por tramos, permiten simular escenarios realistas donde la autorregulación fisiológica entra en conflicto con la estabilidad ambiental, afectando directamente la supervivencia. Complementando el modelo, se diseñó un sistema de monitoreo inteligente que integra sensores



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

calibrados para medir en tiempo real la concentración de OD y la temperatura del agua durante el transporte. Este sensor, con conectividad IoT, transmite datos a una plataforma digital que almacena y procesa los registros mediante algoritmos de simulación numérica. La interfaz permite ejecutar simulaciones personalizadas utilizando parámetros experimentales (biomasa, especie, temperatura, flujo de aire) y condiciones operativas ingresadas por el usuario. Los resultados permiten evaluar el impacto del umbral crítico sobre la dinámica del OD en función de variables como el tamaño de los peces, la especie, la temperatura del agua y la tasa de transferencia de oxígeno. Además, se analizan estrategias de mitigación, como el ajuste de la densidad de carga y la intensificación de la aireación, que permiten reducir la amplitud de las oscilaciones y evitar colapsos en la disponibilidad de oxígeno. El sistema desarrollado constituye una herramienta integral para el diseño y operación de sistemas de transporte y cultivo acuícola, con capacidad de predicción, retroalimentación automática y optimización de condiciones de transporte. La incorporación del umbral fisiológico específico redefine la modelación tradicional del OD, mejorando la precisión en escenarios críticos y fortaleciendo la toma de decisiones en acuicultura basada en datos. **Palabras clave:** oxígeno disuelto, modelación matemática no lineal, sensor IoT, transporte de peces, dinámica oscilante, sistemas acuícolas inteligentes.

### 2.11. Probabilidad y estadística

#### **Desviaciones Espectrales y Dinámica de Riesgo Sistémico en Mercados Financieros. Un enfoque desde Teoría de Matrices Aleatorias**

Andy Domínguez-Monterroza

Universidad Complutense de Madrid, España

andydomi@ucm.es

Este trabajo aplica herramientas de la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) para estudiar los cambios estructurales en la correlación entre activos del mercado bursátil español antes, durante y después de la pandemia de COVID-19, comparando las matrices empíricas con los límites teóricos establecidos por la ley de Marchenko–Pastur. La contribución central consiste en demostrar empíricamente que las desviaciones respecto



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

a esta ley actúan como indicadores robustos de eventos extremos o transiciones de fase en sistemas financieros complejos. Además, se propone el uso de eigenportafolios, construidos a partir de los vectores propios, para analizar la dinámica de las combinaciones lineales de activos asociadas con los modos dominantes del sistema, mostrando que el portafolio correspondiente al mayor autovalor presenta una alta colinealidad con el rendimiento promedio del mercado. Este estudio representa una sinergia entre la teoría espectral de matrices aleatorias, la estadística multivariada y las finanzas cuantitativas, proponiendo un marco teórico y computacional para evaluar la eficiencia de los mercados y el riesgo sistémico en contextos de crisis.

### **Estimación robusta de la matriz de covarianzas para el diseño de estrategias óptimas en la selección de portafolios**

Danny Alberto Córdoba Guerrero

Universidad del Cauca

dancordoba@unicauca.edu.co

Henry Laniado Rodas

Universidad del Cauca

En este trabajo presentamos nuevas estrategias para optimizar los rendimientos en la selección de portafolios, enfocándonos en la estimación de la matriz de covarianzas mediante percentiles y combinaciones lineales convexas de estrategias ya existentes, como Shrinkage de Ledoit-Wolf y Covariance Denoising con nuestra propuesta. Aquí se investiga el percentil más adecuado para dicha estimación, así como el valor óptimo, tal que la combinación lineal resultante sea una estrategia robusta y competitiva en términos de rendimiento; a su vez compararla con las estrategias clásicas de covarianza como Shrinkage, covarianza Denoising y la estimación estándar (cov) para la selección de portafolios. Como conclusión, se encuentra evidencia de mejor desempeño de la combinación lineal convexa entre la propuesta de este artículo y Shrinkage de Ledoit-Wolf, como también Shrinkage de Ledoit-Wolf con covarianza Denoising con respecto a las estrategias mencionadas en términos de los indicadores de rentabilidad, riesgo, ratio de Sharpe y (estabilidad).

### **Modelos lineales generalizados para la predicción del ritmo cardiaco**

Eduardo Martínez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Sergio Arboleda  
oscar.martinez@usa.edu.co

El auge de la actividad física post pandemia ha estado ligado a las aplicaciones y dispositivos que permiten hacer seguimiento de las mismas. Esto sumado a la popularidad que ganaron algunos deportes que favorecen el distanciamiento social (ciclismo, atletismo) da origen a una gran cantidad de datos para ser analizados. Si a esto se suma el uso de sensores que permiten recolectar variables biométricas y de desempeño en tiempo real, obtenemos un contexto con múltiples opciones de análisis y predicción. En este trabajo se utilizarán modelos lineales generalizados para explicar el ritmo cardiaco en zonas de entrenamiento anaeróbicas y de esfuerzo máximo durante recorridos en bicicleta, en función de datos topográficos y de rendimiento recolectados por sensores y gestionados a través de la plataforma Strava.

### **Solución numérica de la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes**

Erisbey Marin Cardona  
Universidad Tecnológica de Pereira  
erics10-@utp.edu.co

Edgar Alirio Valencia  
Universidad Tecnológica de Pereira

Este trabajo presenta una metodología funcional para la solución numérica de la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes, utilizando herramientas de análisis en espacios de Hilbert con kernel reproductivo (RKHS). La estrategia se basa en descomponer la solución en dos componentes principales: una parte determinista y una parte estocástica, cada una modelada de forma distinta dentro del espacio funcional, lo cual permite capturar tanto el comportamiento sistemático como la variabilidad inherente del proceso. La ecuación de Black-Scholes, ampliamente utilizada en finanzas para modelar la evolución del precio de un activo, contiene una parte determinista asociada a la tasa de crecimiento y una parte aleatoria modelada por un movimiento browniano. Aunque su solución cerrada es conocida, su aplicación numérica directa puede ser limitada en contextos donde las relaciones no son lineales o los datos presentan estructuras complejas. En la metodología propuesta, la parte determinista se interpreta como una función suave del tiempo que se aproxima utilizando una



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

combinación de funciones kernel. Esta aproximación se realiza resolviendo un sistema lineal de mínimos cuadrados, en el cual los coeficientes representan la mejor proyección posible de la componente determinista sobre una base generada por el kernel en el espacio de Hilbert. Esto permite obtener una representación flexible y continua de la dinámica subyacente del proceso, conservando propiedades de suavidad y capacidad de generalización. Por otro lado, la parte estocástica de la solución, que corresponde al término asociado al ruido browniano, se trata como una martingala. Dado que toda martingala puede aproximarse por un proceso autoregresivo bajo ciertas condiciones, se modela esta componente como un proceso AR de orden fijo, embebido también en el RKHS. Para ello, se plantean unas ecuaciones estructuralmente similares a las de Yule-Walker, adaptadas al contexto del espacio de características generado por el kernel. Los coeficientes del modelo AR embebido se obtienen resolviendo este sistema, que involucra productos internos en el RKHS. Una vez se tiene la predicción en el espacio de características, se plantea el problema de la preimagen, que busca proyectar dicha predicción nuevamente al espacio original de los datos. En este trabajo se utiliza una técnica iterativa basada en un punto fijo, comúnmente aplicada en contextos de aprendizaje kernel, que permite obtener una reconstrucción no lineal y dependiente del dato. Esta reconstrucción se expresa finalmente como una combinación ponderada de los valores pasados observados del proceso, con pesos adaptativos que dependen de la similitud medida por el kernel. El resultado final es una solución completa del modelo que combina una componente funcional determinista con una componente estocástica reconstruida, utilizando únicamente los valores pasados del proceso. A partir de un tiempo suficientemente grande, y conociendo un número fijo de observaciones anteriores, es posible predecir el comportamiento del sistema de manera precisa, integrando tanto estructura como incertidumbre. Esta metodología no solo ofrece ventajas en términos de precisión y estabilidad numérica, sino que permite representar modelos más generales que el enfoque clásico, especialmente en contextos donde las hipótesis de linealidad o independencia son demasiado restrictivas. Los resultados obtenidos en simulaciones muestran una alta fidelidad entre la solución aproximada y la trayectoria real del proceso, validando la viabilidad del enfoque propuesto.

### **Tiempo de relajación para una familia paramétrica de procesos de rango cero y su conexión con la ecuación de difusión rápida**

Freddy Hernandez Romero

UNAL Bogotá



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

fohernandezr@unal.edu.co

Milton Jara y Fabio Valentim

IMPA y UFES

Presentaré un estudio con M. Jara y F. Valentim sobre el tiempo de relajación en Procesos de Rango Cero (ZRP) con tasas que varían según un parámetro ' $\alpha$ '. Buscamos unificar resultados previos (Landim, Morris, Nagahata) y entender modelos microscópicos para la Ecuación de Difusión Rápida (FDE). Basados en heurísticas, conjeturamos cómo el tiempo de relajación depende del tamaño del sistema  $N$ , de la cantidad de partículas  $K$  y del parámetro  $\alpha$ . Mostraremos fuerte evidencia numérica, de cálculos y simulaciones, que respalda esta conjetura.

### **Generación de datos sintéticos multivariantes: un enfoque no paramétrico basado en cópulas**

Henry Laniado

Universidad del Cauca

hlaniado@unicauca.edu.co

Juan Carlos Rivera

Universidad EAFIT

Los métodos de generación de datos sintéticos permiten aumentar el rendimiento de los modelos de aprendizaje automático, generalizar mejor las capacidades de los modelos de aprendizaje profundo y anonimizar la información, entre otras aplicaciones. Este artículo presenta un novedoso método no paramétrico para generar datos sintéticos mediante cópulas. El método es fácil de implementar e interpretar. Los resultados de las pruebas de homogeneidad multivariada demuestran que los datos generados respetan las distribuciones marginales y conjunta de los datos reales. El método propuesto aborda varios desafíos que enfrentan las técnicas existentes de generación de datos sintéticos, como la preservación de las estructuras multivariadas complejas presentes en los datos reales.

### **Inferencia estadística sobre el puente browniano multivariado bayesiano con correlación**

Jhonier Sebastian Rangel Gutiérrez

Universidad ECCI



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

[jrangelg@ecci.edu.co](mailto:jrangelg@ecci.edu.co)

La inferencia estadística sobre el puente browniano multivariado bayesiano con correlación aplica un enfoque bayesiano para modelar trayectorias estocásticas de múltiples variables interdependientes. En este contexto, el puente browniano multivariado describe procesos que comienzan en un valor inicial y regresan a un valor final, pero con variables correlacionadas entre sí, lo que refleja la influencia mutua de estas variables a lo largo del tiempo. El enfoque bayesiano permite actualizar las creencias sobre los parámetros del modelo, incluyendo las correlaciones entre las variables, utilizando datos observacionales. A través de este enfoque, se puede realizar inferencia sobre las trayectorias futuras del proceso, estimando tanto los parámetros como las distribuciones posteriores. Al incorporar la correlación entre las variables, el modelo proporciona estimaciones más precisas y predicciones más confiables, lo que es útil en aplicaciones como la modelización financiera, la ingeniería de sistemas dinámicos complejos y otros campos donde las variables están interrelacionadas y evolucionan en el tiempo.

### **Sobre una nueva versión bivariante del test estadístico no paramétrico de Mann-Whitney**

Katerin Meliza Dejoy Erazo

Universidad del Cauca

[kdejoy@unicauca.edu.co](mailto:kdejoy@unicauca.edu.co)

Henry Laniado Rodas

Universidad del Cauca

La prueba U de Mann-Whitney es una herramienta estadística no paramétrica utilizada para comparar la tendencia central de dos muestras independientes sin asumir normalidad. Aunque su aplicación en datos univariados es común, su extensión a dimensiones mayores ha sido poco explorada. Este trabajo propone una nueva versión de esta prueba en el espacio bidimensional, basada en una transformación que mapea los datos bivariados a univariados, permitiendo así la aplicación de la prueba convencional. Para evaluar su efectividad, se realizaron simulaciones numéricas en diversos escenarios. Los resultados confirmaron que la transformación propuesta preserva la validez del análisis no paramétrico y permite detectar diferencias de manera robusta y confiable, proporcionando una herramienta eficaz para el



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

análisis de diferencias entre grupos en espacios de más de una dimensión.

### **Búsqueda Óptima de Redes Neuronales en el Contexto de Aprendizaje Supervisado.**

Mateo Alejandro Rodríguez Ramírez

Universidad de los Andes

[ma.rodriguezr1@uniandes.edu.co](mailto:ma.rodriguezr1@uniandes.edu.co)

Adolfo José Quiroz Salazar

Universidad de los Andes

Independientemente del problema de aprendizaje supervisado que se tenga, i.e. clasificación o regresión, una herramienta útil para abordarlo puede ser una red neuronal. El paso a seguir para obtener dicha red es estándar y se basa en proponer una estructura de grafo para la red y entrenar una función de pesos sobre esta, con el objetivo de minimizar una función de pérdida. Esto es limitado, pues el procedimiento de ajuste no incorpora una elección óptima de la arquitectura de la red, lo cual típicamente resulta en un costo adicional relacionado con el sobre dimensionamiento de la red para el problema que se tiene. Por este motivo, este trabajo propone una forma novedosa de permitir la modificación de la estructura de red durante el entrenamiento. Así, basados en la idea de realizar una exploración sobre el espacio de estructuras de red, se propone el uso del algoritmo Metropolis-Hastings (MH) sobre un grafo que describe una forma eficiente de explorar entre las distintas arquitecturas de red. Por otro lado, en contextos generales surge la necesidad de encontrar modelos que minimicen las funciones de pérdida de manera adecuada y que sean sencillos, a fin de evitar altos costos de almacenamiento, tiempos largos de entrenamiento, alta complejidad de los cálculos, etc. Para ello, se presentan criterios estadísticos, basados en el uso de la teoría de Mínimo Riesgo Estructural de Vapnik-Chervonenkis y algunas generalizaciones de esta, que favorecen la elección de modelos sencillos con funciones de pérdida pequeñas. En consecuencia, se propone el uso de dichos criterios dentro de la especificación de MH. Finalmente, se generaliza el resultado de consistencia estadística del paradigma de Mínimo Riesgo Estructural al contexto de aproximación de funciones, a fin de validar los resultados de nuestra propuesta en el contexto de regresión.

### **Riesgo y Resiliencia Fiscal del Cauca: El Papel de los Cultivos Ilícitos en la**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Economía Regional**

Mauren Dayanna López Salazar

Universidad del Cauca

mlopezs@unicauca.edu.co

La sostenibilidad fiscal del departamento del Cauca enfrenta un desafío crítico debido a la dependencia económica de los cultivos ilícitos, los cuales generan inestabilidad financiera y limitan el desarrollo de sectores productivos formales. Este estudio combina modelos matemáticos avanzados con análisis económico para evaluar el impacto de esta dependencia y proponer estrategias de mitigación basadas en datos. A través del uso de regresión polinómica, modelos ARIMA y análisis de correlación, se cuantifica la relación entre la expansión de los cultivos ilícitos y el crecimiento del déficit fiscal. Los resultados revelan una correlación significativa entre el aumento de hectáreas cultivadas y el deterioro de los indicadores económicos, evidenciando la fragilidad de la economía regional. Además, las proyecciones del modelo ARIMA indican que, sin una intervención efectiva, el endeudamiento del Cauca continuará creciendo de manera insostenible. Como respuesta a este escenario, se plantean estrategias de diversificación económica, sustitución de cultivos y modernización tributaria para reducir la dependencia del narcotráfico. La implementación de inteligencia artificial y machine learning en la formulación de políticas públicas es clave para diseñar soluciones dinámicas y adaptativas. Este estudio proporciona una hoja de ruta para fortalecer la estabilidad fiscal del Cauca, evidenciando cómo la matemática aplicada puede servir como herramienta fundamental en la toma de decisiones económicas y gubernamentales.

### **Procesos Kac-Ornstein-Uhlenbeck con saltos afines: teoría y aplicaciones en actuaría y finanzas**

Oscar Javier López Alfonso

Universidad Nacional de Colombia

ojlopeza@unal.edu.co

Nikita Ratanov

Chelyabinsk State University

En esta charla presentamos y analizamos los procesos de Kac-Ornstein-Uhlenbeck con saltos afines, una nueva clase de procesos estocásticos que amplían los modelos de Ornstein-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Uhlenbeck clásicos al incorporar trayectorias de variación acotada y una dinámica con cambio de régimen. Construimos martingalas explícitas asociadas a estos procesos y examinamos sus momentos de primer y segundo orden. Posteriormente, aplicamos este marco teórico a la modelación financiera, especialmente en la formulación de modelos de tasa corta para la dinámica de las tasas de interés. Bajo la hipótesis de expectativas insesgadas, derivamos aproximaciones analíticas para los precios de los bonos cero cupón. Ejemplos numéricos ilustran la precisión y aplicabilidad práctica del modelo.

### **Análisis Exploratorio Estadístico de Datos Metagenómicos del Microbioma Rizosférico en Cultivos de Fresa**

Paula Camila Silva Gomez

Universidad Nacional Autónoma de México

silvagomezpcamila@gmail.com

Nelly Sélem Mojica

Universidad Nacional Autónoma de México

El análisis metagenómico genera grandes volúmenes de datos cuya interpretación requiere métodos matemáticos y estadísticos avanzados para identificar patrones y variaciones en comunidades microbianas complejas. En este contexto, el microbioma rizosférico juega un papel clave en la salud y productividad de los cultivos agrícolas, regulando la disponibilidad de nutrientes y la resiliencia del suelo. Comprender estas variaciones es fundamental para desarrollar estrategias de manejo agrícola basadas en la optimización del microbioma del suelo. Este estudio analiza las diferencias en la composición y estructura del microbioma rizosférico entre plantas saludables y no saludables en cultivos de fresa (*Fragaria ananassa*), aplicando herramientas avanzadas de estadística y modelado matemático para cuantificar estas variaciones y evaluar su impacto en la agronomía. Para describir y modelar los datos, se calcularon índices de diversidad alfa (Chao1, Shannon y Simpson) para estimar la riqueza y equidad de especies, mientras que la diversidad beta se evaluó mediante métricas de distancia (Bray-Curtis, Jaccard y UniFrac) para analizar la variación en la composición microbiana entre grupos. Para la validación estadística, se aplicaron pruebas de hipótesis como Mann-Whitney. Los resultados mostraron que las plantas saludables presentan una mayor diversidad microbiana en comparación con las no saludables. Sin embargo, las pruebas de hipótesis no fueron concluyentes, ya que las diferencias observadas en la diversidad microbiana no alcanzaron un nivel de significancia suficiente para establecer una separación categórica



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

entre los grupos. A pesar de ello, las métricas de diversidad alfa y beta permitieron identificar tendencias generales en la composición microbiana, sugiriendo que otros factores pueden influir en la estructura de la comunidad rizosférica. A nivel taxonómico, se observó una reducción en la abundancia de ciertos filos microbianos en plantas no saludables, lo que sugiere una relación entre la composición del microbioma y la estabilidad agronómica del cultivo. En particular, las plantas saludables albergan una microbiota más diversa y equilibrada, mientras que las no saludables presentan un incremento de microorganismos patógenos, reflejando un desequilibrio microbiano que podría comprometer la productividad agrícola. Este estudio enfatiza la importancia de integrar herramientas matemáticas, estadísticas avanzadas y ciencia de datos en la caracterización del microbioma rizosférico, permitiendo modelar y predecir su influencia en la salud del suelo agrícola. Los hallazgos pueden contribuir a la optimización de prácticas agrícolas basadas en microbiomas, promoviendo la sostenibilidad y eficiencia en la producción de cultivos.

### **Análisis de Datos Funcionales y Modelos de Predicción Aplicados al Índice Bursátil IPSA**

Sebastián Burgos Borquez

Universidad Católica del Norte

sebastian.burgos@alumnos.ucn.cl

Sebastián Cuellar Carrillo

Universidad Católica del Norte

El análisis de datos funcionales (Functional Data Analysis, FDA) es un área emergente de la estadística que se centra en el estudio de variables aleatorias funcionales, las cuales permiten modelar con mayor precisión procesos que evolucionan de forma continua en el tiempo. Este trabajo tiene como objetivo aplicar este enfoque al análisis y predicción del índice bursátil chileno IPSA, mediante el uso de modelos autoregresivos funcionales y su comparación con métodos tradicionales de pronóstico. La metodología se basa en el enfoque propuesto por Shang (2017). A partir de observaciones discretas del IPSA, se construyen elementos funcionales en el espacio  $L^2[a, b]$ , utilizando una transformación que permite representar las trayectorias diarias del índice como funciones. Posteriormente, se aplica un Análisis de Componentes Principales Funcionales (FPCA), que no solo permite reducir la dimensionalidad, sino también facilita la detección de observaciones atípicas en el conjunto funcional. Con base en esta representación funcional, se implementa un modelo autoregresivo funcional de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

orden uno (FAR(1)), así como dos variantes basadas en el método de Hyndman-Ullah. Este último utiliza la expansión de Karhunen-Loève para representar los datos funcionales, y predice nuevas observaciones a partir de las proyecciones sobre las componentes principales funcionales. Las predicciones se generan a través del modelamiento de las series temporales asociadas a cada componente principal funcional. Se consideran dos escenarios: i) las series correspondientes a diferentes componentes son independientes entre sí, y ii) existe dependencia cruzada entre componentes. Para el primer caso, se ajustan modelos ARIMA de manera univariada; en el segundo, se utiliza un modelo VAR(1) para capturar las interdependencias entre componentes. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos por los modelos funcionales con un modelo tradicional basado en la serie temporal discreta original, evaluando el desempeño predictivo de cada enfoque.

### **Sensibilidad en la elección modal: análisis del comportamiento de viaje según el género a partir de un modelo logit mixto**

Sergio Alejandro Barona

Pontificia Universidad Javeriana de Cali, Departamento de Economía y Finanzas

[sergio.barona@javerianacali.edu.co](mailto:sergio.barona@javerianacali.edu.co)

Daniela Valdés Cárdenas

Pontificia Universidad Javeriana de Cali, Departamento de Economía y Finanzas

El acceso y uso del transporte público no es igual para hombres y mujeres. Factores como la inseguridad, la distribución desigual del trabajo de cuidado y los patrones de viaje diferenciados influyen en la movilidad femenina, generando barreras que afectan su autonomía y calidad de vida. A pesar de los avances en el reconocimiento de estas desigualdades, la planificación del transporte aún carece de una perspectiva de género que considere cómo varían estos efectos según distintos escenarios y supuestos. En muchas ciudades, las opciones de movilidad siguen estando limitadas para las mujeres, quienes enfrentan experiencias marcadas por el riesgo y la vulnerabilidad. La percepción de inseguridad en estaciones y vehículos no solo restringe sus opciones de transporte, sino que también condiciona sus decisiones diarias, llevándolas a optar por alternativas más costosas o menos eficientes. Esta problemática evidencia la necesidad de desarrollar políticas que integren un enfoque más sensible a las necesidades diferenciadas de los usuarios. Para contribuir a este objetivo, el presente estudio emplea modelos de elección discreta bajo la teoría de la utilidad aleatoria, con el fin de analizar cómo ciertos factores influyen en las decisiones de movilidad femenina.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En particular, se utiliza el Modelo Logit Mixto (MXL) para superar las limitaciones del Logit Multinomial (MNL), evaluando la elección entre automóvil, motocicleta y transporte público a partir de las elasticidades del costo del viaje. Los resultados muestran que las mujeres son más sensibles a los aumentos en los costos del transporte, lo que sugiere la importancia de estrategias como subsidios o tarifas diferenciadas para garantizar su accesibilidad. Por otro lado, se observa que los hombres tienen una mayor disposición a sustituir el automóvil por la motocicleta, lo que refuerza la necesidad de fortalecer medidas de seguridad vial y regulación de su uso. Estas diferencias de género en la sensibilidad al costo y en la elección modal subrayan la urgencia de diseñar sistemas de transporte más equitativos y eficientes. La movilidad urbana no puede entenderse sin considerar las dinámicas sociales que influyen en ella, por lo que integrar una perspectiva de género en su planificación es fundamental para avanzar hacia un sistema más inclusivo. Comprender estas desigualdades permite formular políticas que no solo beneficien a las mujeres, sino que también contribuyan a la sostenibilidad y seguridad en el transporte, promoviendo ciudades con mayor equidad y accesibilidad para toda la población.

### **Máximo restringido de puentes brownianos no intersectantes**

Yamit Yalanda

Universidad del Pacífico

yyalanda@unipacifico.edu.co

Para un sistema de  $N$  puentes Brownianos que no se intersectan en el intervalo  $[0, 1]$ , se estudia la altura máxima alcanzada por la trayectoria superior en el subintervalo  $[0, p]$ , denotada como  $M_N(p)$ . Bajo un reescalamiento apropiado, se demuestra que, cuando  $N$  tiende a infinito,  $M_N(p)$  converge en distribución a una familia de distribuciones que interpola entre las distribuciones de Tracy-Widom GOE y GUE. Además, se sabe que, para un valor fijo de  $N$ ,  $M_N(1)$  sigue la distribución del mayor valor propio de una matriz aleatoria perteneciente a la familia LOE. En esta presentación, se explorará una versión de estos resultados para  $M_N(p)$  con  $N$  fijo, mostrando que, cuando  $p$  tiende a 0,  $M_N(p)$  dividido por la raíz cuadrada de  $p$  converge en distribución al elemento más a la derecha en un Ensemble Unitario Generalizado de Laguerre, que corresponde al mayor valor propio de una matriz aleatoria extraída del Ensemble Gaussiano Antisimétrico.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

## **Análisis Espacio-Temporal de la dinámica del delito en el territorio Colombiano**

YERSSON ESTEBAN MONTENEGRO ASTUDILLO  
UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
yemontenegro@unicauca.edu.co

Este estudio aborda dos técnicas fundamentales en el análisis de datos espaciales y temporales sobre el delito en el territorio colombiano: la interpolación IDW (Inverse Distance Weighting) y el modelo SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average). La interpolación IDW permite estimar la densidad delictiva en áreas donde los datos son escasos, proporcionando una visión más completa de la distribución geográfica de los delitos. Por otro lado, el modelo SARIMA es utilizado para predecir la evolución de la criminalidad a lo largo del tiempo, identificando patrones estacionales y tendencias subyacentes. En este trabajo se busca combinar herramientas de la estadística que puedan apoyar la toma de decisiones en materia de seguridad y políticas públicas, proporcionando información clave para la prevención y el control del delito en Colombia.

## **2.12. Teoría de operadores, análisis numérico y de ciencias de la computación.**

**El uso de Teoría formal de conceptos para la extracción de palabras clave** Abel Alvarez Bustos Pontificia Universidad Javerian - Cali  
abel.alvarez@javerianacali.edu.co  
Carlos Ernesto Ramirez Ovalle  
Pontificia Universidad Javerian - Cali

"La literatura científica crece exponencialmente cada año, lo que ha llevado a la publicación de cientos de miles de artículos en todas las áreas del conocimiento. Esta cantidad de información supera las capacidades de búsqueda y clasificación humanas; por tanto, se requieren herramientas eficientes para clasificar, interpretar y comprender estos datos. En la actualidad, la extracción de palabras clave es esencial para caracterizar y extraer información de un texto, y su importancia es especialmente relevante en las disciplinas sociales, donde la



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

presencia de conceptos difusos y subjetivos dificulta el análisis.

Desde la mirada de análisis formal de conceptos y el uso del procesamiento natural del lenguaje (NPL), se propone una técnica para la extracción de palabras clave en documentos. Adicionalmente, se logra agruparlas en unidades semánticas que reflejen las estructuras discursivas fundamentales. La novedad de este trabajo reside en la actualización metodológica:

La construcción del grafo de co-ocurrencias se realiza utilizando la métrica PMI (Pointwise Mutual Information) entre palabras, lo que permite evaluar de forma precisa la relación de “cercanía” entre términos. La selección de la importancia de cada nodo se determina mediante una versión amortiguada del algoritmo PageRank, a la que se añade un valor aditivo por nodo derivado de una nueva forma de homofilia, denominada homofilia pluralista por comunidades. Este criterio asocia de forma natural palabras que se vinculan al pertenecer a las mismas comunidades, favoreciendo la construcción de conceptos formales robustos.

Esta metodología permite obtener, de forma sistemática, agrupaciones significativas de palabras clave que revelan las ideas fundamentales subyacentes en una temática, facilitando a los investigadores la identificación de los conceptos presentes en un conjunto de artículos de su interés."

### **Inpainting-based Restoration using Diffusion and Texture-based Methods: Case Study of Law Faculty of the Universidad Nacional, Bogotá Campus**

Alejandro Camilo Sánchez Lombana

Universidad Nacional de Colombia

[alsanchezl@unal.edu.co](mailto:alsanchezl@unal.edu.co)

Diego Gerardo Roldán Jiménez

Universidad Nacional de Colombia

Mathematical methods for inpainting in mural restoration leverage techniques such as partial differential equations (PDEs), or variational models. PDEs approaches are suitable for restoring full boundaries information regions, whereas variational approaches, such as total variation minimization, enhance edge preservation. We study both approaches in the treatment of a recent mural discovered in the Universidad Nacional de Colombia, Bogota campus by the Colombian painter Alipio Jaramillo. Results show promising restorations, especially in large missing areas. However, challenges remain in texture consistency and interpretability. Future directions include texture models as well as data-driven techniques for more reliable and artifact-free restoration.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

## **Esquemas numéricos de Navier-Stokes con condiciones de deslizamiento aplicados a estimadores de presión sanguínea**

Carlos Andrés Marín Ospina  
Universidad Eafit  
cmarin@eafit.edu.co

El estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de contorno generalizadas es un problema fundamental en el análisis numérico y la mecánica de fluidos. En este trabajo, se considera la formulación y resolución numérica de Navier-Stokes con condiciones de deslizamiento Navier-Slip y viscosidad variable, en contraste con las condiciones tipo Dirichlet que usualmente son empleadas para modelado de flujos incompresibles. Se desarrolla un esquema numérico basado en el método de elementos finitos, con discretización temporal mediante esquemas de proyección y actualización de presión. Se analizan diferentes formulaciones variacionales en espacios de Sobolev adecuados, considerando la estabilidad en normas de energía y condiciones CFL. La implementación se realiza en FEniCS Python, evaluando la convergencia y precisión en dominios representativos. Los esquemas numéricos estudiados incluyen: 1. Esquema de Chorin: Método de proyección en dos pasos con condiciones Dirichlet en las paredes y Do-Nothing en la salida. 2. Esquema de presión correctiva: Incorporación de una actualización de presión en cada paso de tiempo, evaluando su estabilidad en presencia de viscosidad variable. 3. Extensión con Viscosidad Variable y Levantamiento de Neumann: Reformulación de las condiciones de contorno considerando el tensor de esfuerzos en la salida y una doble corrección de presión mediante un levantamiento de Neumann. Desde un punto de vista aplicado, estos desarrollos son clave en la simulación del flujo sanguíneo en arterias con estenosis. La modelización adecuada de las condiciones en las paredes arteriales es un problema abierto en la biomecánica computacional, y el uso de condiciones Navier-Slip permite capturar efectos de deslizamiento que no son considerados en enfoques más restrictivos. En este contexto, se evalúa la precisión de los estimadores de presión en flujos arteriales, particularmente mediante el Estimador de Poisson para la Presión (PPE), que permite calcular la caída de presión en arterias coronarias a partir de imágenes de resonancia magnética con contraste de fase (PC-MRI). El objetivo es mejorar la estimación del índice de reserva de flujo fraccional (FFR) sin necesidad de procedimientos invasivos. Este trabajo contribuye al desarrollo de métodos numéricos para fluidos con condiciones de contorno avanzadas, con aplicaciones tanto en la teoría matemática de ecuaciones en derivadas parciales como en la



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

simulación computacional de fenómenos biomédicos.

### **Propiedades dinámicas para operadores de composición**

Carlos Fabián Álvarez Escorcía

Universidad del Atlántico

`cfalvarez@mail.uniatlantico.edu.co`

Javier Henríquez Amador

Universidad del Valle

En esta ponencia discutiremos algunas propiedades dinámicas para operadores de composición definidos sobre espacios de Hilbert con núcleo reproductor. En particular, exploraremos tales propiedades en el contexto de los espacios de Hardy-Hilbert sobre el semiplano y Paley-Wiener de funciones enteras.

### **A Hash Table Data Structure for Adaptive Quadtree Meshes Management**

Catalina M. Rúa-Alvarez

Universidad de Nariño

`catalina.rua@udenar.edu.co`

Claudia P. Ordóñez R.

Universidad de Puerto Rico

The numerical approximation of applications modeled by Partial Differential Equations (PDE) frequently employs matrix-based discretizations, such as finite differences or finite elements. To efficiently capture details of the problems to be solved in specific regions, Adaptive Mesh Refinement (AMR) is often used. This work focuses on the development of efficient data structures for managing cells in Adaptive Cartesian Grids, also known as Quadtree, characterized by the recursive subdivision of cells into four new cells at a finer level. The identification of points on cells and the effective communication between neighboring cells are fundamental in AMR. There in this work we implemented and compared two data structures based on Hash Tables (HT): one with a level-based vector structure and another with linked lists to optimize memory management. Additionally, in this talk, we validated the HT data structure implemented by generating static and dynamic adaptive meshes with different refinement criteria, employing the operations of refinement, coarsening, insertion, deletion, search, and cell neighborhood calculation. Furthermore, the efficiency and collision handling



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

of the HT are analyzed. Finally, we present the enumeration of cells by level, randomly, or by creation in the data structure, necessary for the generation of sparse matrices in PDE discretizations. All implementations are conducted using Matlab. This work was partially supported by VIIS-UDENAR. This is a joint work with Priscila C. Calegari, INE-UFSC, Brazil.

### **Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) to Explore Pattern Formation: A Data-Driven Approach**

CESAR ACOSTA-MINOLI

UNIVERSIDAD DEL QUINDIO

cminoli@uniquindio.edu.co

Pattern formation is fundamental in various scientific disciplines, from biology to materials science. In this work, we explore the application of Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) to extract governing equations for pattern-forming processes observed, for instance, in data coming from high-resolution transmission electron microscopy (HR-TEM) images of graphene oxide (GO). SINDy provides a data-driven approach to infer the underlying dynamics from observed structures. We formulate our approach by treating HR-TEM images as steady-state solutions of reaction-diffusion systems, where the governing partial differential equations (PDEs) are identified using sparse regression techniques. Additionally, we extend the analysis to multi-component reaction-diffusion models, incorporating the effects of hydroxyl and epoxy functional groups on the pattern evolution. Our findings suggest that SINDy can capture key dynamical interactions governing the morphological features of GO at the nanoscale when combined with an understanding of the fundamental laws of the phenomena.

### **Modelo Twisted Quantum Double com orden topológico local**

César Galindo

Universidad de los Andes

cn.galindo1116@uniandes.edu.co

En computación cuántica, los códigos cuánticos topológicos ofrecen una protección ro-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

busta contra la decoherencia, gracias a su resistencia frente a perturbaciones locales. El toric code es un ejemplo paradigmático de este tipo de códigos cuánticos error-correctibles (QECC, por sus siglas en inglés), y ha dado lugar a generalizaciones como el Kitaev's quantum double model asociado a un grupo finito.

Estos modelos presentan propiedades que van más allá de las de un QECC estándar, las cuales se describen mediante una formulación axiomática conocida como *orden topológico local* (LTO), basada en proyectores locales sobre el espacio de estados fundamentales. En esta charla veremos que el modelo Twisted Quantum Double, que extiende el modelo de Kitaev incorporando un twist cohomológico dado por una clase  $\alpha \in H^3(G, U(1))$ , satisface los axiomas de LTO. Este resultado establece que el espacio de estados fundamentales del modelo Twisted constituye un QECC, aunque la descripción de un procedimiento explícito de corrección de errores sigue siendo un problema abierto.

Este es un trabajo conjunto con Shawn Cui (Purdue University) y nuestro estudiante doctoral Diego Romero (UniAndes).

### Redes heterogéneas con alto coeficiente de agrupamiento

Cristian Javier Bravo Valenzuela

Universidad del Cauca

[javibrav@unicauca.edu.co](mailto:javibrav@unicauca.edu.co)

Diego Fernando Ruiz Solarte

Universidad del Cauca

La generación y el análisis de redes complejas es un área fundamental en ciencia de redes. En este trabajo se presenta un modelo de generación de redes heterogéneas que se caracteriza por un alto coeficiente de agrupamiento. El modelo incluye mecanismos como la adición de nuevos nodos, la conexión preferencial basada en la afinidad entre tipos (simulando la tendencia natural de entidades similares a conectarse), un proceso de cierre de tríadas que favorece la transitividad observada en redes reales, y un mecanismo de respuesta de la red frente a nuevas incorporaciones. Mediante el análisis de métricas como la distribución de grados de entrada, la suma de grados por tipo y el coeficiente de agrupamiento global, se caracteriza el comportamiento de la red a lo largo del tiempo (discreto) y para distintos parámetros del modelo.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Numerical solution of a convection - diffusion - reaction system modeling reactive settling in wastewater treatment**

Daniel Enrique Támara López

Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

detamaral@unal.edu.co

Reactive settling is a fundamental process in secondary settling tanks (SSTs) of wastewater treatment plants, where physical solid-liquid separation phenomena and biological reactions occur simultaneously.

In this work, a reactive settling model for wastewater treatment is presented. The final form of the model is a system of spatially one-dimensional, nonlinear, strongly degenerate parabolic convection-diffusion-reaction equations, with discontinuous convective fluxes. The unknowns of the system are the total concentration of suspended solids (bacteria, activated sludge), the specific fractions of each particulate component, and the concentrations of dissolved substrates, all as functions of time and depth.

To solve the model, two finite volume-based numerical methods are developed and compared. One method is explicit (method XPE) and the other is semi-implicit (method XPSI). In the first, the convective, diffusive, and reactive terms are discretized explicitly. In the second, the diffusive term is treated implicitly, while the others remain explicit.

The numerical results allow us to conclude that the methods exhibit comparable accuracy in estimating the approximation error, and that the semi-implicit scheme is more efficient in terms of computational time, which is due to a less restrictive CFL condition than that of the explicit scheme.

### **Scaling FRQI: Towards Large-Scale Quantum Image Processing** David Sebastián Mendoza Cruz

Universidad Nacional de Colombia

damendozac@unal.edu.co

Diego Gerardo Roldán Jiménez

Universidad Nacional de Colombia

Este estudio explora la implementación práctica de la Representación Flexible de Imágenes Cuánticas (FRQI) en hardware cuántico real, pasando de su formulación teórica a una aplicación escalable. Para ello, se analizan dos enfoques basados en puertas cuánticas: MCRY y MARY, evaluando su impacto en la eficiencia computacional y la reducción de errores.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Se demuestra que MARY presenta un mejor desempeño que MCRY en múltiples aspectos, especialmente cuando se trabaja con imágenes de mayor tamaño. Mientras que MCRY introduce un alto número de puertas CX, lo que incrementa la profundidad del circuito y la acumulación de errores, MARY reduce estos problemas al disminuir a la mitad la cantidad de puertas CX necesarias. Esta optimización mejora la fidelidad de las imágenes codificadas y decodificadas, reduciendo la influencia del ruido en los resultados.

En términos de escalabilidad, MARY permite codificar imágenes de hasta  $256 \times 256$  en simuladores, mientras que MCRY está limitado a  $32 \times 32$ . En hardware cuántico real, MARY extiende la factibilidad de  $16 \times 16$  a  $32 \times 32$ , lo que demuestra su aplicabilidad en la era cuántica de escala intermedia con ruido (NISQ).

Estos resultados acercan la FRQI a aplicaciones reales en procesamiento cuántico de imágenes, optimizando los recursos computacionales y la calidad de los resultados. Futuras investigaciones deberían explorar estrategias de mitigación de errores y la integración de FRQI con otras técnicas de procesamiento cuántico para mejorar su desempeño en conjuntos de datos más complejos.

### **Estudio numérico de un sistema diferencial describiendo el crecimiento de cáncer prostático**

Diego Armando Rueda Gómez

Universidad Industrial de Santander

diaruego@uis.edu.co

Juan Diego Ríos Colmenares

Universidad Industrial de Santander

El cáncer de próstata (PCa por sus siglas en inglés) es uno de los tipos de cáncer más frecuente; específicamente, es el segundo tipo de cáncer más común en el género masculino a nivel mundial según la Organización Mundial de la Salud. En la mayoría de los casos, el PCa es un adenocarcinoma, que es una forma de cáncer que comienza a crecer en el tejido epitelial de la próstata, y su crecimiento y evolución dependen de diversos factores entre los que se encuentran algunas alteraciones genéticas que lo inician y las condiciones microambientales del tumor. Así mismo, un proceso clave en el crecimiento tumoral es la angiogénesis inducida por el tumor, que consiste en el crecimiento de nuevos vasos sanguíneos a partir de los preexistentes mediante señales químicas producidas por el tumor.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Desde el punto de vista matemático, el modelado y la simulación computacional del cáncer han demostrado ser prometedores para ampliar la comprensión de estas patologías, así como para pronosticar el crecimiento de tumores y los resultados de algunos tratamientos. De manera específica, en (Colli et al. 2020) se propone y se estudia teóricamente un modelo matemático que consiste en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) para modelar la dinámica del cáncer prostático en presencia de quimioterapia y terapia antian-giogénica.

Esta charla se enfoca en el estudio numérico del sistema de EDP propuesto en (Colli et al. 2020). Se propone un esquema numérico completamente discreto basado en el Método de los Elementos Finitos, para el cual se estudian diversas propiedades cualitativas tales como su buen planteamiento, estimaciones puntuales para las variables discretas (relevantes tanto desde el punto de vista biológico como matemático), y la convergencia de las soluciones discretas hacia un estado estacionario (cuando el número de etapas de tiempo tiende a infinito). Finalmente, se presentan los resultados de algunas simulaciones numéricas que evidencian el buen comportamiento del esquema propuesto.

### **Parabolic problem considering diffusion piecewise constant refer to domain using FEM.**

Guillermo Villa Martínez

Universidad Tecnológica de Pereira

gvilla@utp.edu.co

This paper presents a numerical solution of the one-dimensional heat equation using the Finite Element Method (FEM) with time discretization through the implicit Euler scheme. The formulation considers piecewise constant diffusion coefficients over the spatial domain and employs a weak formulation approach for numerical approximation. The study provides a detailed analysis of the assembly process, including mass, stiffness, and load matrices. The Numerical results illustrate the accuracy and stability of the proposed method under different initial conditions and diffusion parameters.

### **Sobre una generalización de los polinomios de Charlier aplicados a los operadores tipo Brenke.**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Javier Eduardo Villa Herrera

Universidad del Atlántico

[jevilla@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:jevilla@mail.uniatlantico.edu.co)

En este trabajo se introduce una nueva familia de polinomios paramétricos tipo U-Charlier-Poisson, los cuales generalizan los polinomios clásicos de Charlier. Luego, se estudian algunas propiedades como lo son su representación explícita, relación de ortogonalidad y su conexión con la derivada de la función armónica. Posteriormente se aplican los operadores tipo Brenke a la nueva familia de polinomios para estudiar propiedades de convergencia utilizando el teorema de Korovkin.

### **Design of a p-type descriptor with Fourier analysis to classify the pseudopetiolate leaves of frailejones**

Jhoan Sebastian Tenjo Garcia

Universidad Nacional de Colombia

[jtenjo@unal.edu.co](mailto:jtenjo@unal.edu.co)

Francisco Albeiro Gomez

Universidad Nacional de Colombia

Fourier descriptors have traditionally been employed for the analysis of closed curves in pattern recognition and morphological studies. However, many natural shapes—such as frailejones leaves—are more accurately modeled as open curves, particularly when the leaf base exhibits pseudo-petiolation. In this work, we introduce a novel p-type Fourier descriptor that combines the complex exponential representation of the total curvature function with p-harmonic smoothing. This integration yields a descriptor that not only preserves endpoint consistency and remains invariant under translation, scaling, and rotation, but also robustly captures subtle curvature variations critical for distinguishing leaves with pseudo-petiolate bases from those without. Experimental results indicate that only a few low-frequency components are sufficient to encapsulate the key morphological features, enabling effective discrimination between the two classes.

### **Modelacion directa para la determinacion no destructiva de la conductividad electrica de materiales compuestos utilizando metodos mimeticos.**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Jorge Eliecer Ospino Portillo

Universidad del Atlántico y Universidad Nacional Abierta y a Distancia.

joreliospo@gmail.com

Andres Guerra Garay

Universidad del Norte

En este trabajo se estudia la sensibilidad de un modelo matemático de tomografía de resistividad eléctrica con respecto a los parámetros de conductividad de un material compuesto utilizando operadores gradiente y de divergencia mínimos de ordenes 2, 4, 6 y 8, basados en diferencias finitas de Castillo-Grone, aplicados a la solución numérica de problemas de frontera para la ecuación de conductividad anisotrópica para el caso bidimensional sobre una cuadrícula uniforme.

### **Un semigrupo de operadores de composición ponderada relacionados a la Hipótesis de Riemann.**

JUAN CARLOS MANZUR VILLA

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

juanmanzur112193@gmail.com

La hipótesis de Riemann (RH) es considerada el problema abierto más importante en matemáticas, que afirma que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann se encuentran en la “línea crítica”. Este problema ha sido estudiado durante aproximadamente un siglo y medio, pero aún no se ha encontrado una demostración. El principal objetivo de este trabajo es estudiar un semigrupo de operadores de composición ponderada  $(W_n)_{n \geq 1}$  sobre el espacio de Hardy  $H^2$  del disco abierto unitario. Se presentarán nuevas reformulaciones de la hipótesis de Riemann en términos de las propiedades de este semigrupo. Además, se identificará una nueva familia de vectores cíclicos asociados al semigrupo, con el propósito de generalizar el criterio de Báez-Duarte en  $H^2$ .

### **Solución Numérica del Modelo FitzHugh-Nagumo en Medios Heterogéneos**

Juan David Hernández Ramírez

Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá

juadhernandezram@unal.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En este trabajo se busca obtener soluciones eficientes al sistema en reacción-difusión del modelo FitzHugh-Nagumo con estructura espacial en medios heterogéneos. En ese sentido se busca obtener soluciones numéricas a través del método de elementos finitos combina con una discretización temporal tipo Euler. El método consiste obtener soluciones a través del desarrollo de sistemas matriciales para cada paso de tiempo. Además se considera coeficientes difusivos con variación múltiples escalas y alto contraste. Para esto se emplean técnicas que combinan método de elementos finitos multiescala y descomposición de dominios para la construcción de preconditionadores que permitan obtener soluciones eficientes.

### **UNA DESCRIPCIÓN DE LOS ÁRBOLES BINARIOS MEDIANTE UN LENGUAJE FORMAL**

Juan Jose Alegria Escobar

Universidad del Cauca

[jjalegriae@unicauca.edu.co](mailto:jjalegriae@unicauca.edu.co)

Diego Fernando Ruiz Solarte

Universidad del Cauca

Las estructuras de datos y los autómatas son unos de los pilares fundamentales de las ciencias de la computación, razón por la cual este trabajo pretende evidenciar una conexión directa entre estos dos conceptos y proponer un método para verificar las cadenas que pertenecen al lenguaje aceptado por un autómata con una configuración de estados que representa un árbol binario.

### **Crecimiento de los valores propios del operador discreto de Schrödinger**

Juan Pablo Lopez Holguin

Universidad del Valle

[juan.lopez.holguin@correounivalle.edu.co](mailto:juan.lopez.holguin@correounivalle.edu.co)

En el presente resumen extendido mostramos condiciones suficientes en el orden de los operadores pseudo-diferenciales discretos que aseguren la pertenencia a algunas clases  $p$ -Schatten-von Neumann. Esto nos permitirá estudiar el comportamiento asintótico de los valores propios de ciertos operadores, en específico, el operador discreto de Schrödinger con



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

potencial polinómico.

### **LORENTZ-TYPE SPACES AND COMPACTNESS OF GENERALIZED DIFFERENCE OPERATORS**

Julio César Ramos Fernández

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[jcramosf@udistrital.edu.co](mailto:jcramosf@udistrital.edu.co)

In this talk, we characterize the sequences  $u$  and  $v$  that define continuous and compact generalized difference operators  $\Delta_{u,v}$  acting on the broad class of quasi-Banach Lorentz-type sequence spaces. Our results provide genuine extensions and generalization of known results about the continuity and compactness of multiplication operators acting on classical Lorentz sequence spaces. we present recent results due M. S. Luque-Casallas; J. C. Ramos Fernández and M. Salas-Brown (2025).

### **Adaptive Finite Difference Matrix Schemes for the Poisson Equation**

Juneth Andrea Terán T.

Universidad Cesmag

[jateran@unicesmag.edu.co](mailto:jateran@unicesmag.edu.co)

Catalina M. Rúa-Alvarez

Universidad de Nariño

A variety of engineering and physics applications can be mathematically modeled by Partial Differential Equations, such as the Poisson equation. In this work, the two-dimensional Poisson equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions is approximated using Finite Difference Matrix (FDM) schemes with Adaptive Mesh Refinement in specific regions. The FDM apply to the Poisson equation approximation have stencil variation based on the location of nodes or cell centers, as well as the boundary conditions. Communication between cells at different refinement levels is achieved using second-order interpolation, starting with Lagrange interpolation and subsequently highlighting the advantages of Moving Least Squares interpolation. Finally, convergence is verified, comparisons of the linear system solution with different numerical methods in Python are performed, and a study of various matrix properties, such as condition number, sparsity pattern, and changes based on the



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

applied interpolation, is conducted. This work was partially supported by VIIS-UDENAR and CESMAG.

### **Identificación de un coeficiente discontinuo en problemas elípticos usando regularización generalizada de Tikhonov y el métodos de elementos finitos**

Luis Eduardo Olivar Robayo

Universidad del Tolima

leolivar@ut.edu.co

En este artículo se considera el método basado en la minimización de una función especial que depende de dos parámetros de regularización; para la identificación del coeficiente dado como una función de la variable espacial con un número finito de discontinuidades, en una ecuación elíptica con fuente. Se llevará el problema original o formulación fuerte a una formulación débil, para analizar la unicidad y convergencia del mínimo del funcional de regularización. Se implementará numéricamente la búsqueda de coeficientes agregando errores a una función fuente, y para la minimización del funcional se utilizará un toolbox de Matlab, partiendo de un coeficiente inicial dado arbitrariamente. En el proceso iterativo es necesario ir encontrando una solución del problema directo; para lo cual utilizamos el método de elementos finitos, y en el proceso de minimización del funcional es necesario encontrar las derivadas de las soluciones para lo cual utilizaremos diferenciación por dos cocientes. Mostraremos la eficacia del método comparando ejemplos que aparecen en otras publicaciones.

### **Estructura de comunidad en grafos aleatorios heterogéneos**

María Alejandra Murcia cometa

Universidad del Cauca

mariamur@unicauca.edu.co

Diego Ruiz

Universidad del Cauca

El análisis de redes nos ayuda a comprender el comportamiento de las redes del mundo real. Este trabajo presenta un nuevo modelo para generar redes aleatorias dirigidas heterogéneas, donde a cada nodo se le asigna un tipo y los nuevos nodos se conectan a los nodos existentes según probabilidades ponderadas. Nuestro trabajo analiza la modularidad de red.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Examinamos cómo los parámetros del modelo influyen en la división de la red en dos comunidades y proporcionamos un análisis detallado de la dinámica de la modularidad, incluyendo su comportamiento a largo plazo. Además, se derivan ecuaciones de forma cerrada para la evolución temporal de los grados de cada nodo. Las caracterizaciones anteriores se verifican teóricamente mediante simulaciones, las cuales proporcionan nuevos conocimientos sobre la interacción entre la estructura y la dinámica en redes heterogéneas.

### **Análisis de convergencia de un método iterativo de dos pasos sobre grupos de Lie**

María del Pilar Astudillo Fernández

Universidad del Cauca

[mpastudillo@unicauca.edu.co](mailto:mpastudillo@unicauca.edu.co)

En esta ponencia se presenta una adaptación de un método iterativo de dos pasos, conocido como método de King-Werner, en el contexto de grupos de Lie. Este tipo de métodos resulta particularmente útil para abordar el problema de encontrar ceros de campos vectoriales definidos desde un grupo de Lie hacia su álgebra de Lie. Además de la descripción del método, se expondrá un resultado de convergencia semilocal, obtenido bajo hipótesis análogas a las del principio mayorante de Kantorovich, así como la determinación explícita del orden de convergencia. Finalmente, se presentará un ejemplo con el objetivo de ilustrar la aplicabilidad de la teoría desarrollada, junto con un breve panorama sobre trabajos actuales y líneas de investigación futuras en este campo.

### **Explorando el método de Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) en datos con diferentes niveles de ruido**

Melhany Garay Román

Universidad del Quindío

[melhany.garayr@uqvirtual.edu.co](mailto:melhany.garayr@uqvirtual.edu.co)

César Augusto Acosta Minoli

Universidad del Quindío

Los sistemas tipo Lotka-Volterra son muy importantes en la ecología ya que permiten comprender y describir el comportamiento y las interacciones entre presas y depredadores de una población. Cuando disponemos de datos es necesario pensar entonces en técnicas que



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

nos permitan construir un modelo que se ajuste a la descripción del fenómeno. Por lo tanto, en este espacio se presentará una técnica conocida como Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) para reconstruir modelos presa-depredador cuando se dispone de datos, en conjunto con otras técnicas que se aplican cuando hay diferentes niveles de ruido en los datos. La aplicación del algoritmo se realizó a partir de elementos como el proceso de discretización y la perturbación de los datos, posteriormente se utilizó el método SINDy para la reconstrucción haciendo un respectivo análisis del error. Los resultados muestran como el método utilizado reconstruye el sistema con gran precisión para ciertos niveles de ruido. Presentándose como una alternativa para la exploración de sistemas dinámicos que expliquen un fenómeno cuando se dispone de datos.

### **Geometría Computacional en el Aprendizaje Automático: más allá de la estadística**

Nicolás Avilán

Universidad del Rosario

`nicolasg.avilan@urosario.edu.co`

El aprendizaje automático se presenta en algunos contextos como una sofisticada aplicación de la estadística. Si bien esta disciplina desempeña un papel fundamental, una comprensión más completa del aprendizaje automático requiere también considerar las contribuciones de la geometría computacional. La interacción entre ambas áreas potencia el análisis de datos, el reconocimiento de patrones y la minería de datos.

Desde algoritmos geométricos utilizados para identificar características relevantes hasta arquitecturas de aprendizaje profundo, este artículo examina cómo las herramientas de la geometría computacional proporcionan soluciones innovadoras a problemas complejos en distintos enfoques del aprendizaje automático. Se presentan ejemplos tanto en métodos clásicos como en modelos de aprendizaje profundo.

Este enfoque ofrece a investigadores y estudiantes de geometría una perspectiva enriquecedora para comprender la inteligencia artificial, al tiempo que dota a la comunidad del aprendizaje automático de herramientas geométricas con valiosas aplicaciones.

### **Do Laplacian-Isospectral Domains Sound the Same in Elastodynamics?**

Nicolás Guarín-Zapata



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad EAFIT

nguarinz@eafit.edu.co

José Ortiz-Ocampo

Universidad EAFIT

We investigate the spectral properties of the differential operator associated with wave propagation in two-dimensional linear elastodynamics. Starting from variational principles, we derived the weak form of the governing differential equations. We performed a finite element method (FEM) discretization to obtain a finite-dimensional approximation of the operator. This approach enabled the estimation of eigenvalues and eigenfunctions, providing insights into their behavior across different geometric domains. We focused on two primary aspects of spectral analysis: the isospectrality of domains that present isospectrality for the Laplace operator, and the verification of a relation as Weyl's law for this operator. Our findings suggest that domains isospectral under the Laplace operator retain this property under the studied operator, indicating the need for further theoretical exploration to determine the necessary geometric conditions for isospectrality.

Additionally, while verifying Weyl's law, we observed that the coefficient relating the domain area to the eigenvalue growth rate is dependent on the domain geometry, underscoring the importance of the domain's shape in spectral analysis. Future studies should expand on the variety of domain geometries tested and integrate a more theoretical framework to deepen the understanding of these phenomena. The results contribute valuable empirical data to support theoretical investigations into the mathematical structures of wave propagation operators in elastodynamics. Further exploration into the impact of material parameter variations could also provide significant insights for subsequent research.

### **Geometría Computacional: gran clave del aprendizaje automático**

Nicolás Guillermo Avilán Vargas

Universidad del Rosario

nicolasg.avilan@urosario.edu.co

El aprendizaje automático se presenta en algunos contextos como una sofisticada aplicación de la estadística. Si bien esta disciplina desempeña un papel fundamental, una comprensión más completa del aprendizaje automático requiere también considerar las contribuciones de la geometría computacional. La interacción entre ambas áreas potencia el análisis de datos,



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

el reconocimiento de patrones y la minería de datos.

Desde algoritmos geométricos para la identificación de características hasta el aprendizaje profundo, este artículo examina cómo las herramientas de la geometría computacional proporcionan soluciones innovadoras a problemas complejos en distintos enfoques del aprendizaje automático. Se presentan ejemplos tanto en métodos clásicos de aprendizaje automático como en aprendizaje profundo.

Este enfoque ofrece a investigadores y estudiantes de geometría una perspectiva enriquecedora para comprender la inteligencia artificial, al tiempo que dota a la comunidad del aprendizaje automático de herramientas geométricas con valiosas aplicaciones.

### **Funciones de activación y optimizadores de gradiente fraccional para redes neuronales artificiales**

Oscar Herrera Alcántara

Universidad Autónoma Metropolitana

oha@azc.uam.mx

El creciente desarrollo de la inteligencia artificial (IA) y en particular sobre el estudio de las redes neuronales artificiales (RNA) ha llevado a proponer nuevas arquitecturas, algoritmos de optimización y funciones de activación para tener éxito en el aprendizaje automático. Entre las funciones de activación más conocidas en el contexto del aprendizaje automático están la función escalón, sigmoid, tangente hiperbólico, ReLU, Softplus, GeLU, Swish y wavelets como el de Haar. La arquitectura de una RNA se entiende como el tipo de conexión entre las neuronas y su organización en capas con diferentes objetivos en el procesamiento de los datos. Los algoritmos de optimización sirven para calcular el conjunto óptimo de parámetros de la RNA y entre los algoritmos de gradiente más usados están SGD y Adam. El objetivo fundamental del aprendizaje automático es extraer y modelar los patrones ocultos en los datos, conocido como minería de datos, mediante un modelo conexionista en el caso de una RNA. En forma iterativa, los algoritmos de optimización usan el gradiente para minimizar el error de entrenamiento ajustando los parámetros de la RNA entre sus diferentes capas, y buscando que el error con datos de prueba sea mínimo a pesar de que no se ajusten los parámetros con ellos, sino solamente con los datos de entrenamiento. Avances recientes en la investigación por nuevos métodos de optimización muestran que el uso de gradientes fraccionales provee un mejor desempeño que el uso del gradiente entero, y así se han propuesto versiones fraccionales de los métodos basados en gradiente descendente, tales como FSGD y



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

FAdam que son las versiones fraccionales de SGD y Adam respectivamente. También se han propuesto funciones de activación adaptivas. Morph() es una función adaptiva obtenida a partir del wavelet Haar con gradientes fraccionales, y que como el nombre sugiere, es capaz de adaptarse a otras funciones de activación ya conocidas pero que además permite cambiar su forma en base a los datos de entrenamiento. En este trabajo, se presentan optimizadores de gradiente y algunas funciones de activación aplicando el concepto de derivada fraccional y wavelets en RNA, con aplicaciones al procesamiento de datos ampliando las bibliotecas de Tensorflow y PyTorch.

### **A MATHEMATICAL MODEL FOR NORDIC SKIING**

Rafael Ordoñez Cardales

Universidad Popular del Cesar

reordonezc@unicesar.edu.co

Nordic skiing provides fascinating opportunities for mathematical modelling studies that exploit methods and insights from physics, applied mathematics, data analysis, scientific computing and sports science. A typical ski course winds over varied terrain with frequent changes in elevation and direction, and so its geometry is naturally described by a three-dimensional space curve. The skier travels along a course under the influence of various forces, and their dynamics can be described using a nonlinear system of ordinary differential equations (ODEs) that are derived from Newton's laws of motion.

We develop an algorithm for solving the governing equations that combines Hermite spline interpolation, numerical quadrature and a high-order ODE solver. Numerical simulations are compared with measurements of skiers on actual courses to demonstrate the effectiveness of the model."

### **Métodos Numéricos para un Modelo Acoplado de Dinámica de células Cancerígena**

Ricardo Prato Torres

Universidad de Antioquia

RICARDO.PRATO@UDEA.EDU.CO

Catalina Dominguez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad de Antioquia

En este trabajo, desarrollamos un esquema completamente discreto para un modelo de dinámica cancerígena. Este modelo consiste en tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas que describen la evolución de la densidad de células cancerígenas, la matriz extracelular y las enzimas degradadoras de la matriz. Se incorpora el efecto de proliferación y haptotaxis de las células cancerígenas, su interacción con la matriz extracelular, la producción de enzimas degradadoras y la consecuente degradación de la matriz extracelular. Además, se desarrolla un análisis de error residual a posteriori para el sistema de ecuaciones.

La discretización se obtiene mediante el método de Galerkin discontinuo en el tiempo, con polinomios de grado  $r$  para la variable temporal, combinado con un esquema de elementos finitos para la discretización espacial. Se presentan resultados numéricos que validan los resultados teóricos.

### Una revisión del esquema HHO para el problema de autovalores de Steklov

Rommel Andres Bustinza Pariona

Universidad de Concepcion, Chile

`rbustinza@udec.cl`

En este trabajo, discutimos la aproximación del espectro del problema de autovalores de Steklov, aplicando el método Híbrido de Alto Orden (HHO en inglés). Para esto, se adaptan las ideas descritas en un trabajo previo para aproximar el problema espectral clásico. Como es de esperar en este esquema, en este caso también se pueden eliminar las incógnitas volumétricas, introduciendo un operador discreto adecuado. Esto nos permite resolver el problema de autovalores matricial (generalizado) en el esqueleto de la malla, reduciendo el costo computacional. Esto lo hace competitivo con esquemas de elementos finitos conformes. El análisis de error a priori nos permite obtener tasas de convergencia óptimas para los valores propios y las funciones propias, cuando estas últimas son suficientemente suaves. Ejemplos numéricos, en 2D y 3D, serán incluidos, los cuales corroboran nuestros resultados teóricos., serán presentados en esta charla

Este trabajo ha sido desarrollado en conjunto con los Dres. Matteo Cicuttin (Politecnico di Torino, Torino, Italia, e-mail: `matteo.cicuttin@polito.it`) y Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina, e-mail: `ariel@fceia.unr.edu.ar`).

Área de interés: Análisis Numérico de EDP



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Un Enfoque Híbrido para la Ecuación de Burgers Viscosa: Combinación de Teoría de Capa Límite y Redes Neuronales Informadas por la Física**

Ruben Dario Ortiz Ortiz

Universidad de Cartagena

rortizo@unicartagena.edu.co

Ana Magnolia Marin Ramirez

Universidad de Cartagena

La ecuación de Burgers viscosa es un modelo fundamental en la dinámica de fluidos y otros sistemas físicos, caracterizado por la interacción entre la convección no lineal y la difusión. En este trabajo, presentamos un enfoque híbrido que combina la **Teoría de Capa Límite (BLT)** con **Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)** para mejorar la precisión y eficiencia en la solución de esta ecuación.

El método propuesto utiliza la BLT para obtener una aproximación inicial en regiones dominadas por la viscosidad, la cual se emplea como entrada para el entrenamiento de una PINN. Este enfoque permite capturar transiciones complejas, como la formación de ondas de choque, con mayor precisión que los métodos numéricos tradicionales. Además, la combinación de BLT y PINNs reduce significativamente el tiempo de entrenamiento y mejora la robustez del modelo ante diferentes valores del parámetro de viscosidad.

Se presentan resultados numéricos que validan la efectividad del método, incluyendo ejemplos en donde la solución estacionaria presenta una transición suave de tipo tanh. Finalmente, se discuten posibles extensiones del trabajo a otras ecuaciones diferenciales parciales no lineales, como la ecuación de Navier-Stokes.

### **Procesamiento y restauración de imágenes mediante la transformada discreta de Fourier (DFT)**

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

Universidad Nacional de Colombia

ytrujillo1@unal.edu.co

Carlos Enrique Nosa Guzman

Universidad Nacional de Colombia

El modelo general para la restauración de imágenes se basa en la relación entre la imagen distorsionada, la imagen restaurada y los efectos del velo atmosférico. La imagen distorsio-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

nada se representa como una matriz, donde cada elemento indica la intensidad de un píxel afectado por la neblina. La imagen restaurada, que busca eliminar estos efectos, tiene el mismo tamaño, esta se obtiene con el método de Roy-Chaudhuri.

Para mejorar la restauración y eliminar artefactos, se aplica un proceso de regularización utilizando la Transformada Discreta de Fourier (DFT). Esta transformación permite representar la imagen en el dominio de la frecuencia, lo que facilita la manipulación de sus componentes espectrales. Primero, se aplica la DFT a cada canal de color, luego se modifican ciertos valores en el dominio de la frecuencia filtrando algunas columnas específicas y, finalmente, se aplica la Transformada Inversa de Fourier (IDFT) para reconstruir la imagen en el dominio espacial.

Después de la regularización en Fourier, se controla el contraste utilizando el contraste de Michelson, que se calcula como la diferencia entre la intensidad máxima y mínima de la imagen regularizada, dividida por su suma. Este procedimiento permite obtener una imagen con mayor nitidez y mejor contraste, reduciendo significativamente los efectos de la neblina y mejorando la calidad visual de la imagen restaurada.

### **Estudio del método multiescala generalizado (GMsFEM) y aplicaciones a flujos bifásicos en medios porosos**

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

Universidad Nacional de Colombia

ytrujillol@unal.edu.co

Juan Carlos Galvis Arrieta

Universidad Nacional de Colombia

Jean Renel François

Universidade Federal do Ceará

Eduardo Cardoso de Abreu

Universidade Estadual de Campinas

Se estudia el acoplamiento del método multiescala generalizado (GMsFEM) y el método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano (SDLE) para la simulación de flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos. Para ello, se analizan los fundamentos teóricos y aplicaciones prácticas del método de elementos finitos (FEM), el método multiescala (MsFEM), GMsFEM y SDLE. Su desempeño se evalúa a través de la solución numérica de distintos problemas, como el



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

de la cuerda elástica, la ecuación de Poisson y la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos. Asimismo, se abordan leyes de conservación en el contexto de flujos bifásicos, con énfasis en la ecuación de Buckley–Leverett con gravedad.

### 2.13. Topología

#### $\mathbb{Z}_k$ Stratifolds

Arley Fernando Torres Galindo  
Universidad Externado de Colombia  
arley.torres@uexternado.edu.co  
Jairo Andrés Angel Cardenas  
Universidad de Los Andes

Generalizing the ideas of  $\mathbb{Z}_k$ -manifolds from Sullivan and stratifolds from Kreck, we define  $\mathbb{Z}_k$ -stratifolds. We show that the bordism theory of  $\mathbb{Z}_k$ -stratifolds is sufficient to represent all homology classes of a  $CW$ -complex with coefficients in  $\mathbb{Z}_k$ . We present a geometric interpretation of the Bockstein long exact sequences and the Atiyah–Hirzebruch spectral sequence for  $\mathbb{Z}_k$ -bordism ( $k$  an odd number). Finally, for  $p$  an odd prime, we give geometric representatives of all classes in  $H_*(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$  using  $\mathbb{Z}_p$ -stratifolds.

#### Pushforward structure to relate geometric cycles

Cristian David Sarmiento Santiago  
Universidad Nacional de Colombia  
cdsarmientos@unal.edu.co

In this talk, we will present a relation of geometric cycles over  $\Gamma$ -proper spaces and share advances in order to show how this relation allows us to define a model of geometric equivariant K-homology, this using a pushforward structure over a cohomology theory. This is a joint work with M. Velasquez and P. Carrillo.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### **Peano Continua and Topological Fractals**

Eliana Oostra Guerrero

Universidad Sergio Arboleda

eoostraguerrero@gmail.com

The goal of this conference is to understand the relationship between Peano continua and topological fractals. Masayoshi Hata proved that for every topological fractal  $(X, F)$  if  $X$  is connected, then it is locally connected, so it is a Peano continuum. But, there is an open question: Is every Peano continuum a topological fractal? Magdalena Nowak tried to answer this question by taking a Peano continuum that has a subset with a specific fractal structure called self-regenerating fractal. When we extend this subset to the whole Peano continuum, it makes an underlying set for a topological fractal, so it partially solves Hata's problem.

### **Optimización de recursos policiales en zonas comerciales de Bogotá: análisis geoespacial y estratégico de vulnerabilidades**

German Combariza

Universidad Externado de Colombia

german.combariza@uexternado.edu.co

Uno de los principales retos de la sociedad es encontrar mecanismos efectivos que garanticen la seguridad de los ciudadanos y permitan un pleno desarrollo económico y social. Este estudio identifica las zonas comerciales de Bogotá, Colombia, que son puntos críticos en términos de seguridad, y propone una asignación estratégica de recursos policiales que permita optimizar su cobertura y tiempos de respuesta. Se ejecutó el proceso metodológico de acuerdo con los lineamientos del Cross-Industry Standard Process for Data Mining. Se emplearon técnicas de análisis geoespacial, incluyendo el algoritmo Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise para la identificación de zonas comerciales y la teoría de grafos para modelar la redde seguridad. Además, se utilizaron datos de la Unidad Administrativa Especialde Catastro Distrital y la ubicación de estaciones y de los CAI de la Policía Nacional. Los resultados muestran la identificación de 241 zonas comerciales en Bogotá y proponen una asignación estratégica de recursos policiales basada en la centralidad de grado y un algoritmo de emparejamiento estable. La integración de las técnicas relacionadas permitió generar un enfoque innovador que combina la identificación precisa de zonas comerciales críticas con una optimización basada en datos de los recursos policiales.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

De esta forma, no solo se incrementa la comprensión de la dinámica de seguridad en áreas comerciales urbanas, sino también se proporciona una herramienta robusta para la toma de decisiones en seguridad pública para la ciudad.

### Advances in topological stability and expansiveness

Henry Mauricio Sánchez Sanabria

Universidad Central

hsanchezs1@central.edu.co

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

In recent years, various authors have introduced new notions of stability in Dynamical Systems that generalize the classical definition given by Walters [?]. Notions such as GH-stability [?], locally topological stability [?], and the stability of limit expansive systems [?] explore the dynamics on compact metric spaces and determine sufficient conditions to ensure stability in each corresponding sense. An important property in these works is the expansiveness of the dynamics. In this talk, we present these notions and exhibit new stability results that combine some of the most recent definitions of expansiveness.

### Sobre representaciones de espacios $CTS$

Jeison Leonardo Amorocho Morales

Universidad Industrial de Santander

jeisonamorocho@gmail.com

Decimos que un espacio topológico  $X$  es  $CTS$  si es compacto,  $T_1$  y segundo numerable. Recientemente, se han estudiado métodos para representar espacios  $CTS$  a través de estructuras de carácter combinatorio (véase [1], [2], [3]).

En la primera de ellas, M. Morayne y C. Ryll-Nardzewski [1] introdujeron un espacio  $CTS$ , denotado por  $\mathcal{G}^{\max}()$ , asociado a cada familia hereditaria de subconjuntos finitos de  $X$ , y mostraron que todo espacio  $CTS$  es homeomorfo a uno de esos espacios  $\mathcal{G}^{\max}()$ . Ese resultado les permitió demostrar que todo  $CTS$  admite una extensión polaca que preserva borelianos, es decir, que cada espacio  $CTS$  tiene estructura estándar de Borel.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

La segunda, presentada por A. Bartoš, T. Bice y A. Vignatti [2], trabaja con conjuntos parcialmente ordenados, y demuestran que todo *CTS* es homeomorfo al espectro de un poset. Más aún, desarrollan un método para construir espacios topológicos a partir de posets contables que puede ser aplicado a todos los *CTS*.

Una pregunta natural que estamos analizando es qué relación existe entre esas dos representaciones. El objetivo de esta charla es presentar algunos resultados preliminares en esa dirección.

### Referencias

- [1] M. Morayne y C. Ryll-Nardzewski, *Refinements of  $T_1$ , compact and second countable topologies*, *Topology and its Applications*, 56 (1994), pp. 159–164. [https://doi.org/10.1016/0166-8641\(94\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0166-8641(94)90016-7)
- [2] A. Bartoš, T. Bice y A. Vignatti, *Constructing compacta from posets*, *Publ. Mat.*, 69(1) (2025), pp. 217–265. <https://doi.org/10.5565/PUBLMAT6912510>
- [3] C. Mummert y F. Stephan, *Topological aspects of poset spaces*, *Michigan Mathematical Journal*, 59(1) (2010), pp. 3–24. <https://doi.org/10.1307/mmj/1272376025>

### Clasificación de sistemas dinámicos numerables con órbita densa

Jhon Freddy Perez Remolina

Universidad Industrial de Santander

[jhon2248062@correo.uis.edu.co](mailto:jhon2248062@correo.uis.edu.co)

Dado un sistema dinámico numerable con órbita densa de la forma  $(\omega^k + 1, f)$ , es posible asociar una función biyectiva (enumeración)  $e_f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  que contenga la información de la dinámica de  $(\omega^k + 1, f)$ , el conjunto de tales funciones es denotado por  $\mathcal{E}_k$ . En la primera parte de la charla, mostraré cómo construir la enumeración asociada a estos sistemas dinámicos y algunos resultados parciales acerca del conjunto  $\mathcal{E}_2$  visto como subespacio de las funciones biyectivas de  $\mathbb{N}^2$  en  $\mathbb{N}$  con la topología producto. En la segunda parte, introduciré la conjugación topológica; esta noción permite distinguir sistemas dinámicos. Además,



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

presentaré algunos resultados parciales acerca de la relación de equivalencia generada por esta en el contexto de sistemas dinámicos numerables; y cómo diferenciar sistemas dinámicos con órbita densa sobre  $\omega^2 + 1$ . Finalmente, plantearé algunas preguntas abiertas acerca del conjunto  $\mathcal{E}_k$  y de la relación de equivalencia generada por la conjugación topológica.

### Análisis de datos por medio de topologías generalizadas

Julian Castañeda

Universidad Francisco José de Caldas

juliancastaneda07@gmail.com

Isabella Martinez Martinez

Universidad de los Andes

El avance tecnológico en el campo de los computadores ha simplificado el análisis de información mediante diversas metodologías, como los procesos estadísticos, lo que ha permitido optimizar la recolección de datos para su estudio. Sin embargo, el volumen y la complejidad de la información han superado las capacidades de procesamiento de los computadores tradicionales. A pesar de este desafío, los progresos tanto en las tecnologías como en las ciencias fundamentales han propiciado el desarrollo de nuevas técnicas para abordar el análisis de grandes conjuntos de datos. Una de las metodologías más destacadas en este contexto es el análisis topológico. En este trabajo, se propone una técnica innovadora para la extracción de información de una nube de puntos, utilizando los espacios topológicos generalizados, concepto introducido por Csaszar a finales del siglo XX. Estos espacios amplían el concepto clásico de espacio topológico, permitiendo un enfoque más flexible y adecuado para caracterizar las propiedades topológicas de subconjuntos de interés. Partimos de un conjunto de puntos  $X$ , al que se le aplican técnicas de clusterización para particionarlo según sus similitudes. Esta partición tiene como objetivo agrupar los puntos que presentan características comunes. Posteriormente, se presentan dos metodologías para asociar una topología generalizada sobre  $X$ , que permite estudiar los operadores de interior, clausura y frontera de un subconjunto  $A$  de  $X$ . Estos operadores son clave para extraer la información más relevante del subconjunto analizado. Además, se discuten tanto los beneficios como las limitaciones que presentan las diferentes topologías generalizadas utilizadas en el estudio.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Compacidad en espacios topológicos fuzzy

Lina Marcela Martínez Vallejo

Universidad del Valle

[lina.vallejo@correounivalle.edu.co](mailto:lina.vallejo@correounivalle.edu.co)

Luz Victoria De La Pava Castro

Universidad del Valle

En 1968, Chang introduce el concepto de topología fuzzy, como una extensión de la topología clásica. Desde entonces, han surgido varios trabajos e investigaciones sobre nociones y resultados de topología fuzzy. Aunque la mayoría de estos resultados se obtienen con base en la topología clásica, encontrar una buena extensión del concepto de compacidad no ha sido una tarea sencilla. Entre 1968 y 1978, Chang, Lowen y Gantner dieron distintas definiciones de lo que es un espacio topológico fuzzy compacto. En 1978, Lowen hace una comparación entre las definiciones de compacidad establecidas hasta el momento y muestra cuáles de ellas son buenas extensiones. Los espacios MV-topológicos fueron introducidos por Ciro Russo en 2016, como un tipo particular de espacio topológico fuzzy. En esta charla mostraremos que el concepto de compacidad para espacios MV-topológicos resulta ser una buena extensión en el sentido de Lowen.

### Introducing Binary Set Functions: Applications and Topological Insights

Margot Salas-Brown

Universidad de Los Andes

[m.salasderamos@uniandes.edu.co](mailto:m.salasderamos@uniandes.edu.co)

In this talk, we focus on introducing, studying, and characterizing functions defined on binary sets in binary topological spaces. As part of our applications, we demonstrate that a binary soft set can be viewed as a particular case of the functions defined here. Furthermore, we propose a method to enhance decision-making. Additionally, we present an algorithm for determining binary topologies.

### Topological feature characterization of comatose patients

Maria Camila Espinal Ramirez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Nacional de Colombia

mcespinalr@unal.edu.co

Francisco Gomez Jaramillo

Universidad Nacional de Colombia

Post-cardiac arrest coma, a consequence of post-cardiac arrest anoxic brain injury (PCA-BI), significantly impacts patient survival, with neurological prognosis guiding withdrawal of life-sustaining therapy (WLST). Continuous electroencephalography (EEG) enables real-time monitoring of brain activity, detecting connectivity patterns associated with recovery or deterioration. In this study, we applied the Mapper algorithm with Isomap filtering ( $k = 8, p = 30\%$ ) to analyze EEG-derived functional connectivity networks, revealing that patients with poor outcomes exhibited significantly higher network density and efficiency. These findings suggest that maladaptive network reorganization may be linked to worse prognoses, highlighting the potential of topological data analysis (TDA) as a complementary approach for brain network characterization in coma assessment.

### **Superficies, 3-variedades y sus simetrías (al estilo Thurston)**

Mike Hiarol López Martínez

Universidad distrital Francisco José de Caldas

mhlopezm@udistrital.edu.co

La topología de bajas dimensiones tomó gran relevancia desde 1970. Uno de sus principales contribuidores fue Bill Thurston, quien innovó con su forma intuitiva de entender las 2 y 3-variedades (manifolds). Esta presentación explica varias intuiciones que nos dio Thurston para desentrañar los misterios de las variedades de manera simple, apoyándose en contenido multimedia para que el aprendizaje sea más fuerte e intuitivo.

### **Construcción y análisis de nudos a través de las superficies de Seifert**

Nicol Daniela Bermudez Bohorquez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

ndbermudezb@udistrital.edu.co

Luisa Fernanda Rozo Posada

Universidad Nacional de Colombia



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

En este trabajo iniciamos con una introducción a la teoría de nudos, la definición de un nudo como incrustación de la circunferencia  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  y su equivalencia a través de isotopías. De igual forma, se estudian las propiedades de las superficies orientables, compactas y con frontera conexa, y su clasificación de acuerdo con el género y la característica de Euler. El objetivo principal de este trabajo es presentar la construcción de la Superficie de Seifert asociada a un diagrama de un nudo dado, utilizando el algoritmo de Seifert. Este procedimiento constructivo "deshace" los cruces del nudo para construir discos, algunos de los cuales están encajados, y bandas en las que cada una tiene una orientación correspondiente a los cruces y la orientación del nudo original. El resultado de este proceso es una superficie orientable, compacta y cuya frontera conexa coincide con el diagrama del nudo dado. Una vez obtenida la superficie de Seifert, se construye una matriz asociada a esta, que almacena información sobre la relación entre las bandas y los discos, y por lo tanto, sobre los cruces del diagrama del nudo. Esta matriz se construye a partir de los push-off de lazos que pasan por los discos y bandas de la superficie, asignando a las entradas de la matriz el número de enlace entre los lazos y los push-off. A lo largo del trabajo, se presentan construcciones propias de las superficies, siguiendo los pasos del algoritmo, y mostrando los push-off de los lazos para proporcionar representaciones visuales que no se encuentran usualmente en la literatura. Finalmente, estas matrices permiten calcular el polinomio de Alexander y la signatura, invariantes bajo isotopías que establecen cuotas inferiores para el 3-género de un nudo, usualmente difícil de calcular.

### **El Campo de las $C^*$ -álgebras generadas por las funciones semicontinuas superiormente**

Rafael Armando García Gómez

Politécnico Grancolombiano

rgarcia@poligran.edu.co

Januario Varela Borda

Se presenta una construcción analítica del Campo de las  $C^*$ -álgebras generadas por las funciones semicontinuas superiormente sobre un espacio topológico  $T$ . En la categoría de los campos de  $C^*$ -álgebras sobre un espacio topológico  $T$ , el objeto construido es (en cierto sentido) la contraparte del objeto números reales.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### El teorema de Jordan en $\mathbb{K}^2$ y en el plano digital

Yazmin Rubiela Cote Contreras

Universidad Industrial de Santander

yasminrubiela2805@gmail.com

Carlos Enrique Uzcategui Aylwin

Universidad Industrial de Santander

En esta charla exploraremos las conexiones entre los enfoques basados en teoría de grafos y los enfoques topológicos en el estudio del teorema de la curva de Jordan para una cuadrícula de puntos. Partiendo del trabajo fundamental de Rosenfeld, quien desarrolló conceptos de adyacencia en  $\mathbb{Z}^2$ , y de la posterior introducción del plano digital topológico  $\mathbb{K}^2$  con la topología de Khalimsky por Khalimsky, Kopperman y Meyer, investigamos la interacción entre estas perspectivas. Inspirados en el trabajo de Khalimsky, Kopperman y Meyer, definimos un operador  $\Gamma^*$  que transforma subconjuntos de  $\mathbb{Z}^2$  en subconjuntos de  $\mathbb{K}^2$ . Este operador es fundamental para demostrar cómo los caminos 8-conectados, la conectividad 4 y otras estructuras discretas en  $\mathbb{Z}^2$  corresponden a propiedades topológicas en  $\mathbb{K}^2$ . Además, abordamos la cuestión de si el teorema topológico de la curva de Jordan en  $\mathbb{K}^2$  puede derivarse de su versión en teoría de grafos sobre  $\mathbb{Z}^2$ . Nuestros resultados ilustran la profunda y compleja relación entre estas dos metodologías, arrojando luz sobre sus roles complementarios en la topología digital.

### Complejidad topológica de las relaciones de Green en algunos semigrupos

Yesli Natali Delgado Morales

Universidad Industrial de Santander

yeslinataz@gmail.com

Un semigrupo es un conjunto  $S$  con una operación binaria asociativa. Un semigrupo inverso  $S$  es un semigrupo tal que para todo  $x \in S$  existe  $y \in S$  donde  $xyx = x$  y  $xyx = y$ . Todo semigrupo es isomorfo a un subsemigrupo de  $X^X$  (el semigrupo de todas las funciones de  $X$  en  $X$ ). Una de las herramientas fundamentales para comprender un semigrupo son sus relaciones de Green, las cuales dan información sobre la estructura del semigrupo y cómo interactúan sus elementos dependiendo de los ideales principales que estos generan. En un semigrupo hay cinco relaciones de Green:  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{J}$ . Uno de los objetivos de esta charla es mostrar la complejidad topológica de las relaciones de Green para un semigrupo polaco



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

(como subconjuntos de  $S \times S$ ). Para explicar que se entiende por complejidad topológica necesitamos recordar algunos conceptos de la teoría descriptiva de conjuntos. Esta teoría estudia varias clases de conjuntos de un espacio Polaco  $X$ , tales como la clase de los borelianos  $\mathcal{B}(X)$ , que es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a los abiertos de  $X$ ; los analíticos, que son las proyecciones de los borelianos de  $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  y, la clase de los coanalíticos, que son los complementos de los analíticos. Estas tres clases permiten hacer una clasificación de los subconjuntos de un espacio métrico  $X$  que refleja la complejidad topológica. Para determinar la complejidad topológica de las relaciones de Green, primero tuvimos que caracterizarlas. La idea es mostrar los resultados obtenidos.

### Teorema de Seifert-Van Kampen en la teoría de nudos

Yoseth Stiven Arciniegas Barreto

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

ysarciniegasb@udistrital.edu.co

En este trabajo se estudia la relación entre el grupo fundamental y su relevancia en la teoría de nudos, con especial énfasis en el caso de los nudos toroidales. Más específicamente, se utiliza el teorema de Seifert-Van Kampen para analizar los nudos toroidales  $(p, q)$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros coprimos y representan respectivamente el número de vueltas alrededor del eje del toro y el número de vueltas alrededor del toro. Se demuestra que el grupo fundamental del complemento de un nudo toroidal  $(p, q)$  en la esfera tridimensional  $S^3$  admite una presentación con un generador y una relación, dada por:  $\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x, y | x^p = y^q \rangle$  y se analiza cómo esta presentación refleja las propiedades geométricas del nudo. Este resultado no solo proporciona una descripción algebraica del grupo fundamental, sino que también resalta la conexión entre la estructura topológica del nudo y su representación algebraica. Adicionalmente, se aborda la presentación de Wirtinger como una herramienta práctica para calcular el grupo fundamental de nudos más complejos. Esta técnica permite obtener una descripción explícita del grupo fundamental a partir de un diagrama plano del nudo, asignando generadores a cada arco del diagrama y relaciones en cada cruce. Se muestra que esta metodología es una aplicación directa del teorema de Seifert-Van Kampen, al descomponer el complemento del nudo en regiones más simples y analizar las interacciones entre ellas.



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### 3. PÓSTERES

#### 3.1. Álgebra

##### **Patrones Golomb y la plataforma GRASP**

Claudia Alejandra Florez Solarte  
Universidad de Nariño  
alejaflorez@udenar.edu.co  
John Hermes Castillo  
Universidad de Nariño

Un patrón Golomb es un conjunto de puntos con coordenadas enteras cuyas distancias son únicas en una red dada. En este poster se estudia el concepto de patrón Golomb y su uso en la plataforma “Game and Repository for Aperture Solutions and Patterns” (GRASP).

##### **Análisis sobre el máximo cardinal de conjuntos Sidon en grupos cíclicos finitos**

Eliana Patricia Rodríguez Martínez  
Universidad del Norte  
erodriguezp@uninorte.edu.co

Este trabajo estudia los conjuntos Sidon modulares y su comportamiento en módulos no cubiertos por las construcciones clásicas de Bose, Singer y Ruzsa. Se analizan sus deficiencias, identificando patrones que permiten formular nuevas conjeturas. En particular, en este proyecto se demuestra la conjetura de Funk, estableciendo que las reglas Golomb tipo Bose son excepcionales para  $q \geq 7$ , más aun, se extiende dicha excepcionalidad para las reglas Golomb tipo Ruzsa para  $p \geq 11$ . Además, se exploran ciertas aplicaciones en un contexto bidimensional.

##### **El simple enigma de difícil respuesta: La conjetura de Collatz**

Jhon Fredy Castillo Perafan  
Universidad del Valle



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

`jhon.perafan@correounivalle.edu.co`

La Conjetura de Collatz (o el problema de Ulam, de Siracusa, o simplemente el problema  $3x+1$ ) establece que, para todo entero positivo  $n$ , el proceso de dividir por dos si  $n$  es par, o multiplicar por tres y sumar uno si  $n$  es impar, al aplicarlo iteradamente, eventualmente conducirá al uno.

Que resolver la conjetura sea de provecho o no para las matemáticas es una cuestión que, como la conjetura misma, no tiene respuesta. Lo que no admite duda es el empeño, esfuerzo y creatividad que los matemáticos han puesto a la hora de atacar el problema. Pero el deseo no implica el éxito, y por ello abundan caracterizaciones y equivalencias de la conjetura, e incluso hay resultados probabilistas alentadores, pero ninguno con los suficientes méritos para alzarse como la más oportuna. Y como todo lo que muestra gran resistencia es atacado por todos los frentes, la conjetura de Collatz ha sido asediada con matemática de punta desde muchas áreas diferentes: con probabilidad, topología, teoría de números, teoría de sistemas dinámicos, análisis  $p$ -ádico, análisis complejo y métodos computacionales. Muchos han sido los matemáticos que han trabajado arduamente tratando de ganar los cincuenta dólares que Paul Erdős ofreció a quien lograra descifrar el enigma.

Así, con la intención de mostrar la versatilidad, elegancia y adaptabilidad de la matemática, este póster dará a conocer los avances hechos en esta conjetura, es decir, el estado del arte. Servirá de ejemplo para mostrar que los problemas matemáticos nunca tienen un único camino para recorrer y que las preguntas más simples también conducen hacia experiencias enriquecedoras. Pues, aunque todos estos enfoques aún no han dado fruto, es innegable que estar cara a cara frente a un desafío como este amplía el horizonte de quien lo enfrenta.

### **Cuaterniones de Hamilton: Álgebra no conmutativa y aplicación en rotaciones**

Juan David Gaitán Zamudio

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

`jdgaitanz@udistrital.edu.co`

Johan Andrés Almanza Castillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Este póster aborda los cuaterniones de Hamilton mediante su origen histórico, su estructura como anillo de división no conmutativo (destacando propiedades clave), y sus aplicaciones en representación de rotaciones, con ventajas computacionales frente a matrices. Un recorrido que vincula su significado matemático con su impacto práctico. Nos complace participar en el congreso colombiano de matemáticas este año y no queríamos quedarnos sólo como asistentes. Este año estoy realizando mi tesis en álgebra (Juan David) y aún estoy explorando varios temas, asimismo esperamos fortalecer nuestras capacidades para la divulgación y el trabajo matemático investigativo. Los links de los artículos en que se basa el póster salen en las referencias del documento pdf como hipervínculos.

### **Sobre una representación de anillos de grupo**

Juan Pablo Ordoñez Agudelo

Universidad de Nariño

agudelojuanp@udenar.co

Erlinton Fabian Bolaños Ordoñez

Universidad de Nariño

Sea  $RG$  un anillo de grupo, de un grupo  $G$  con coeficientes en un anillo  $R$ . En este trabajo se estudia el isomorfismo entre  $RG$  y matrices con coeficientes en  $R$ , estudiado por Ted Hurley en el artículo “Group rings and rings of matrices”. En este poster, se estudia este isomorfismo para algunos casos especiales de grupos como son: grupos cíclicos, 2-grupos, grupo dihedral, entre otros. Si el anillo  $R$  tiene identidad y no tiene divisores de cero, esta representación permite describir las unidades y los divisores de cero del anillo de grupo en términos de las propiedades de estas matrices y, cuando sea apropiado, en términos del determinante de las matrices respectivas. Trabajo conjunto con John H. Castillo (UDENAR).

### **Análogo $p$ -ádico del teorema de Lagrange para fracciones continuas**

Juan Sebastian Romero Burgos

Fundacion Universitaria Konrad Lorenz

juans.romerob@konradlorenz.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Se analiza cómo extender el concepto de fracciones continuas, común en los números reales, al mundo de los números  $p$ -ádicos, buscando un equivalente al teorema de Lagrange. En los reales, este teorema dice que un número tiene una fracción continua periódica si y solo si es un irracional cuadrático. Sin embargo, en los números  $p$ -ádicos, la cosa se complica debido a su estructura no arquimediana, que dificulta definir una "parte entera" y, por ende, la periodicidad de las fracciones continuas.

Se revisan dos algoritmos, el de Ruban y el de Browkin, que permiten construir fracciones continuas en este contexto. Aunque ambos métodos son similares al usado en los reales, ajustan la forma de calcular los coeficientes para adaptarse a los números  $p$ -ádicos. Por ejemplo, al aplicar el algoritmo de Browkin a un número específico, se obtiene una fracción continua finita, lo que muestra que, aunque es posible construir estas fracciones, su comportamiento difiere del caso real.

En conclusión, aunque los algoritmos permiten extender las fracciones continuas a los números  $p$ -ádicos, la falta de periodicidad clara y las diferencias estructurales entre ambos sistemas abren nuevas preguntas y oportunidades para investigar propiedades algebraicas y aplicaciones en teoría de números. El artículo destaca estos desafíos y sugiere futuras líneas de investigación en este campo.

### 3.2. Análisis real

#### Sobre la función máxima de Hardy-Littlewood en espacios de Sobolev

Andrés David Cadena Simons

Universidad Nacional de Colombia

acadenas@unal.edu.co

El propósito de este póster es presentar uno de los resultados estudiados durante el *Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales* del departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, referentes al estudio de la *función máxima de Hardy-Littlewood*.

En este mismo se presentarán resultados clave sobre la función máxima de Hardy-Littlewood. Comenzaremos con su definición y demostraremos que dicho operador es acotado en  $L^\infty$  y



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

débil-(1, 1). A partir de estos resultados, concluiremos la continuidad del operador en espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 < p \leq \infty$ . Finalmente, haremos una breve introducción a los espacios de Sobolev clásicos en  $\mathbb{R}^n$  y analizaremos el comportamiento del operador maximal en estos espacios.

### Una mirada al análisis real sobre cuerpos ordenados

Silvia Maria Caraballo Barrios

Universidad de Cartagena

amarinr@unicartagena.edu.co

Ana Magnolia Marin Ramirez

Universidad de Cartagena

Este trabajo explora la posibilidad de extender el análisis real a cuerpos ordenados, investigando las propiedades fundamentales que permiten recuperar teoremas clásicos en estos sistemas algebraicos. Se analizan diferentes nociones de completitud, incluyendo la completitud en el sentido de Dedekind y la completitud de Cauchy, así como el principio de Arquímedes y su impacto en la estructura de los cuerpos ordenados. También se estudia la validez de resultados como el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle en este contexto. Finalmente, se concluye que para replicar el análisis real en cuerpos ordenados, se requieren axiomas adicionales que garanticen propiedades clave, como la arquimedianidad y la conectividad de los intervalos.

### 3.3. Combinatoria

#### Characteristic Polynomial of the Partition Lattice with Limited Block Sizes

Adrian Camilo Cepeda Cepeda

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

adrian.cepeda01@uptc.edu.co

Daniel Clemente Centeno Murcia

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

El polinomio característico de un retículo es una función fundamental en combinatoria que proporciona información estructural y algebraica sobre dicho retículo. Se define a partir de la función de Möbius y tiene aplicaciones en conteo y análisis combinatorio.

En este trabajo, consideramos el retículo de particiones con bloques de tamaño restringido, denotado como  $P_{\leq 2}$ , donde cada bloque contiene a lo más dos elementos. Este retículo representa una variante del clásico retículo de particiones, con restricciones que modifican sus propiedades estructurales.

El resultado principal de nuestra investigación es la obtención de una expresión cerrada para el polinomio característico de  $P_{\leq 2}$ . Este estudio se sitúa dentro del campo de la combinatoria y, además, presenta conexiones con otras áreas de las matemáticas, en particular con la teoría de grafos.

### **Introducción a las estructuras aritméticas de grafos**

Christian Daniel Castaño Romero

Universidad Sergio Arboleda

[christian.castano01@usa.edu.co](mailto:christian.castano01@usa.edu.co)

Diego Villamizar Rubiano

Xavier University of Louisiana

En este trabajo se presentará una introducción a las estructuras aritméticas sobre grafos y su conexión con temas de diferentes áreas de las matemáticas como la combinatoria, la teoría de números y el álgebra.

### **Factorización de Temperley-Lieb y su relación con invariantes en teoría de nudos**

Juan Sebastián Caballero Bernal

Universidad Sergio Arboleda

[juan.caballero03@usa.edu.co](mailto:juan.caballero03@usa.edu.co)

Diego Villamizar

Xavier University of Louisiana

En este poster, se estudia la estructura monoidal de los diagramas de Temperley-Lieb y



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

su factorización desde dos enfoques complementarios. Desde una perspectiva algebraica, se analizan sus relaciones con las álgebras de Hecke del grupo  $S_n$  y su papel en la teoría de representaciones del grupo de trenzas  $B_n$ . Por otro lado, desde una perspectiva combinatoria, se examinan las propiedades estructurales de los diagramas.

### **Poliminós de Fibonacci: Combinatoria y Funciones Generatrices.**

Samuel Ramírez Ramos  
Universidad Nacional de Colombia  
samramirezra@unal.edu.co  
Jose Luis Ramírez  
Universidad Nacional de Colombia

En esta charla introducimos los poliminós de Fibonacci, definidos como poliminós convexos por columnas sobre escaleras. Primero, mostramos una biyección entre estos objetos de área  $k \in \mathbb{Z}^+$  y las composiciones del entero  $k - 1$  usando solo los sumandos 1 y 2.

Luego, obtenemos una función generatriz multivariada que cuenta estos poliminós según su área y su semiperímetro (anisotrópico). Finalmente, discutimos la riqueza combinatoria de estos poliminós y exploramos posibles direcciones futuras de investigación.

## **3.4. Ecuaciones diferenciales**

### **Modelado matemático del impacto de parasitoides en la población de abejas melíferas**

Carlos Andrés Trujillo Salazar  
Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt  
ctrujillo@cue.edu.co  
Oscar Emilio Molina Díaz  
Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt

Las abejas melíferas (*Apis mellifera*) desempeñan un papel fundamental en la polinización de cultivos y en la producción de miel, lo que las convierte en un componente esencial



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

para la biodiversidad y la seguridad alimentaria a nivel global [?]. Sin embargo, en los últimos años, las poblaciones de abejas melíferas han disminuido drásticamente, lo que ha generado preocupación tanto en la apicultura como en la agricultura. Este fenómeno se atribuye a múltiples factores, entre los que destacan la pérdida de hábitat, el uso de pesticidas y la presencia de varios parasitoides que afectan gravemente a las colonias de abejas [?].

Uno de los principales parasitoides responsables de este declive es el ácaro *Varroa destructor*, que parasita a las abejas alimentándose de su hemolinfa y transmitiendo virus que reducen la longevidad y la capacidad reproductiva de las colonias [?]. No obstante, *Varroa destructor* no es el único organismo que amenaza a las abejas melíferas. Otros parasitoides, como el microsporidio *Nosema spp.*, también juegan un papel importante en la disminución de las poblaciones de abejas. Las infecciones por *Nosema* pueden alterar la dinámica poblacional de las abejas, afectando la capacidad de forrajeo y reduciendo la longevidad de las obreras, lo que a su vez compromete la supervivencia de la colonia [?].

El impacto de estos diferentes parasitoides varía no solo en su modo de transmisión, sino también en sus efectos a largo plazo sobre las colonias de abejas [?]. La interacción entre las abejas y estos parasitoides se caracteriza por comportamientos dinámicos complejos, los cuales pueden ser analizados mediante modelos matemáticos. Al respecto, [?] afirma que estos modelos son fundamentales en la ecología de poblaciones, ya que permiten desarrollar bases teóricas sobre los factores que afectan el tamaño de las poblaciones y funcionan como valiosas alternativas a los experimentos científicos.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales suaves por tramos (Piecewise-smooth Dynamical Systems) son una herramienta potente para modelar dinámicas poblacionales con comportamientos abruptos o discontinuos [?]. En el caso particular de las abejas melíferas, estos sistemas permiten capturar tanto las fluctuaciones en la población de abejas como las variaciones en la incidencia de los diferentes parasitoides.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone y analiza un modelo matemático basado en un sistema de ecuaciones diferenciales suave a tramos que describe la influencia del ácaro *Varroa destructor* en la población de abejas melíferas y su impacto en la producción de miel. Como resultados preliminares, se determinan condiciones de cruce y de deslizamiento sobre



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

la región de conmutación, así como condiciones de estabilidad para los pseudoequilibrios. Los resultados son ilustrados a través de simulaciones numéricas, utilizando parámetros obtenidos de fuentes secundarias. Posteriormente, dichos resultados son interpretados desde una perspectiva ecológica."

### **Caminos Rugosos y Soluciones a Ecuaciones Diferenciales**

David Alejandro Alquichire Rincón

Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[dalquichire@unal.edu.co](mailto:dalquichire@unal.edu.co)

Freddy Rolando Hernández Romero

Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas, durante los últimos años, han sido clave para modelar diferentes fenómenos naturales. En los últimos años, se han propuesto diferentes enfoques para su solución; el primer enfoque propuesto por Itô, basándose en la integral estocástica y demás aspectos muy probabilísticos; el otro enfoque más analítico, es el de caminos rugosos, propuesto por Terry Lyons. En el trabajo se estudian ambos métodos, y se hace comparación con distintas ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales estocásticas.

### **Patrones de Turing sobre curvas periódicas**

Dayana Carolina Colimba Tarapuez

Universidad del Quindío

[dayanac.colimbat@uqvirtual.edu.co](mailto:dayanac.colimbat@uqvirtual.edu.co)

Elkinn Adrián Calderón Barreto

Universidad del Quindío

La morfogénesis es un proceso biológico que permite el desarrollo de patrones y formas espaciales en los organismos, desde la embriología hasta la formación de estructuras o formas de cuerpo al igual que la formación de las manchas en la piel de algunos animales. La morfogénesis permite comprender la formación de los patrones en la naturaleza. Sin embargo, aún son desconocidos los procesos que subyacen en este desarrollo, especialmente en entornos



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

con geometrías periódicas y rápidamente oscilantes. Uno de los enfoques más utilizados para analizar la formación de estos patrones es la teoría de inestabilidad de Turing que fue propuesta en 1952 y dice que bajo ciertas condiciones, los productos químicos pueden reaccionar y difundirse de tal manera que produzcan patrones espaciales heterogéneos en estado estacionario de concentraciones químicas o morfológica. Este mecanismo ha sido clave para explicar fenómenos como la pigmentación de la piel de algunos animales y las condiciones de estructuras en los organismos. Además de la difusión química, se ha mostrado que la geometría del medio influye en la formación de estos patrones. Algunos estudios han analizado el efecto de la curvatura en la generación de patrones, particularmente en superficies bidimensionales y en esferas fijas. Sin embargo, aún no se han analizado en profundidad las condiciones de inestabilidad de Turing cuando la difusión ocurre sobre curvas periódicas en el espacio. El objetivo general de esta investigación es calcular las condiciones de inestabilidad de Turing en sistemas de reacción-difusión en curvas periódicas. Para ello, se desarrolla varios pasos que están distribuidos de la siguiente manera: primero, se derivara las condiciones de inestabilidad de Turing en sistemas definidos sobre intervalos cerrados; luego, se plantea un modelo de reacción difusión sobre curvas periódicas, donde unas de las difusiones tengan dependencia de parámetros de prioridad; seguidamente, se aplica el proceso de homogeneización para representar el sistema de reacción difusión periódico en un sistema homogéneo; posteriormente, se obtiene las condiciones de inestabilidad de Turing del sistema homogeneizado y finalmente se valida los resultados con pruebas numéricas. Este estudio es relevante ya que amplía el conocimiento sobre la formación de patrones en la naturaleza además de eso es importante debido a sus diversas aplicaciones que existen en diferentes campos de la ciencia. A pesar de sus estudios que se han realizado existen muchas preguntas sobre estos procesos que dirigen a la generación de estos patrones en espacios con geometrías periódicas oscilante ya que la mayoría de estudios se han realizado en superficies planas o dominios simples, dejando aun muchas preguntas para la comprensión de los comportamientos de estos patrones en curvas periódicas, además, este estudio ampliara el conocimiento teórico de la formación de patrones en la naturaleza. Este proyecto se desarrolla en el grupo de investigación de GEDES que forma parte de la línea de investigación matemática y que tiene como objetivo el desarrollo de métodos computacionales para la simulación y validación de modelos matemáticos.

### **Buen Planteamiento de una familia de ecuaciones tipo Benjamin-Ono**

Iván Felipe Salamanca Medina



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Nacional de Colombia

isalamancam@unal.edu.co

El propósito de este póster es presentar resultados que se han obtenido por docentes del Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, asociados al buen planteamiento del problema de Cauchy asociado a una familia de ecuaciones diferenciales tipo Benjamin-Ono dadas por dos parámetros.

### **Modelado Matemático de la Interacción entre Tumores y el Sistema Inmuno-lógico con Consideración de Retardos Temporales**

Jeimy Leandra Moyano Ruiz

Universidad de los Llanos

jlmoyano@unillanos.edu.co

Carolina Ballesteros Velasquez

Universidad de los Llanos

El cáncer constituye una de las principales causas de mortalidad global, con proyecciones que alcanzan los 30.2 millones de casos para 2040. Este estudio desarrolla un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales con retardo temporal para analizar la interacción dinámica entre células tumorales, células efectoras inmunitarias e interleucina-2 (IL-2). Se evaluaron tres patrones de crecimiento tumoral: logístico clásico, logístico generalizado y exponencial. Mediante simulaciones numéricas, se analizó el comportamiento del sistema bajo diferentes valores de retardo temporal ( $\tau$ ). Los resultados muestran que, sin retardo temporal, el sistema tiende a puntos de equilibrio estables, mientras que la introducción de retardos genera oscilaciones características en las variables. Notablemente, estas oscilaciones ocurren independientemente del modelo de crecimiento tumoral seleccionado, con diagramas de fase que exhiben estabilidad alrededor del punto para todas las funciones estudiadas. Se concluye que, independientemente de cómo se modifique el término que describe la tasa de crecimiento logística del tumor, los diagramas de fase y puntos de estabilidad son los mismos para los diferentes valores de  $\tau$ . A diferencia de modelos previos, el sistema demuestra robustez ante diferentes funciones de crecimiento tumoral, sugiriendo que la dinámica de interacción tumor-efector-interleucina mantiene propiedades cualitativas consistentes que



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

podrían contribuir al desarrollo de estrategias terapéuticas más efectivas.

### **Bifurcación de ciclos límite en superficies de revolución en $\mathbb{R}^3$**

JUAN DAVID PANTOJA MORA

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[jdantojam@udistrital.edu.co](mailto:jdantojam@udistrital.edu.co)

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CÉSPEDES

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Este artículo aborda la perturbación de sistemas diferenciales autónomos suaves en  $\mathbb{R}^3$  con una superficie de revolución integral foliada por soluciones periódicas.

### **Replicación de modelado de atractividad del sistema MIO**

Julián Andrés Naranjo Jaramillo

Pontificia Javeriana, Cali

[elgafas1@javerianacali.edu.co](mailto:elgafas1@javerianacali.edu.co)

Francisco Javier Posada Arias

Pontificia Javeriana, Cali

Este trabajo busca replicar y actualizar el modelado del índice de atractividad del sistema MIO en Cali, tomando como referencia el estudio de Orozco y Arenas (2013), que empleó dinámica de sistemas para analizar el desarrollo del transporte urbano. La “atractividad” se considera clave para explicar el uso del MIO, ya que un sistema atractivo mejora la movilidad, impulsa el desarrollo económico y garantiza derechos como el acceso al transporte. Para construir el modelo, se retomó la metodología original, aunque con una aproximación inicial basada en relaciones lineales entre variables, debido a la falta de ecuaciones detalladas en estudios anteriores. Se utilizaron datos reales entre 2010 y 2022, permitiendo identificar tendencias recientes y actualizar el análisis."

### **RECUPERACIÓN DE UN SISTEMA DE REACCIÓN DIFUSIÓN A PARTIR DE UN CONJUNTO DE PATRONES**



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Julián Andrés Rincón Penagos  
Universidad del Quindío  
jarincon@uniquindio.edu.co  
Elkinn Adrian Calderon Barreto  
Universidad del Quindío

En este estudio, se aborda la recuperación de un sistema de reacción-difusión a partir de un conjunto de patrones. Los sistemas de reacción-difusión son herramientas relevantes para el análisis de fenómenos dinámicos en grafos, como la difusión de información en redes sociales o la propagación de virus. Estos sistemas modelan la difusión mediante el operador laplaciano discreto, que está ligado a las propiedades de la red subyacente. Los patrones de Turing, soluciones estables con variaciones de concentración entre nodos, pueden emerger en estos sistemas. Desde el punto de vista del análisis de datos, se plantea el problema de determinar las redes que pueden generar un patrón de Turing observado, dado un conjunto de datos que representan concentraciones en los nodos, pero sin conocer la estructura de las conexiones de la red. Para abordar este problema, se considera una colección de conjuntos de datos, donde cada conjunto representa las concentraciones para cada nodo. Se asume que cada conjunto forma un patrón de Turing, lo que implica la existencia de una relación de dispersión con parte real positiva en un intervalo específico. El sistema de reacción-difusión para dos concentraciones se define mediante un par de ecuaciones que involucran un operador relacionado con el laplaciano discreto. La admisibilidad de una red se determina por la presencia de al menos un valor propio de este operador dentro del intervalo relevante. Si ningún valor propio se encuentra en este intervalo, la red no es admisible y, por lo tanto, no puede generar patrones de Turing como soluciones.

### **Operador de difusión en una red multicapa**

Maria Camila Quitian Tovar  
Universidad del Quindío  
mariac.quitiant@uqvirtual.edu.co  
Elkinn Adrián Calderón Barreto  
Universidad del Quindío

Los patrones de Turing son formas o diseños que aparecen de manera espontánea en



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

systemas dinámicos debido a la inestabilidad de un estado estable homogéneo, estos patrones son el resultado de la interacción entre dos sustancias químicas o especies que se difunden y reaccionan entre si, como se explica en [?] y [?]. En este trabajo se investigan los sistemas de reacción - difusión (R-D) en redes multicapa, que representan fenómenos donde las concentraciones tienen diferente operador de difusión. Para analizar estos sistemas se utilizará el modelo de Schnakenberg, donde se hará un análisis de estabilidad para determinar las condiciones de inestabilidad de Turing.

### **Patrones de Turing en redes generadas con sistemas-L**

Santiago Buitrago Rodriguez

Universidad del Quindío

santiago.buitragor@uqvirtual.edu.co

Elkinn Adrian Calderon Barreto

Universidad del Quindío

En este trabajo se analizará el comportamiento del operador de difusión discreto en redes generadas a partir de sistemas Lindenmayer o sistemas-L. Examinando dos cuestiones a destacar: ¿cómo se modifican los patrones de Turing por efecto de la evolución de la red en el tiempo?, ¿cómo influye la aparición de nuevas conexiones en la estabilidad del sistema?. Para dar respuesta a estas preguntas se plantea como metodología la aplicación de un método de Galerkin generado por medio de los valores y vectores propios del operador laplaciano discreto. Finalmente, se utiliza el modelo de Schnakenberg para validar los resultados.

### **El Laplaciano y generalizaciones**

Sigifredo de Jesús Herrón Osorio

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

sherron@unal.edu.co

En esta ponencia se presentarán algunos elementos importantes del operador diferencial Laplaciano. Se enfatizará en los resultados más importantes en el contexto del análisis funcional y las ecuaciones diferenciales parciales elípticas que lo involucran. A continuación, se



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

presentarán algunas de las generalizaciones más importantes de este operador, las similitudes y diferencias con el Laplaciano y también los resultados conocidos en el contexto funcional y de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

### **Ciclos Límite Bifurcando de un Toro Isócrono en $\mathbb{R}^3$**

Valeria Montaña Moreno

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

vmontanom@udistrital.edu.co

Oscar Alexander Ramírez Céspedes

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

En este trabajo estudiamos los ciclos límite que bifurcan de la perturbación de sistemas diferenciales autónomos suaves en  $\mathbb{R}^3$  con un toro isócrono de revolución foliado por soluciones periódicas. Más exactamente, consideramos sistemas de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) f(x, y, z) - z \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + e P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) f(x, y, z) - z \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + e Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= z f(x, y, z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + e R(x, y, z),\end{aligned}$$

definidos en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ , donde  $f(x, y, z) = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - z^2$ ,  $e$  es un parámetro pequeño, y  $P, Q, R$  son polinomios. Como es habitual, el punto denota diferenciación con respecto a la variable  $t$ .

Para ello, empleamos la teoría de averaging de primer orden y la teoría de Chebyshev para estudiar el número de ciclos límite que emergen cuando el sistema inicial es perturbado dentro de la clase de sistemas polinomiales. En particular, mostramos que, a lo sumo, 6 ciclos límite pueden bifurcar desde dicho toro cuando la perturbación es cuadrática. Actualmente, estamos investigando la relación entre el orden de la perturbación polinomial y el número de ciclos límite que puede identificar el método."



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

### 3.5. Educación Matemática

#### Entendiendo la relación de contención

Juan Carlos Ávila Mahecha  
Universidad Sergio Arboleda  
juan.avila@usa.edu.co  
Daniel Arturo Silva Oviedo  
Universidad Sergio Arboleda

Dado un conjunto no vacío  $X$ , se obtiene su conjunto de partes,  $\mathcal{P}(X)$ , y sobre este se define la relación de contención entre elementos de  $\mathcal{P}(X)$ . Dado que esta relación utiliza en su definición el conectivo lógico de la “implicación” (representado por  $\rightarrow$ ) y que existen 15 conectivos lógicos binarios más, surgen preguntas como: ¿por qué la contención se define en términos de la implicación? ¿Qué ocurriría si se cambiara el conectivo lógico en la definición de la contención de conjuntos? ¿Qué propiedades cumplirían estas nuevas relaciones? ¿Cuáles de estas relaciones serían de equivalencia o de orden?

La propuesta presenta un enfoque para abordar estos problemas, exponiendo algunos de los resultados logrados hasta el momento en el marco del semillero *Grupo Yaglom* de la Universidad Sergio Arboleda. El objetivo es que las actividades y procedimientos desarrollados sirvan como insumos para la creación de nuevas actividades en el Programa de Talentos Matemáticos de la Universidad Sergio Arboleda, en Bogotá, Colombia.

#### Aprendizaje Móvil y Matemáticas: Una Secuencia Didáctica con Merge Cube

Adriana Martínez Grimaldos  
Institución Educativa Café Madrid  
amartinezgrimaldos@colegiosminutodedios.edu.co

Este estudio aborda las dificultades en operaciones básicas que presentan estudiantes de sexto grado en un colegio público de Bucaramanga, pertenecientes a estratos socioeconómicos bajos. Se propone una secuencia didáctica innovadora que integra el Merge Cube y la realidad aumentada (RA) en el aprendizaje móvil para mejorar el dominio de las tablas de multiplicar y la resolución de problemas de área y volumen. Inspirado en investigaciones previas que



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

demuestran el potencial de las tecnologías digitales en la educación matemática, este proyecto busca fomentar un aprendizaje más interactivo, personalizado y significativo. El Merge Cube, un cubo de RA, permite a los estudiantes manipular objetos virtuales en 3D, facilitando la visualización y comprensión de conceptos abstractos. Se espera que esta intervención mejore el rendimiento académico, aumente la motivación y promueva un interés duradero por las matemáticas, adaptándose a las necesidades y características del alumnado.

### **Analítica de datos y Convivencia escolar**

Eduardo Martínez

Instituto Técnico Industrial de Zipaquirá

eduardo.martinez@itiz.edu.co

Laura Alexandra Mora Martínez

Universidad Sergio Arboleda

La analítica de datos permea cada vez más actividades económicas, y el sector educación no es ajeno a estas transformaciones. Las herramientas interactivas de visualización permiten que los datos se conviertan en información, y que esta información fluya en las organizaciones para orientar la toma de decisiones y dar valor agregado a la información que se genera. Uno de los principales desafíos para las directivas escolares es garantizar un seguimiento eficaz del desempeño académico de los estudiantes y de los factores relacionados. La asistencia y la puntualidad representan un factor clave en este proceso, ya que en un modelo educativo presencial es condición necesaria para el aprendizaje.

Este proyecto implementa una solución para la gestión de los retardos (inasistencia a la primera hora de clase) en el Instituto Técnico Industrial de Zipaquirá a partir de datos recopilados en Google Forms, procesados en Python y compartidos a la organización a través de PowerBI. Esta solución analítica permitió orientar la toma de decisiones a docentes y directivos, favoreciendo los indicadores institucionales de aprobación escolar.

### **Math&Beer: Más que divulgación matemática**

Nicolás Díaz Guayazana

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

elkindiaz1931@gmail.com



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Blaymi Tatiana Romero Lopéz  
Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Math&Beer es un proyecto de divulgación matemática creado en 2018 por profesores y estudiantes de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Su objetivo es acercar las matemáticas al público general en un ambiente relajado como un bar, rompiendo barreras tradicionales y haciendo la disciplina más accesible y entretenida. Su primera edición tuvo lugar en el bar A Seis Manos, consolidándose como un espacio de encuentro para amantes de la matemática.

Hasta 2020, Math&Beer organizó diversas charlas sobre la aplicabilidad de las matemáticas en la vida cotidiana. Sin embargo, la pandemia obligó a suspender el evento. En diciembre de 2022, el proyecto fue reactivado y desde entonces ha realizado 17 charlas sobre temas originales como “De parientes matemáticos y otras especies raras” y “Las mates en grandes obras que inspiran”.

Este evento sin ánimo de lucro busca no solo transmitir conocimientos, sino también inspirar y transformar la percepción de las matemáticas mediante presentaciones, debates y actividades interactivas. Math&Beer ha construido una comunidad dinámica donde expertos y aficionados comparten experiencias y aprenden mutuamente.

En la ponencia se analizará la evolución del proyecto, sus logros, desafíos y el impacto generado. También se discutirán estrategias de divulgación para hacer las matemáticas accesibles y atractivas, resaltando el papel crucial de estas iniciativas en la promoción del conocimiento y la cultura científica.

### 3.6. Física matemática

#### Reducción bidimensional en la ecuación de Schrödinger no lineal

Ana Karina Fuentes

Universidad de Cartagena

afuentes@unicartagena.edu.co

Luis Ever Young Silva

Universidad de Cartagena



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

El condensado de Bose-Einstein (BEC) es un estado de la materia en el que un conjunto de átomos bosónicos (con espín entero), a temperaturas extremadamente bajas, colapsa en un solo estado cuántico macroscópico. En particular, el BEC de átomos alcalinos, como el caso de Rubidio-87 ha sido objeto de numerosos estudios experimentales y teóricos debido a su gran capacidad de control experimental, pues una característica fundamental de estos sistemas es su confinamiento en trampas ópticas o magnéticas, que pueden ser manipuladas con facilidad para generar geometrías específicas de particular interés como lo son sistemas anisotrópicos que se consideran aproximadamente bidimensionales (2D). En el caso de un condensado de Bose-Einstein, bajo la aproximación de campo medio, la denominada ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) en tres dimensiones es la base de la descripción de esta nube de átomos altamente diluida en ultra bajas temperaturas, incluyendo términos que representan la energía cinética, el potencial de confinamiento y las interacciones entre partículas, la ecuación de Gross-Pitaevskii corresponde con una versión no lineal de la conocida ecuación de Schrödinger, que requiere de la implementación de métodos numéricos adecuados para su solución y en algunos casos exige de un alto requerimiento computacional de cálculo para su implementación en dinámicas extensas para estos sistemas. En este trabajo usaremos el hecho de que bajo manipulación de las trampas ópticas y magnéticas que confinan los átomos es posible obtener una nube de átomos se encuentre fuertemente confinada en una dirección particular, por lo cual, su dinámica estará reducida únicamente al plano perpendicular a la fuerte dirección de confinamiento y de esta forma el sistema puede ser descrito usando una ecuación en únicamente dos variables espaciales. Esta reducción a dos dimensiones se obtiene mediante integración sobre la coordenada de fuerte confinamiento y el uso de la relación de normalización, o de completos probabilística, para el sistema atómico. Por lo cual, la reducción dimensional constituye una técnica matemática que permite describir un sistema físico tridimensional mediante modelos efectivos en dos dimensiones, simplificando así su estudio, facilitando el análisis numérico y reduciendo el tiempo de cómputo necesario en aplicaciones prácticas. En este trabajo presentamos los cálculos detallados que llevan a la reducción bidimensional en la ecuación de Schrödinger no lineal para sistemas de átomos alcalinos en un BEC y evaluamos la validez de esta ecuación efectiva 2D, presentando soluciones numéricas de la ecuación Gross-Pitaevskii tridimensional, para átomos de rubidio-87 y litio-7 comparadas con las obtenidas en el modelo reducido. Particularmente, mostramos que siempre que el confinamiento en la dirección perpendicular a un determinado plano sea adecuada, en estos sistemas de configuración tipo disco, la densidad en el plano de interés



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

presenta un buen acuerdo con la solución directa de la ecuación en dos dimensiones.

[1] Young-S, L. E., Salasnich, L., & Adhikari, S. K. (2010). Dimensional reduction of a binary Bose-Einstein condensate in mixed dimensions. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 82(5), 053601. [2] Muruganandam, P., & Adhikari, S. K. (2009). Fortran programs for the time-dependent Gross–Pitaevskii equation in a fully anisotropic trap. *Computer Physics Communications*, 180(10), 1888–1912. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.04.015> [3] Sandin, P., Ögren, M., Gulliksson, M., Smyrnakis, J., Magiropoulos, M., & Kavoulakis, G. M. (2017). Dimensional reduction in Bose-Einstein condensed clouds of atoms confined in tight potentials of any geometry and any interaction strength. *Physical Review E*, 95(1), 012142. [4] Rogel-Salazar, J. (2013). The gross–pitaevskii equation and bose–einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2), 247.

### **Análisis espectral de operadores diferenciales en la pseudoesfera**

Brayan Taborda López

Universidad Tecnológica de Pereira

[b.taborda@utp.edu.co](mailto:b.taborda@utp.edu.co)

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

En este póster se presenta un estudio físico y geométrico de la pseudoesfera, un ejemplo simple de una variedad con curvatura negativa constante. En esta superficie, la dinámica clásica de una partícula libre se describe mediante el flujo geodésico de la métrica, mientras que la dinámica cuántica se modela con el operador de Laplace-Beltrami, análogo al hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger. A través de un límite semiclásico, se puede recuperar la dinámica clásica a partir del régimen de altas energías

### **Modelamiento matemático del proceso de conservación de masa para un sistema abierto**

Christian Nolasco Serna

Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña

[cnolascos@ufpso.edu.co](mailto:cnolascos@ufpso.edu.co)

Carlos Javier Noriega Sánchez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña

Los fenómenos físicos suelen describirse en diferentes áreas de conocimiento a partir de modelos matemáticos. Estos modelos permiten evaluar el comportamiento de variables asociadas al proceso sin tener que recurrir a montajes de laboratorio. Para lograr este objetivo, es necesario formular una ecuación diferencial que, dependiendo del número de variables, puede ser de tipo parcial u ordinaria. En este sentido, el presente trabajo evalúa desde la perspectiva numérica y matemática, el balance de masa para un sistema abierto y posteriormente se validan experimentalmente los resultados obtenidos. La solución analítica de los modelos matemáticos se realiza a través de separación de variables mientras que las soluciones numéricas se obtienen a partir del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Los resultados experimentales muestran que la ecuación diferencial aplicada reproduce adecuadamente el proceso abordado y predice los tiempos de llenado en los que el sistema alcanza la condición de régimen permanente y describe el proceso transitorio del sistema con un error inferior al 4%. Adicionalmente, se evalúan numéricamente el impacto de variables operacionales tales como diámetros y propiedades termofísicas del fluido sobre el tiempo en el que el sistema alcanza el régimen permanente.

### **Evidencia de una solución con singularidad puntual y en tiempo finito para las ecuaciones de Euler de fluidos perfectos**

Diego Martínez-Argüello

Universidad de los Andes, Colombia

[df.martinez11@uniandes.edu.co](mailto:df.martinez11@uniandes.edu.co)

Sergio Rica

Pontificia Universidad Católica de Chile

En el contexto del problema de la globalidad de las ecuaciones Euler (EE) para fluidos incompresibles e invíscidos, que corresponden al límite de viscosidad cero de las ecuaciones de Navier-Stokes, presentamos un procedimiento para obtener soluciones singulares de tipo puntual y asintóticas en un tiempo finito para las EE con simetría axial en 3D. La singularidad se induce con un *ansatz* autosimilar en coordenadas esféricas para la dependencia radio-temporal y transforma las EE en unas ecuaciones diferenciales parciales autosimilares, o de Euler-Leray, caracterizadas por un exponente autosimilar desconocido,  $\nu$ , que juega el



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

papel de valor propio no lineal. A su vez, mediante una expansión en el ángulo polar con una base de polinomios asociados de Legendre, las ecuaciones de Euler-Leray se transforman en una jerarquía infinita de ecuaciones diferenciales ordinarias para las amplitudes de la expansión. El sistema dinámico resultante se resuelve numéricamente para diferentes truncaturas,  $N^*$ , de la expansión angular ajustando el autovalor  $\nu$  según las condiciones de borde. Como resultado, las soluciones para diferentes valores de  $N^*$  forman una secuencia convergente, tanto en el exponente  $\nu \approx 2,04$  como en las amplitudes autosimilares, que contrastan positivamente con la solución numérica de Luo et al (referencia [5] en la publicación) que exhibe una singularidad de tipo anular y un comportamiento asintótico autosimilar con exponente  $\nu \approx 2,91$ . La secuencia convergente que presentamos sugiere la existencia de una solución exacta del sistema dinámico y de las ecuaciones de Euler-Leray, para  $N^* \rightarrow \infty$ . De manera que el campo de velocidades asociado sería una solución singular en tiempo finito de las EE que se suma a las evidencias que indican su no-globalidad (En el campo de Resumen extendido"también adjuntamos una copia PDF de la publicación aparte de su URL pues el journal, que es de física, no es de acceso abierto. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.9.094401).

### Aplicación de Herramientas Numéricas en la Ecuación Gross–Pitaevskii

Jaime Correa Pitalúa

Universidad de Cartagena

[jcorreop@unicartagena.edu.co](mailto:jcorreop@unicartagena.edu.co)

Luis Ever Young Silva

Universidad de Cartagena

En la década de 1920 Nath Bose y Albert Einstein predijeron teóricamente la existencia de un nuevo estado de la materia denominado el condensado de Bose-Einstein (BEC) el cual fue logrado experimental en 1995, cuando las tecnologías de trampas ópticas y magnéticas que permitieron el enfriamiento de gases diluidos de átomos alcalinos ya estaban más avanzada. Este descubrimiento recibió el Premio Nobel de Física en el año 2001 [1] y desde entonces el BEC ha sido un campo importante de estudio para la exploración de sistemas cuánticos a escala macroscópica. Para entender el comportamiento de este fenómeno físico, el gas de átomos ultra fríos es modelado bajo la denominada aproximación de campo medio mediante la denominada ecuación de Gross-Pitaevskii, que consiste en una versión de la ecuación de Schrödinger no lineal para la cual es fundamental implementar métodos numéricos de



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

solución que permitan el estudio de las propiedades de este nuevo estado de la materia [2]. En este trabajo se presentará una explicación detallada sobre el método numérico de Crank-Nicolson empleado para solucionar ecuaciones diferenciales parciales, y su posterior aplicación en la simulación del estado condensado de Bose Einstein en átomos de rubidio-87 en diferentes configuraciones que incluyen estudios de la ecuación Gross-Pitaevskii en el caso tridimensional (3D) y sus correspondientes ecuaciones para casos de simetría especial, los cuales permiten una reducción dimensional en sistemas tipo disco (2D) y cigarro (1D). Presentamos resultados numéricos obtenidos mediante códigos propios elaborados con un vínculo directo a nuestro grupo de investigación que han sido publicados con anterioridad en diferentes versiones [3] y que usan el método de Crank-Nicolson para discretización en espacio y tiempo como herramienta de solución de la ecuación diferencial parcial no lineal involucrada en este sistema. En este trabajo presentamos resultados numéricos obtenidos a través de los códigos propios y los comparamos con los obtenidos por una herramienta independiente de acceso abierto denominada GPELab [4] construida en MATLAB con la posibilidad de implementar diferentes métodos numéricos de solución como el de Crank-Nicolson y Backward Euler. Estas comparaciones servirán para evaluar la convergencia, estabilidad y margen de error entre los diferentes métodos numéricos, además de comprobar la fiabilidad de los resultados obtenidos con los códigos propios de solución. Con estos resultados estaremos aportando a la comprensión de las herramientas disponibles para el estudio de condensados de Bose-Einstein en átomos alcalinos, enriqueciendo así mismo el panorama de aplicación de una de las áreas más importantes de las matemáticas como lo es el cálculo numérico.

[1] Anderson, M. H. , Ensher, J. R. Matthews, M. R., Wieman, C. E., & Cornell, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, 269(5221), 198-201. [2] Pethick CJ, Smith H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. 2nd ed. Cambridge University Press; 2008. [3] Young-S, L. E., Vudragović, D., Muruganandam, P., Adhikari, S. K., & Balaž, A. (2016). OpenMP Fortran and C programs for solving the time-dependent Gross-Pitaevskii equation in an anisotropic trap. *Computer Physics Communications*, 204, 209-213. [4] Antoine, X., & Duboscq, R. (2014). GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations I: Computation of stationary solutions. *Computer Physics Communications*, 185(11), 2969-2991.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### 3.7. Geometría

#### Aplicaciones del Problema de Plateau en el Diseño Aerodinámico de Alas de Avión

Ana Magnolia Marín Ramírez

Universidad de Cartagena

amarinr@unicartagena.edu.co

Barbara del Valle Velásquez Guerrero

Universidad de Cartagena

El problema de Plateau y las superficies mínimas tienen aplicaciones en diversas áreas, como la arquitectura y la ingeniería aeroespacial. En arquitectura, se utilizan para diseñar estructuras eficientes con materiales ligeros, como el techo del Estadio Olímpico de Múnich. En aeronáutica, los principios de las superficies mínimas pueden aplicarse en el diseño de componentes aerodinámicos para optimizar el flujo de aire y reducir la resistencia. Desde un punto de vista matemático, las superficies mínimas se caracterizan por tener curvatura media  $H=0$  en cada punto. En mecánica de fluidos y aerodinámica, la forma de una superficie influye significativamente en la distribución de presiones y en la minimización de la resistencia al avance. Aunque la ecuación de Young-Laplace describe el equilibrio de una superficie bajo la influencia de la tensión superficial en fluidos, ciertos principios geométricos pueden extrapolarse al diseño estructural de alas para mejorar la eficiencia aerodinámica. En este trabajo, exploraremos la aplicación de superficies mínimas en el diseño aerodinámico de las alas del Airbus A320N, con el objetivo de optimizar la forma del perfil aerodinámico y reducir la resistencia al flujo de aire. Utilizaremos un enfoque basado en geometría diferencial y métodos numéricos para analizar la curvatura, su influencia en la aerodinámica y las condiciones de contorno que afectan el rendimiento del ala. El diseño de alas en aeronáutica busca maximizar la sustentación y minimizar la resistencia inducida. Las superficies mínimas, al ser configuraciones geométricas que reducen el área expuesta bajo ciertas restricciones, pueden proporcionar formas óptimas para mejorar el flujo de aire y disminuir la formación de turbulencias. En aeronaves modernas, como el Airbus A320N, los winglets y la curvatura del borde de ataque han sido diseñados con principios similares para reducir la resistencia inducida y mejorar la eficiencia del combustible. El ala de un avión es un componente clave en la generación de las fuerzas aerodinámicas necesarias para el vuelo. Su diseño



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

involucra un equilibrio entre peso, resistencia estructural y eficiencia aerodinámica. En el Airbus A320N, las alas están compuestas principalmente de aluminio, un material ligero y resistente a la corrosión, lo que contribuye a la reducción del peso sin comprometer la estructura. La estructura del ala está conformada por varios elementos principales: el cajón central o de torsión, compuesto por largueros, larguerillos, costillas y el revestimiento externo; la estructura auxiliar, que incluye el winglet, las superficies de control, el borde de ataque y el borde de salida; los largueros, que son vigas principales que recorren el ala desde la raíz hasta la punta, transmitiendo las cargas estructurales; los larguerillos, que refuerzan el revestimiento para soportar esfuerzos adicionales generados en vuelo; y las costillas, dispuestas perpendicularmente a los largueros, que distribuyen las cargas y delimitan compartimentos internos, como el depósito de combustible. En este contexto, analizaremos cómo la aplicación de superficies mínimas puede influir en la optimización del diseño del ala, considerando su impacto en la reducción de resistencia y en la eficiencia estructural del Airbus A320N.

### **Sobre la ecuación de Allen–Cahn y $\Gamma$ -Convergencia en dominios acotados**

Cristian López Correa

Universidad Tecnológica de Pereira

c.lopez12@utp.edu.co

Luis Eduardo Osorio Acevedo

Universidad Tecnológica de Pereira

La ecuación elíptica de Allen–Cahn  $-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u) = 0$  modela los perfiles estacionarios que describen transiciones de fase en materiales. Aquí,  $W$  es un potencial de doble pozo que favorece dos estados de mínima energía, generando interfaces finas entre fases distintas. Esta ecuación se interpreta como una aproximación del modelo de Van der Waals–Cahn–Hilliard en el régimen de equilibrio. En el contexto de la teoría de transición de fases, Morton Gurtin planteó problemas fundamentales relacionados con estos modelos [Gur85]. Paralelamente, De Giorgi desarrolló el método de la  $\Gamma$ -convergencia [DGF75], proporcionando un marco poderoso para analizar límites de funcionales variacionales. Posteriormente, en el trabajo clásico de Modica y Mortola [MM77], se aplicó esta teoría para demostrar la  $\Gamma$ -convergencia del funcional de energía asociado a la ecuación de Allen–Cahn hacia el funcional de perímetro, estableciendo una conexión profunda entre transiciones de fase y problemas de frontera mínima. Más adelante, Luciano Modica [Mod87] amplió estos resultados, introduciendo des-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

igualdades del tipo Modica y criterios de interfaz mínima.

En este póster se analizarán algunos de los resultados clásicos de la teoría de la transición de fases que se obtienen al estudiar la  $\Gamma$ -Convergencia del funcional de energía de la ecuación de Allen–Cahn sobre dominios acotados. En particular, se mostrará cómo la  $\Gamma$ -convergencia del funcional de energía de Allen–Cahn conduce a un problema de perímetro mínimo, revelando así una conexión directa con problemas geométricos clásicos, como problemas isoperimétricos.

Se incluirá un ejemplo concreto de la  $\Gamma$ -convergencia para aproximar soluciones tipo frontera en dominios acotados. Finalmente, se discutirá la influencia de la geometría del dominio sobre las soluciones límite, destacando que la forma y tamaño del dominio impactan directamente en la configuración geométrica de las soluciones obtenidas

### **Una Caracterización del Catenoide: Una aplicación del método de reflexión de Alexandrov**

Edison Gerardo Narváez Guerrero

Universidad del Valle

`edison.narvaez.guerrero@correounivalle.edu.co`

El presente trabajo de grado se enmarca en el estudio de superficies mínimas en el espacio euclidiano tres dimensional. El objetivo principal es caracterizar el catenoide como la única superficie mínima de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura total finita y dos fines. Esta caracterización fue obtenida por el matemático R. Schoen, quien además obtuvo una descripción bastante precisa de los fines de una superficie mínima con curvatura total finita, mostrando que estos fines, cuando están encajados, son gráficas de funciones con crecimiento logarítmico. Este comportamiento de los fines de la superficie se denomina regularidad en infinito.

La demostración de Schoen para la caracterización del catenoide se basa en el uso de la regularidad en infinito, el método de reflexión de Alexandrov y el principio del máximo. Empleando el método de reflexión de Alexandrov se demuestra la existencia de una familia de planos de simetría de la superficie que verifican que esta superficie es una superficie con simetría rotacional, y en consecuencia, se trata de un catenoide.

La demostración presentada en este trabajo difiere de la prueba realizada por Schoen, ya que aquí se realizan las reflexiones sobre planos inclinados, y no sobre planos verticales, simplificando una parte la demostración.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Espacios de jets de primer orden

Fermín Navarro Hernández

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[ferminnavarrohernandez@gmail.com](mailto:ferminnavarrohernandez@gmail.com)

Daniel Felipe Olarte Rojas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El objetivo principal es entender la noción de espacio de jets de primer orden y poderlo aplicar, para ello se descompondrá la definición de variedad de jets de primer orden en las definiciones preliminares, realizando ejemplos con espacios ya conocidos.

Además se estudiará la importancia de estos espacios, la cual radica en poder profundizar en la geometría diferencial, también se pueden implementar otras maneras de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales de primer orden.

### El Teorema del Hiperplano de Lefschetz en la construcción de variedades tipo Godeaux-Serre

Juan Sebastian Cruz Penagos

Universidad del Valle

[juan.sebastian.cruz@correounivalle.edu.co](mailto:juan.sebastian.cruz@correounivalle.edu.co)

En este trabajo, estudiamos superficies que son cocientes suaves de intersecciones completas (variedades de Godeaux) y cuyo grupo fundamental topológico  $\pi_1$  es isomorfo a ciertos grupos clásicos, incluyendo grupos diedrales  $D_n$ , grupos simétricos  $\mathfrak{S}_n$  y algunos subgrupos finitos primitivos de  $(4, \mathbb{C})$ . Para ello, utilizamos la estrategia introducida por J.-P. Serre, basada en la teoría de recubrimientos y el Teorema del Hiperplano de Lefschetz. Construimos explícitamente ejemplos de estas superficies como cocientes de variedades proyectivas bajo la acción de grupos finitos, asegurando la suavidad de los cocientes mediante condiciones adecuadas en los automorfismos.

### El Fenómeno de Lavrentiev en el Cálculo de Variaciones

Juan Sebastian Vanegas Trejos

Universidad Tecnológica de Pereira

[jsvanegas@utp.edu.co](mailto:jsvanegas@utp.edu.co)



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Luis Eduardo Osorio Acevedo  
Universidad Tecnológica de Pereira

El problema básico del cálculo de variaciones consiste en encontrar una función que minimice una energía, como hallar la trayectoria más rápida entre dos puntos en un campo gravitatorio o determinar la forma óptima de un ala. La existencia de soluciones puede establecerse en espacios funcionales bastante generales, mucho más amplios que el de funciones suaves. Un desafío práctico importante es aproximarse al valor del ínfimo de la energía, pero los métodos numéricos, que operan con funciones concretas, a veces fallan en esta tarea: este es el sorprendente fenómeno de Lavrentiev. Este fenómeno, que impacta tanto en física como en geometría, por ejemplo en la optimización de formas y en el estudio de superficies minimales, muestra que la aproximación puede no capturar el mínimo de energía, aunque existan soluciones exactas en espacios generales. Una introducción accesible y una demostración elemental de su inexistencia en ciertos casos recientes se presentan en [CM24], resolviendo preguntas abiertas desde principios de los años noventa. Más allá de su dimensión técnica, la comprensión de este fenómeno ilustra tensiones entre modelos ideales y realizaciones prácticas, tema también abordado en otros contextos como el analizado en [UK11]. En este póster se busca presentar de forma clara y sintética los aspectos esenciales del fenómeno de Lavrentiev y algunas aplicaciones.

### **De los sólidos platónicos a la correspondencia de McKay**

Laura Alejandra Muñoz Martínez  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
emdicalejandra@gmail.com

Se conoce como sólidos platónicos a los cinco poliedros regulares convexos que existen: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Fueron estudiados a profundidad en la antigua Grecia y desde ese momento hasta nuestros días, ha perdurado su relevancia y han aparecido en la matemática de muchas maneras. Una de ellas, de gran interés, es en teoría de singularidades kleinianas. En su trabajo sobre la clasificación de los subgrupos finitos de  $SL(2, \mathbb{C})$ , Klein demostró que estos deben ser isomorfos (salvo conjugación) a uno de los siguientes grupos: un grupo cíclico, un grupo diédrico binario o un grupo poliédrico binario. Los grupos poliédricos binarios son tres: grupo binario tetraédrico, grupo binario



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

octaédrico y grupo binario icosaédrico. Estos últimos se encuentran relacionados mediante una aplicación sobreyectiva (2:1) con los grupos de simetría de los sólidos platónicos: grupo octaédrico (hexaedro y octaedro), grupo icosaédrico (dodecaedro e icosaedro) y grupo tetraédrico (tetraedro) (los grupos de simetría de sólidos duales son isomorfos). Ahora, si  $G$  es un subgrupo finito de  $SL(2, C)$ , entonces al cociente  $(C^2)/G$  que se genera bajo la acción de  $G$  sobre  $C^2$  lo llamamos singularidad kleiniana y adicionalmente decimos que tiene estructura de orbifold. Este tipo de objetos se han estudiado desde su origen en la escuela italiana de geometría algebraica del siglo XIX hasta nuestros días, donde son de gran importancia en diversas áreas de la matemática y en teoría de cuerdas. El objetivo del presente póster es resaltar tal conexión entre sólidos platónicos y orbifolds y exponer el recorrido que arranca con la clasificación griega de los sólidos y termina con la correspondencia de McKay.

### **$G$ -estructuras sobre una variedad suave**

Laura Catalina Torres Mojica

Universidad de Los Andes

lc.torresm@uniandes.edu.co

En la teoría de haces fibrados hay ciertos ejemplos, esencialmente subhaces reducidos del haz de marcos sobre una variedad suave, que juegan un papel fundamental en la geometría diferencial. Entre los ejemplos más destacados de estos haces fibrados, están los subhaces obtenidos de las reducciones del grupo estructural del haz de marcos sobre una variedad suave, a los subgrupos  $GL+(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SL(n)$  y al grupo trivial. Dichos subhaces se conocen como una  $G$ -estructura y su existencia es equivalente a inducir una estructura sobre la variedad. Por ejemplo, una orientación, una métrica Riemanniana, una forma de volumen que no se anule en ningún punto, una elección en un marco en cada punto, etc. En el poster se enuncia un teorema que permite entender la relación entre la reducción del grupo estructural del haz de marcos sobre una variedad suave y la estructura que esta reducción induce sobre la variedad. Además, se exponen algunos ejemplos que plasman dicho resultado.

### **ALGUNAS PROPIEDADES DE GIROGRUPOS Y GIROGRUPOS GIROABELIANOS DE MÖBIUS**

Pierre Ángel Gómez Cortés

Universidad Sergio Arboleda

pierre.gomez01@usa.edu.co



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Juan Carlos Ávila Mahecha  
Universidad Sergio Arboleda

Este estudio se enfoca en las sumas de Möbius, los girogrupos y los girogrupos giroabelianos, estructuras algebraicas que surgen en contextos como la geometría hiperbólica, la física matemática y la teoría de la relatividad. Las sumas de Möbius, vinculadas a transformaciones conformes en el plano complejo, ofrecen un marco geométrico para analizar operaciones no conmutativas. A partir de estas ideas, los girogrupos se presentan como una generalización de los grupos tradicionales, donde la asociatividad y la conmutatividad son sustituidas por propiedades más flexibles, como la giroasociatividad y la giroconmutatividad. Estas estructuras no solo amplían el alcance del álgebra abstracta, sino que también poseen aplicaciones prácticas en la modelización de fenómenos en espacios no euclidianos. El objetivo principal de este trabajo es caracterizar y comprender las propiedades algebraicas y geométricas de los girogrupos, con especial énfasis en los girogrupos giroabelianos, que generalizan la noción de conmutatividad.

### **Evolutas en el Plano Hiperbólico**

Santiago Toro Morales  
Universidad Tecnológica de Pereira  
santiago.toro@utp.edu.co

Las evolutas son curvas que representan el conjunto de los centros de la circunferencia osculatriz de una curva arbitraria, y han sido ampliamente estudiadas en el plano euclidiando. En las últimas décadas se ha incrementado el interés por estudiar este tipo de curvas en espacios de curvatura constante, dentro de los que se encuentra el plano hiperbólico. En el siguiente trabajo se exponen algunos de los resultados en el estudio de las evolutas en el espacio hiperbólico.

### **Del cálculo variacional al transporte futurista: La braquistócrona terrestre**

Sergio Andrés Bautista Montenegro  
Universidad Distrital  
sabautistam@udistrital.edu.co  
Laura Vanessa Barbosa González



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Distrital

El problema de la braquistócrona, planteado por Johann Bernoulli en 1696, consiste en encontrar la curva por la cual un objeto desciende, bajo la acción de la gravedad, desde un punto A hasta un punto B (no alineados verticalmente) en el menor tiempo posible. Su solución, una cicloide, resultó contraintuitiva y marcó un hito en la historia del cálculo. Este trabajo presenta una generalización moderna conocida como la braquistócrona terrestre, donde se busca la curva óptima de menor tiempo entre dos puntos sobre la superficie de la Tierra, atravesando su interior. Usando herramientas del cálculo variacional, física gravitacional y geometría diferencial, se muestra que dicha trayectoria es una hipocicloide. Además del interés matemático, se exponen posibles aplicaciones en transporte subterráneo de alta velocidad.

### Combined connections on Dirac structures

Valentina Alejo Rincón

Pontificia Universidad Javeriana

alejovale0108@gmail.com

Dirac structures are a generalization of symplectic and Poisson manifolds, defined on the generalized tangent bundle:

$$TM \oplus T^*M$$

, of a base manifold  $M$ . They are characterized by being closed under pullbacks and pushforwards. This work presents the preliminaries of the subject and some compatibility conditions between this structure and a Riemannian metric on the base manifold, through a combined connection (covariant and contravariant) acting on sections of the generalized tangent bundle. As part of the work, some detailed explicit calculations are presented for various examples in the Poisson case, and the form that the compatibility conditions take in these cases is analyzed.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### 3.8. Lógica

#### Luz al parque

Breyner Yecid Asencio Pineda

Fundación universitaria Konrad Lorenz

breyner.y.asenciop@konradlorenz.edu.co

María Fernanda Vanegas Rey

Fundación universitaria Konrad Lorenz

Realizamos un proyecto enfocado en la optimización de la red eléctrica del Parque El Tunal en Bogotá, implementando una estrategia basada en grafos para el diseño eficiente de los circuitos eléctricos. En el desarrollo del proyecto, consideramos los principales fenómenos eléctricos que afectan una red de transmisión, asegurando una distribución óptima de la energía y mejorando su desempeño.

### 3.9. Optimización, teoría de control y aplicaciones a economía

#### A preconditioner for solving linear programming problems with dense columns

Catalina Jaramillo Villalba

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

catajv@unicamp.br

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

The Interior-Point Methods are a class for solving linear programming problems that rely upon the solution of linear systems. At each iteration, it becomes important to determine how to solve these linear systems when the constraint matrix of the linear programming problem includes dense columns. In this paper, we propose a preconditioner to handle linear programming problems with dense columns, and we prove theoretically that the final linear system to solve is uniformly bounded when the Interior-Point Method is approaching to an



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

optimal solution. This result is illustrated through computational experiments, which show that our proposed method is robust and competitive in terms of running time and/or number of iterations compared with existing methods.

### **Solución Numérica de la ecuación diferencial de Thiele para la valoración de reservas en seguros de vida dotales**

Isabel Cristina Acevedo Agudelo

Universidad de Antioquia

[icristina.acevedo@udea.edu.co](mailto:icristina.acevedo@udea.edu.co)

Este trabajo aborda la solución numérica de la ecuación de Thiele, aplicada a seguros de vida dotal. Usando métodos de diferencias finitas, se modela la evolución de las reservas técnicas, integrando las probabilidades de mortalidad y supervivencia.

### **Estudio del Método epsilon-greedy en el problema multi-armed bandit**

Juan Esteban Arce Salazar

Universidad del Valle

[juan.esteban.arce@correounivalle.edu.co](mailto:juan.esteban.arce@correounivalle.edu.co)

Stevens Paz Sanchez

Universidad del Valle

El problema multi-armed bandit corresponde a un problema de optimización básico que puede abordarse desde el aprendizaje por refuerzo. En este tipo de aprendizaje de máquina intervienen conceptos clave como ambiente, acciones y recompensa. En este trabajo se estudian la teoría básica y la aplicación de la metodología epsilon-greedy para el cálculo aproximado del valor de acción, aplicado al problema multi-armed bandit con variaciones en la selección del valor epsilon, tanto constante como dependiente del paso de avance. Asimismo, se plantea un problema no estacionario, presentando las dificultades que, por tanto, surgen en este contexto.

### **Problema de La Barra Rodante**

Kevin Daniel Bocanegra Arias

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[kdbocanegraa@udistrital.edu.co](mailto:kdbocanegraa@udistrital.edu.co)



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Daniel Felipe Olarte Rojas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El problema de la barra rodante, consiste en tomar dos objetos A y B con la misma masa sobre el plano  $xy$ , los cuales se mueven sobre los ejes respectivamente, además, estos objetos están conectados por medio de una barra sin masa y con una longitud fija. Encontraremos los extremos del funcional que describen la situación.

Con esto en cuenta, plantearemos nuestro funcional, para así hallar nuestro sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ahora, a partir de esta ecuación, encontraremos el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual nos permitirá deducir las ecuaciones de movimiento. Para resolver este sistema, se usará el método numérico de Runge-Kutta de Orden 4, y así poder ver las soluciones de este problema.

### **Riesgo y Resiliencia Fiscal del Cauca: El Papel de los Cultivos Ilícitos en la Economía Regional**

Maureen Dayanna López Salazar

Universidad del Cauca

mlopezs@unicauca.edu.co

La sostenibilidad fiscal del departamento del Cauca enfrenta un desafío crítico debido a la dependencia económica de los cultivos ilícitos, los cuales generan inestabilidad financiera y limitan el desarrollo de sectores productivos formales. Este estudio combina modelos matemáticos avanzados con análisis económico para evaluar el impacto de esta dependencia y proponer estrategias de mitigación basadas en datos.

A través del uso de regresión polinómica, modelos ARIMA y análisis de correlación, se cuantifica la relación entre la expansión de los cultivos ilícitos y el crecimiento del déficit fiscal. Los resultados revelan una correlación significativa entre el aumento de hectáreas cultivadas y el deterioro de los indicadores económicos, evidenciando la fragilidad de la economía regional. Además, las proyecciones del modelo ARIMA indican que, sin una intervención efectiva, el endeudamiento del Cauca continuará creciendo de manera insostenible.

Como respuesta a este escenario, se plantean estrategias de diversificación económica, sustitución de cultivos y modernización tributaria para reducir la dependencia del narco-



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

tráfico. La implementación de inteligencia artificial y machine learning en la formulación de políticas públicas es clave para diseñar soluciones dinámicas y adaptativas.

Este estudio proporciona una hoja de ruta para fortalecer la estabilidad fiscal del Cauca, evidenciando cómo la matemática aplicada puede servir como herramienta fundamental en la toma de decisiones económicas y gubernamentales.

### **3.10. Probabilidad y estadística**

#### **Detección de anomalías en datos de criminalidad en Colombia usando la Ley de Benford**

Cristian Fernando Domínguez Muñoz  
Universidad del Cauca  
cfdominguez@unicauca.edu.co  
Maria Alexandra Yandy Gonzalez  
Universidad del Cauca

En este trabajo, se realizó un estudio sobre el comportamiento de ciertos conjuntos de datos para determinar si cumplen con la llamada ley de Benford. La investigación se llevó a cabo en tres etapas principales, primero se presentan los fundamentos teóricos de la ley de Benford y su aplicabilidad en la detección de anomalías; seguidamente se describe la metodología empleada calculando el primer dígito del número total de delitos por municipio desde el año 2014 hasta 2024, para realizar las pruebas estadísticas pertinentes; finalmente se analizan los resultados obtenidos y sus implicaciones, donde se encontró que los datos a nivel nacional en términos generales se ajustan adecuadamente a la distribución teórica de Benford.

#### **Predicción del Sentido Rentabilidad en un Portafolio de Inversión Usando Modelos de Clasificación Supervisada**

Isabella Quijano Fernández  
Universidad del Cauca  
iquijano@unicauca.edu.co  
Angélica María Patiño Sarria



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad del Cauca

En el contexto actual de mercados financieros cada vez más volátiles y complejos, incorporar modelos matemáticos avanzados en la gestión de inversiones se ha consolidado como una estrategia clave para reducir la incertidumbre y mejorar la toma de decisiones. La capacidad de anticipar tendencias y optimizar portafolios a través de herramientas de aprendizaje automático brinda a los inversionistas una ventaja competitiva significativa, permitiéndoles adaptarse de manera más ágil a las fluctuaciones del mercado. Este estudio se centra en la aplicación de modelos de clasificación supervisada para predecir el sentido de la rentabilidad de un portafolio diversificado de alto valor de capitalización, utilizando datos históricos correspondientes al período 2019-2024. El objetivo principal es identificar los patrones subyacentes que permitan determinar cuál modelo ofrece el equilibrio más adecuado entre precisión predictiva y relevancia en decisiones de inversión reales. Además, se abordan las implicaciones de estos modelos en la gestión de riesgos, la mejora de la eficiencia operativa y el diseño de estrategias de inversión automatizadas. A través de este análisis, se pretende no solo optimizar el rendimiento del portafolio, sino también ofrecer un marco de referencia para su aplicación en contextos financieros reales.

### **Análisis multivariado**

Jorge Ernesto González

Universidad ECCI

[jorgeer.gonzalezma@ecci.edu.co](mailto:jorgeer.gonzalezma@ecci.edu.co)

Juan Camilo Abril

Universidad ECCI

Andrés Esteban Suárez

Universidad ECCI

Para la investigación, cada una de las variables a trabajar se toman a partir de la base de datos de las pruebas SABER -PRO del año 2018-2022, la cual es la base fundamental para el desarrollo de la investigación, debido que gracias a la base de datos se tiene una claridad de cada una de las variables con sus respectivos datos, para que, así mismo se puedan obtener resultados de manera clara y concisa. La base de datos con la cual se está desarrollando la investigación presenta un total de 57 variables, de las cuales cada variable, representa un tipo



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

de variable, ya sea cuantitativa o cualitativa. Sin embargo, solo se analizarán las variables de principal investigación, como lo son el rendimiento de los componentes por género, y así mismo variables extra curriculares, como lo es departamento de vivienda.

### **análisis multivariado**

Julian Andrés Buitrago Becerra

Universidad ECCI

[julianan.buitragobe@ecci.edu.co](mailto:julianan.buitragobe@ecci.edu.co)

Carlos Felipe Gonzales

Universidad ECCI

Este estudio presenta un análisis descriptivo de un conjunto de datos sobre la enfermedad de Alzheimer, obtenido de la plataforma Kaggle. El conjunto de datos comprende información de 2,150 pacientes, incluyendo variables demográficas, clínicas, cognitivas y de estilo de vida. El objetivo principal del análisis es explorar la distribución y las relaciones entre estas variables para comprender mejor los perfiles de los pacientes y posibles factores asociados a la enfermedad. Se examinan variables como edad, género, etnia y nivel educativo, junto con factores médicos de riesgo, tales como antecedentes familiares, enfermedades preexistentes y hábitos de vida. Además, se analizan distintas evaluaciones cognitivas utilizadas para medir el deterioro cognitivo y su progresión. Se presentan medidas estadísticas descriptivas, como frecuencias, medidas de tendencia central y dispersión, además de visualizaciones gráficas para facilitar la interpretación de los datos. Este análisis proporciona una base inicial para futuros análisis descriptivos multivariados e investigaciones sobre la enfermedad de Alzheimer, facilitando la detección de patrones en el conjunto de variables que pueden contribuir a una mejor comprensión de los factores de riesgo y el impacto de la enfermedad en diferentes poblaciones.

### **Estimación robusta de parámetros para el modelo de regresión Logística**

Karold Fernanda Guzmán Gallardo

Universidad del Cauca

[karoldguzman@unicauca.edu.co](mailto:karoldguzman@unicauca.edu.co)

Adrián Estiven Fajardo Paz

Universidad del Cauca



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

La regresión logística es sensible a valores atípicos y errores en las etiquetas, lo que puede sesgar sus coeficientes y reducir su capacidad predictiva, especialmente en datos desbalanceados. Para abordar este problema, este trabajo propone una técnica de estimación robusta que minimiza la influencia de anomalías, mejorando la estabilidad del modelo.

### **Análisis multivariado de Delitos informáticos en Colombia**

María Fernanda Sánchez Cardozo

Universidad ECCI

[mariaf.sanchezca@ecc.edu.co](mailto:mariaf.sanchezca@ecc.edu.co)

Jessika Alejandra Rodríguez Ussa

Universidad ECCI

Se inició explorando fuentes de datos abiertos, en donde se seleccionó la base "Delitos informáticos, en Colombia", para su análisis. Esta contiene información detallada sobre el número de casos registrados en distintas categorías, distribuidos por año y región, esta base de datos puede llegar a ser importante a la hora de analizar la evolución de los delitos cibernéticos, e identificar patrones en su distribución geográfica, así como evaluar posibles factores que influyen en su concentración.

## **3.11. Teoría de operadores, análisis numérico y de ciencias de la computación**

### **The Bernstein–Vazirani algorithm**

Ashlee Yin Romero

Universidad de Los Andes

[a.yin@uniandes.edu.co](mailto:a.yin@uniandes.edu.co)

Pablo De León Devia

Universidad de Los Andes

The ongoing development of quantum computing has opened the door for different computational problem-solving methods, never thought possible before, especially when it comes to reducing the time complexity of algorithms. A clear example is the Bernstein-Vazirani



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

algorithm, a restricted version of the Deutsch-Jozsa algorithm, which solves the problem of identifying a hidden  $n$ -bit string in a single query. This is achieved using the superposition property of qubits and parallel parity checking to determine the secret string. In this poster, we explain the fundamentals of quantum computing, the Bernstein-Vazirani algorithm, and we implemented it in three different environments: an ideal IBM quantum backend simulator, a 127-qubit IBM QPU Sherbrooke, and a 3-qubit NMR Spin-Q quantum computer. Lastly, we compare the results throughout the three experiments.

### **Investigación Experimental en Optimización de Problemas de Búsqueda Continua mediante el uso de Heurísticas Locales**

Daniel Santiago López Daza

Universidad Nacional de Colombia

dlopezda@unal.edu.co

Catalina Velasquez Ortiz

Universidad Nacional de Colombia

Se presenta, a modo de resumen extendido, una adaptación experimental del framework DE-LoHA\* (Data Efficient Local Heuristic A\*) para resolver problemas de búsqueda continua, utilizando la ciudad de Bogotá como caso de estudio. Tradicionalmente, los problemas de planificación basados en búsqueda continua dependen de heurísticas globales que pueden ser imprecisas o llevar a soluciones subóptimas debido a restricciones complejas del entorno. La metodología empleada busca mejorar la eficiencia del algoritmo de búsqueda A\* mediante la implementación de una heurística local aprendida por redes neuronales, específicamente diseñadas para estimar el costo adicional de escapar de regiones locales durante la búsqueda. Esta heurística local se considera más fácil de aprender y presenta mejor generalización en comparación con las heurísticas globales. La investigación aborda tres elementos clave: la definición precisa de región local y frontera en un entorno continuo, el aprendizaje de la heurística local mediante una función heurística local invariante y una técnica eficiente de recolección de datos (backtracking). La región local se definió mediante una ventana circular de radio fijo alrededor de un estado específico, y la frontera se determinó usando un árbol de expansión generado por el algoritmo de Dijkstra. La heurística local se modela mediante una red neuronal entrenada con datos que consideran la variación relativa de costos dentro de la región local, en lugar de usar valores absolutos de heurísticas globales, mejorando



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

así la capacidad de generalización del modelo. Los resultados experimentales compararon Dijkstra, A\*, LoHA\* y una versión aproximada de LoHA\* (usando heurística aprendida), evaluando tiempos de recorrido, nodos expandidos y tiempos de ejecución. Los tres primeros métodos encontraron caminos óptimos idénticos, mientras que LoHA\* aproximado obtuvo soluciones ligeramente menos precisas, aunque considerablemente más eficientes en términos de nodos expandidos. LoHA\* aproximado mostró una reducción significativa de la expansión de nodos al evitar regiones sin salida que otros métodos exploraban completamente. En cuanto a tiempo de ejecución, LoHA\* original mostró valores excesivamente altos debido a la complejidad de calcular directamente su heurística local. En contraste, LoHA\* aproximado mantuvo tiempos de ejecución bajos, evidenciando la ventaja del aprendizaje heurístico local. Finalmente, la recolección de datos eficiente (DE-LoHA\*) mostró gran efectividad al generar grandes volúmenes de datos en poco tiempo. Además, el incremento en el número de planes no siempre implicó un aumento proporcional en los datos recolectados, dependiendo principalmente de las características específicas de cada plan global. En conclusión, este estudio demostró la eficacia de usar heurísticas locales aprendidas para mejorar significativamente la eficiencia computacional en el caso específico de la búsqueda continua en la ciudad de Bogotá, manteniendo una precisión casi óptima en los resultados obtenidos.

### **Criptografía de curvas elípticas para identidades digitales auto-soberanas**

David Mauricio Valoyes Porras

Universidad El Bosque

davidmauricio2dmvp2@gmail.com

Daniel Alejandro Arias Álvarez

Universidad El Bosque

La criptografía de curvas elípticas (ECC por sus siglas en inglés) es un esquema de cifrado que permite generar claves asimétricas de manera más efectiva en términos del balance entre la velocidad y seguridad en comparación con otros criptosistemas. Las identidades digitales son una proyección digital de un individuo, creadas a partir de la información que proveen, y la huella que dejan sus interacciones y su comportamiento en línea. La gestión y protección de estas identidades se ha convertido en un desafío crucial, más aún con el surgimiento de las identidades digitales auto-soberanas, donde el dueño de la información se convierte en un actor activo en lo que se refiere al control de su información personal. Es en esa línea,



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

que el presente trabajo plantea el desarrollo de un modelo criptográfico basado en ECC, con una hibridación con el estándar de cifrado avanzado (AES), para garantizar la seguridad de las identidades digitales auto-soberanas. El modelo propuesto implementa un esquema de cifrado integrado ECIES (Elliptic Curve Integrated Encryption Scheme), el cual combina la eficiencia de la criptografía de curvas elípticas con la solidez del cifrado simétrico que provee el algoritmo AES. Para ello, se utilizó la curva SECP256K1, una curva elíptica definida sobre un campo primo de 256 bits, ampliamente utilizada en aplicaciones de blockchain. Igualmente, el modelo introduce un enfoque distinto para el cifrado de identidades digitales al tratar la información personal y las imágenes como una única cadena de texto antes de aplicar el proceso de cifrado, es decir que transforma todos los datos no alfanuméricos a una cadena de datos alfanuméricos, lo que permite la integración con aquellos datos que originalmente si eran alfanuméricos, y luego su correspondiente protección dentro de una misma estructura cifrada. El proceso consta de varias etapas: recopilación y estructuración de los datos, transformación de imágenes a cadenas de texto mediante la representación alfanumérica de los píxeles RGB, el cifrado mediante ECIES y, finalmente, descifrado y reconstrucción de la información en su formato original, para verificar la invertibilidad del proceso. Para evaluar el rendimiento del modelo, se realizaron pruebas considerando diferentes volúmenes de información y tamaños de imágenes. Los resultados muestran que el tiempo de ejecución del cifrado y descifrado está directamente relacionado con el tamaño de imagen que se transforma alfanuméricamente, sin verse prácticamente afectado por los otros datos a cifrar. A pesar de esto, el modelo demuestra una eficiencia considerable en la protección de los datos, reduciendo la carga computacional que normalmente suponen otros métodos en donde se requiera del cifrado de imágenes. Las conclusiones obtenidas indican que el modelo es eficaz para la creación de identidades digitales auto-soberanas, ya que permite a los usuarios mantener el control sobre su información personal sin depender de terceros para su gestión. Además, la utilización de la curva SECP256K1 abre la posibilidad de integraciones con sistemas basados en blockchain, potencialmente fortaleciendo más la seguridad y privacidad de los datos. El trabajo también resalta la importancia de la criptografía en la construcción de identidades digitales seguras, especialmente en un contexto donde la digitalización de la información es cada vez más predominante, considerando la aplicación de estas en múltiples escenarios, como autenticación en plataformas digitales, firma electrónica y sistemas de gestión de identidad en entornos descentralizados. Así entonces, el modelo desarrollado presenta una alternativa viable para la protección de identidades digitales, ofreciendo un equilibrio



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

entre seguridad y rendimiento, buscando también un enfoque diferente para el manejo de imágenes y datos alfanuméricos dentro de un esquema de cifrado unificado lo convierte en una solución adaptable a diversas aplicaciones en el ámbito de la seguridad digital.

### **Consideraciones en torno a algoritmos de factorización de números enteros como aproximación criptoanalítica basada en teoría de números para el criptosistema RSA**

David Mauricio Valoyes Porras

Universidad El Bosque

dvaloyesp@unbosque.edu.co

Jorge Andrés Marulanda Celeita

Universidad El Bosque

La factorización de números enteros consiste en la descomposición de un número entero compuesto (es decir, no primo) en forma de un producto de números también enteros denominados divisores no triviales. Específicamente, el Teorema Fundamental de la Aritmética nos dice que cada entero positivo tiene una única descomposición en factores primos salvo orden. El criptosistema Rivest-Shamir-Adleman (RSA) es un sistema asimétrico de cifrado cuya seguridad se basa en la inviabilidad de la factorización de números enteros demasiado grandes, es decir, aquellos que pueden ser de 300, 500, 700 o más dígitos, en un tiempo relativamente aceptable. Considerando esto, la búsqueda de algoritmos que realicen la factorización de números enteros en tiempos aceptables y con costos computacionales tolerables es un reto científico y tecnológico de interés en la comunidad matemática y de las ciencias de la computación. Lo anterior se debe a que propiamente se busca un algoritmo capaz de realizar el cálculo en un tiempo polinómico, es decir, cuyo tiempo de ejecución se encuentre acotado por un valor límite calculado respecto a un conjunto de variables implicadas (que corresponden a los datos de entrada) a procesar, donde dicho valor límite se calcula mediante una expresión polinómica. Esto se traduce en que estos algoritmos deben ser aquellos que solucionen “problemas tratables” o “fácilmente computables” según lo determinado en lo que se conoce como la tesis de Cobham-Edmonds. Es en esa línea que surge la competición de factorización RSA, abierta desde el 18 de marzo de 1991, que busca fomentar la investigación en torno a la factorización de números enteros grandes en sus respectivos factores primos, su teoría matemática y computacional, y sus implicaciones. Esta competencia propone un



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

conjunto de desafíos que consisten en la factorización eficiente de números enteros grandes propuestos en un listado, de diferentes tamaños, conocidos como números RSA, donde por ejemplo el número más grande a factorizar en la competencia se conoce como RSA-2048, consistiendo en un número de 617 dígitos, y de un tamaño de 2048 bits. El presente trabajo se enmarca en el estudio criptoanalítico del algoritmo RSA, teniendo como enfoque los ataques basados en la factorización del módulo bajo el cual se calculan las claves asimétricas (claves pública y privada) del sistema de cifrado. Así entonces, este proyecto parte de un estudio de los algoritmos de factorización de números enteros, con particular enfoque en los algoritmos de propósito especial, su formalismo matemático caracterizado por el estudio de la teoría de números y su costo computacional u orden de complejidad algorítmica. Específicamente se hace un recorrido respecto a los algoritmos de factorización conocidos como: división por tentativa, de Pollard,  $-1$  de Pollard,  $+1$  de Williams, método de factorización de Fermat y método de factorización de Euler, considerando las implicaciones teóricas de estos algoritmos como lo son el estudio de los números primos, la divisibilidad, el Teorema Fundamental de la Aritmética, las relaciones de congruencia y las congruencias lineales, los números B-lisos (o B-suaves), la función de Dickman para estimar la proporción de números B-lisos, los números de Cunningham y las secuencias de Lucas. Luego se establece la relación entre la descomposición en factores primos y la viabilidad de vulnerar el criptosistema RSA considerando la estructura de este, la convergencia de los algoritmos y su tiempo de ejecución. A su vez, comprende una implementación de los algoritmos estudiados, buscando un balance entre el trabajo teórico y el trabajo práctico o aplicado, permitiendo así una evaluación de los algoritmos y a su vez de su factibilidad como método criptoanalítico para el algoritmo RSA.

### **Uso de redes complejas para análisis de una red vial: caso de aplicación, el centro de la ciudad de Armenia, Quindío**

Felipe Mayorga

Universidad del Quindío

[felipe.mayorgal@uqvirtual.edu.co](mailto:felipe.mayorgal@uqvirtual.edu.co)

Monica Jhoana Mesa Mazo

Universidad del Quindío

El crecimiento desordenado de la infraestructura vial en ciudades intermedias como Ar-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

menia, Quindío, ha generado problemas graves de movilidad, congestión vehicular y falta de sincronización en los semáforos. La zona centro, comprendida entre la Carrera 13 y la Carrera 23, y entre la Calle 8 y la Calle 37, enfrenta una alta concentración de actividades comerciales y administrativas, lo que provoca picos de tráfico y dificulta la movilidad. Ante esta problemática, la presente investigación busca responder la pregunta: ¿Cómo simular la dinámica del flujo vehicular en la zona centro de Armenia? La simulación de tráfico permite identificar puntos críticos y proponer mejoras en la infraestructura y los sistemas de semaforización. Herramientas como SUMO (Simulation of Urban Mobility) facilitan la evaluación de configuraciones semafóricas para reducir tiempos de espera y mejorar la eficiencia vial. Además, este estudio contribuye a la aplicación de redes complejas en el análisis del tráfico urbano, una metodología poco explorada en ciudades intermedias, pero con gran potencial para optimizar la movilidad. La investigación se fundamenta en estudios previos sobre modelado de tráfico y redes complejas, como el análisis de SimCity 4 en Bogotá, que demostró cómo las mejoras en infraestructura pueden reducir la congestión temporalmente, pero incentivar la compra de más vehículos, generando nuevos problemas. También se destaca el estudio de la ciclorruta de Bogotá mediante redes complejas, donde se evidenció una desconexión entre tramos, afectando la movilidad en bicicleta. En Villavicencio, se utilizó VISSIM para modelar el tráfico y evaluar la sincronización semafórica, proponiendo la construcción de una glorieta para mejorar la movilidad en un punto crítico. En Celaya, México, se aplicó la teoría de redes complejas para identificar nodos viales estratégicos y proponer estrategias de optimización. Con base en estos antecedentes, la presente investigación plantea construir una red compleja que represente la malla vial del centro de Armenia, utilizando OSMnx para obtener datos geospaciales y SUMO para simular el tráfico y evaluar distintas configuraciones de semáforos. Los objetivos específicos incluyen modelar la dinámica vehicular con ecuaciones diferenciales y simulaciones computacionales, optimizar la sincronización semafórica y proponer soluciones basadas en datos. La implementación de estas metodologías permitirá a las autoridades locales tomar decisiones informadas para mejorar la movilidad, reducir tiempos de desplazamiento y disminuir la contaminación. Además, este estudio servirá como referencia para otras ciudades intermedias en Colombia y América Latina, promoviendo el uso de modelos basados en redes complejas para la planificación del tráfico urbano. En conclusión, la aplicación de herramientas computacionales avanzadas permitirá analizar patrones de movilidad en Armenia y proponer soluciones innovadoras para optimizar la movilidad en ciudades intermedias, promoviendo un sistema de tráfico más eficiente y sostenible.



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

### Una introducción a códigos cuánticos con el código de cinco Qubits

Henry Cañón Cortés

Universidad Sergio Arboleda

henry.canon01@usa.edu.co

Fernando Díaz Morera

Fitchburg State University

En este póster presentamos una introducción a la teoría de códigos lineales como base para el estudio de los códigos cuánticos. Para ello, exploramos el concepto de qubit, la acción de las matrices de Pauli sobre estos y la construcción de códigos en este paradigma computacional. En particular, analizamos el código de cinco qubits y su capacidad para detectar y corregir errores cuánticos, aprovechando su estructura algebraica.

### Brownian Dynamics of Rigid Bodies in a Viscous Fluid

Irene Maria Esther Erazo Estrada

Tulane University

ierazoestrada@tulane.edu.co

Lisa Fauci

Tulane University

This research focuses on studying the dynamics of small spherical particles immersed in a viscous fluid and subjected to externally applied random forces. We employ two computational approaches. The first involves discretizing the surface of the sphere using the regularized Stokeslet method. The second, in contrast, avoids discretization and instead employs the method of images for regularized Stokeslets. In our model, the particles are assumed to be rigid spheres capable of both translational and rotational motion in response to transient external forces.

### Simulando corredores ecológicos mediante Modelación Basada en Agentes

Isabella Arango Moreno

Pontificia Universidad Javeriana Cali

iarango@javerianacali.edu.co

Laura Salcedo Sepúlveda



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Pontificia Universidad Javeriana Cali

La implementación de corredores ecológicos busca reducir la fragmentación del hábitat, una de las principales amenazas a la biodiversidad global. Al conectar fragmentos de hábitat separados por infraestructura humana, estos corredores permiten el libre movimiento de la fauna, asegurando el acceso a recursos esenciales, la variabilidad genética, y la continuidad de comportamientos migratorios o territoriales [1].

Existen distintas herramientas que se han usado para modelar y simular el comportamiento de diferentes especies en corredores ecológicos. En particular, ecuaciones diferenciales estocásticas para modelar y analizar el movimiento aleatorio de los animales [8] [6], modelación basada en agentes (ABM, por sus siglas en inglés) para estudiar la interacción de los animales con el entorno a través de los corredores [7] [3] y redes neuronales [5].

El presente trabajo tiene como objetivo modificar y adaptar el modelo Paths [4], desarrollado en NetLogo [9], para simular el comportamiento de osos en entornos humanizados. Esta propuesta se fundamenta en el artículo "Making the best possible choice: Using agent-based modelling to inform wildlife management in small communities"[2], el cual emplea la modelación basada en agentes como herramienta para comprender y gestionar las interacciones entre la fauna silvestre en particular, osos negros (*Ursus americanus*) y pequeñas comunidades humanas en contextos rurales.

La propuesta consiste en incorporar al modelo Paths una serie de modificaciones que reflejen el comportamiento observado en dicho estudio. En primer lugar, se añadirá una carretera recta como una línea de repulsión, que representa una barrera percibida por los osos como riesgosa o desagradable, limitando así su movimiento natural. En segundo lugar, las casas serán redefinidas como zonas de alimentación, las cuales contendrán una cantidad limitada de comida que se regenerará en ciclos temporales, simulando la variación estacional en la disponibilidad de recursos (mayor abundancia en primavera/verano, escasez en otoño/invierno).

Los agentes-osos tomarán decisiones guiados por su necesidad de alimento y su aversión a cruzar la carretera, permitiendo observar los patrones de movimiento resultantes. El foco estará en identificar las rutas más utilizadas que implican el cruce de la carretera, para así detectar zonas críticas donde podrían implementarse corredores ecológicos. Además, al ofrecer rutas seguras para cruzar zonas de alto riesgo como carreteras, los corredores contribuyen a reducir los conflictos entre humanos y animales silvestres, como colisiones vehiculares,



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

invasión de propiedades, o riesgos para la seguridad pública.

### **Propuesta Metodológica Multidimensional para la Detección de Textos Generados por Inteligencia Artificial en Español**

Isabella Pacheco Marín

Pontificia Universidad Javeriana Cali

pachec0omarin@gmail.com

Joshua Mendez

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Los modelos generativos de lenguaje han suscitado un creciente interés por su capacidad para producir contenido textual de alta calidad. Sin embargo, estos avances tecnológicos también plantean desafíos importantes, especialmente en el ámbito académico, donde resulta crítico poder distinguir entre textos genuinamente humanos y aquellos generados artificialmente. Estudios recientes, como el de Liang et al. (2023), han demostrado que los detectores existentes presentan sesgos considerables, afectando en particular a autores no nativos del inglés, lo que pone en evidencia la necesidad de soluciones más inclusivas y contextualizadas.

En el presente trabajo se propone una estrategia metodológica orientada a la detección de textos generados por inteligencia artificial en español, fundamentada en un enfoque multidimensional. Este enfoque responde a la complejidad del problema y articula tres perspectivas complementarias: (i) el análisis lingüístico, que permite identificar características estructurales y semánticas distintivas en distintos estilos textuales; (ii) la exploración estadística de atributos computables, que facilita la identificación de patrones discriminativos entre textos humanos e IA; y (iii) el desarrollo de un modelo de clasificación supervisado, diseñado para integrar estos hallazgos en un sistema de decisión robusto y calibrado.

La estrategia se articula en torno a tres bloques: primero, se realiza una caracterización estilística y lingüística de los textos; segundo, se extraen y analizan atributos cuantificables mediante métricas como entropía, coherencia, legibilidad y perplejidad; y tercero, se entrena un modelo computacional que, mediante técnicas como árboles de decisión y regresión isotónica, determina la probabilidad de autoría humana. Esta integración de técnicas permite avanzar hacia un sistema de detección transparente, adaptable y centrado en el contexto hispanohablante. Diversos estudios recientes respaldan esta aproximación: Muñoz-Ortiz, Salinas y Díaz (2023) evidencian diferencias sistemáticas en la morfosintaxis; Georgiou (2024) docu-



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

menta variaciones en la complejidad léxica; y Devitska y Horvat-Choblya (2024) subrayan la variabilidad estructural.

### **Mejores Aproximaciones en Espacios de Hilbert**

John Alejandro Guerrero Guio

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

joaguerrero@udistrital.edu.co

Aura Yorlenny Vargas Ruiz

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

En este poster se presenta una introducción al concepto de Mapeo de Mejor Aproximación (Best Approximation Mapping, BAM), una herramienta recientemente extendida al marco de los espacios de Hilbert. El objetivo principal es ofrecer una visión clara y accesible de este concepto, destacando su relevancia tanto en el estudio teórico de los espacios de Hilbert como en sus diversas aplicaciones prácticas.

El desarrollo del póster se estructura en tres partes principales. En primer lugar, se realiza una revisión breve pero rigurosa de conceptos fundamentales, tales como la definición de espacios de Hilbert y puntos fijos. A continuación, se introduce el concepto de BAM, ilustrándolo con ejemplos concretos que facilitan su comprensión. Además, se exploran algunos tipos específicos de BAM, los cuales permiten establecer conexiones con otras ramas de las matemáticas, como las contracciones de Banach o ciertos tipos de matrices.

Finalmente, se presenta una propiedad clave de los BAM en espacios de Hilbert, la cual permite analizar aspectos relacionados con la convergencia lineal. Todo este estudio se basa en los resultados y teoremas fundamentales expuestos en el artículo Best Approximation Mappings in Hilbert Spaces, el cual sirve como base teórica para este trabajo. Asimismo, este análisis forma parte de nuestro trabajo de grado, donde profundizamos en el estudio y la comprensión de este tema.

Se busca no solo familiarizar al público con el concepto de BAM, sino también destacar su potencial en el análisis funcional y sus posibles aplicaciones en problemas de optimización y aproximación.

### **Propiedades Espectrales de Redes Neuronales: Energía del Grafo y Función de Pérdida**

Juan Diego Naranjo Zapata



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Pontificia Universidad Javeriana – Cali

juand8@javerianacali.edu.co

Daniel Alejandro Posada Noguera

Pontificia Universidad Javeriana – Cali

Este trabajo investiga la relación entre la energía del grafo asociado a una red neuronal y su función de pérdida durante el proceso de entrenamiento. La energía de un grafo, un invariante espectral basado en los valores propios de matrices asociadas, podría proporcionar información sobre la elasticidad y capacidad de generalización de una red neuronal.

El estudio se realiza utilizando el conjunto de datos MNIST, ampliamente empleado en aprendizaje automático. Se entrenan dos redes neuronales completamente conectadas con activaciones ReLU: una red simple de tres capas ocultas (SimpleNN) y una más compleja con cinco capas (AdvancedNN). Ambas usan entropía cruzada como función de pérdida y el optimizador Adam con una tasa de aprendizaje adaptativa.

Para analizar la relación entre la pérdida y la energía del grafo, se definen distintas matrices asociadas a la estructura de la red neuronal: la matriz de adyacencia, la bipartita y la laplaciana. La energía del grafo se calcula como la suma de los valores absolutos de los autovalores de estas matrices. Se emplea regresión lineal y polinómica para modelar la relación entre la energía y la función de pérdida, y se calcula el coeficiente de correlación de Pearson para cuantificar la dependencia.

Los resultados muestran una fuerte correlación entre la energía de la red y la función de pérdida, con valores de  $R^2$  superiores a 0.97 en la representación laplaciana. Esto sugiere que la estructura interna de la red neuronal tiene un impacto significativo en su capacidad de entrenamiento y generalización. Se concluye que la energía de grafos podría ser una métrica útil para caracterizar la dificultad de entrenamiento de un modelo y su sensibilidad a cambios en los datos.

### **Transformadas de Fourier sobre grupos discretos**

Juan Jeronimo Manriquez

Universidad del Rosario

juan.manriquez@urosario.edu.co

Las series de Fourier fueron originalmente introducidas por Joseph Fourier para estudiar



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

el problema de la transferencia del calor. Sin embargo, pronto se descubriría que pueden usadas para estudiar diversos problemas de la física y así convertirse en un área central de las matemáticas contemporáneas.

Las series de Fourier permiten representar una función periódica como una suma infinita de funciones seno y coseno, donde se obtienen los coeficientes de esta por la fórmula de Euler, donde la transformada de Fourier es la aplicación que a cada función le asigna sus coeficientes de Fourier.

Este proceso es lineal e invertible y resulta ser fundamental para analizar múltiples fenómenos físicos como el calor, el sonido, el color y la mecánica cuántica, entre otros.

Particularmente, en este poster se examinará la transformada de Fourier en grupos discretos, conocida en este contexto como la DFT (Siglas en inglés de Discrete Fourier Transform), y su variación más computacionalmente eficiente, la FFT (Fast Fourier Transform).

Esto se hace usando los homomorfismos de los grupos discretos a las raíces de unidad, donde estos son conocidos como caracteres. El conjunto de caracteres de un grupo formara una base ortogonal del espacio de Hilbert, donde estos son las funciones de los elementos del grupo al plano complejo.

A partir de esto se pueden encontrar los coeficientes de Fourier de las funciones que actúan sobre el grupo, donde este análisis a partir de grupos tiene como objetivo demostrar la intuición detrás del algoritmo de DFT.

Particularmente, se busca mostrar que la importancia de la transformada de Fourier emerge de su capacidad de cambiar los ‘dominios’ de los objetos en consideración sin perder información, donde este hecho, además de la linealidad de la transformación, permite manipular dichos objetos y así diseñar o encontrar soluciones a problemas.

### 3.12. Topología

#### La Integral producto en L-grupos.

Andrés Felipe Idárraga Ruiz

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

afidarraga2003@gmail.com

Sergio Andrés Agudelo Benítez



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

Este póster divulga una construcción de una integral producto definida en una clase específica de grupos topológicos no-conmutativos, conocidos como L-grupos. Se presenta un resultado clave que da condiciones suficientes para que una función definida sobre un intervalo  $[a, b]$  y con codominio en el conjunto de los homomorfismos continuos del grupo topológico aditivo de los reales a un L-grupo local sea multiplicativamente integrable.

El trabajo sobre el cual se divulga está basado en la tesis de maestría del Profesor Luis Arturo Polania Quiza.

### **El Teorema del Nervio y sus aplicaciones en problemas de clasificación binaria**

David Leonardo Luengas Fonseca

Universidad del Rosario

david.luengas@urosario.edu.co

El TDA comienza con una nube de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  distribuidos sobre una superficie Riemanniana  $M$  a la cual le podemos calcular sus grupos de homología  $H_n(M)$ . El problema en el cual se centra este trabajo es en encontrar un método para construir un espacio topológico  $X$  basado en estos datos, el cual preserve la información homológica de la superficie subyacente y, a su vez, sea computacionalmente eficiente. El resultado principal que fundamenta las diversas aproximaciones para construir el espacio  $X$  es el Teorema del Nervio. En este trabajo presentaremos una aplicación de este teorema para calcular propiedades topológicas de la frontera de decisión en problemas de clasificación binaria en el contexto del aprendizaje automático de máquina. Este trabajo introduce condiciones sobre la cantidad de muestras mínimas necesarias para reconstruir el complejo simplicial que aproxima las propiedades topológicas de nuestra superficie subyacente. Este resultado es de gran importancia a la hora de evaluar el desempeño de los modelos de aprendizaje automático de máquina que buscan estimar esta frontera.

### **Límites inversos en el cubo de Hilbert**

Jhon Fredy Aguirre García

Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

jhaguirreg@unal.edu.co



**XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas**  
Sociedad Colombiana de Matemáticas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
2 al 6 de junio de 2025  
Pereira, Colombia

---

Estefany Alejandra Trejos Reyes  
Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

El cubo de Hilbert es el producto infinito numerable del intervalo cerrado dotado con la topología producto. Este espacio apareció en los estudios de D. Hilbert sobre dimensiones infinitas en 1904 y ha aportado en la investigación de los límites inversos, los cuales fueron introducidos en 1930. En este trabajo, introduciremos el concepto de límite inverso, exploraremos este objeto como subespacio del cubo de Hilbert y estudiaremos la pregunta: ¿bajo qué condiciones el límite inverso es compacto y conexo?

Nota adicional: Ambos autores estamos interesados en presentar el poster en conjunto, por dicha razón ambos llenaremos el formulario pero la finalidad es exponer en el mismo espacio.

### **Extensiones de los espacios de Hattori**

Juan David Peña Martín  
Universidad Sergio Arboleda  
davpemath@gmail.com  
Margot Salas-Brown  
Universidad de los Andes

Los espacios de Hattori, introducidos por Yasunao Hattori, constituyen una clase de espacios topológicos construidos mediante una topología híbrida que combina la topología euclidiana y la topología de Sorgenfrey sobre  $\mathbb{R}$ . Esta construcción da lugar a una estructura intermedia que conserva y modifica propiedades clave de ambas topologías, permitiendo analizar fenómenos que no emergen en los espacios originales por separado.

El interés principal en estos espacios radica en el estudio de sus propiedades topológicas fundamentales, como la separación, la compacidad y la continuidad de funciones. Se busca establecer comparaciones con las propiedades conocidas en las topologías de origen, desarrollando líneas de análisis.

Uno de los avances más significativos es la posibilidad de introducir una cuasi-métrica compatible sobre los espacios de Hattori, como se detalla en [?]. A diferencia de las métricas tradicionales, la cuasi-métrica no exige simetría, lo que permite modelar estructuras más generales. Esta incorporación amplía el marco de estudio, conectando los espacios de Hattori



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

con teorías métricas y cuasi-métricas y facilitando el análisis de propiedades geométricas y dinámicas, así como la continuidad de funciones en este contexto no simétrico.

La construcción de estos espacios puede extenderse a dimensiones superiores, comenzando por el plano  $\mathbb{R}^2$ . En este caso, se analiza cómo las propiedades híbridas de la topología se trasladan a estructuras bidimensionales, donde la interacción entre las coordenadas introduce nuevas dinámicas topológicas y permite estudiar productos híbridos de topologías no convencionales.

Más aún, se plantea una generalización hacia espacios topológicos arbitrarios. Se busca caracterizar las condiciones que deben satisfacer dos topologías definidas sobre un mismo conjunto para generar una estructura híbrida bien definida. El objetivo es identificar los criterios necesarios para que el espacio resultante herede propiedades clave, como separación, compacidad o cuasi-metrizabilidad, y determinar qué nuevas estructuras emergen al combinar topologías de naturaleza más general.

### **El invariante de la tricolorabilidad bajo los movimientos de Reidemeister**

Juan Esteban Rodríguez Suarez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[juerodriguezs@udistrital.edu.co](mailto:juerodriguezs@udistrital.edu.co)

En la teoría de nudos, se distinguen dos tipos de problemas: los locales, que estudian propiedades específicas de un nudo, y los globales, que analizan el conjunto total de nudos, como su clasificación. Esta última es especialmente compleja debido a la infinidad de nudos posibles. Para abordarla, se utilizan invariantes, como la tricolorabilidad, que se mantienen constantes bajo transformaciones como los movimientos de Reidemeister. Este póster se centra en el estudio de la tricolorabilidad como invariante, explicando conceptos clave y demostrando su invariancia mediante argumentos algebraicos y topológicos.

### **On minimal $n$ -ary open and $\omega$ -closed sets**

Miguel Ángel Fernández De La Cruz

Universidad Sergio Arboleda

[miguel.fernandez01@usa.edu.co](mailto:miguel.fernandez01@usa.edu.co)

Margot Del Valle Salas De Ramos

Universidad de los Andes



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

This work extends fundamental concepts from classical topology to the framework of  $n$ -ary topological spaces. In these spaces, we work with tuples of sets, which we refer to as  $n$ -ary sets. We explore how notions such as minimal open sets and omega-closed sets, and their main properties, can be reformulated for spaces composed of multiple sets, thereby enabling the analysis of topological properties in more complex contexts. To simplify the treatment of the interior and closure, alternative operators are introduced that make both the notation and the associated proofs more manageable. This approach allows many well-known properties from classical topology to be naturally extended to the  $n$ -ary setting.

Minimal  $n$ -ary open sets are  $n$ -ary sets with no empty components, characterized by the condition that any nontrivial  $n$ -ary open subset is either the  $n$ -ary empty set or coincides with the original  $n$ -ary set. We provide a detailed characterization of these sets regarding some particular  $n$ -ary sets. This generalizes earlier results concerning open sets in usual topological spaces. Furthermore, the work introduces and analyzes the concept of  $n$ -ary omega-closed sets, defined through the inclusion of  $n$ -ary closures of  $n$ -ary subsets that consist of countable sets. Consequently, a characterization of  $n$ -ary omega-open sets is also provided, leading to the formation of an  $n$ -ary topology induced by these sets.

The approach presented in this work is part of a growing trend in topology to broaden its scope toward more general frameworks. The results not only confirm that classical topological concepts can be successfully extended to the  $n$ -ary context, but they also open new pathways for exploring topological properties in settings where the structure of the sets is inherently more complex.

### **Sucesión exacta de una fibración y estructuras algebraicas asociadas**

Robinson Duvan Galvis Quiroga

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[hslugom@udistrital.edu.co](mailto:hslugom@udistrital.edu.co)

Hollman Stiven Lugo Mazo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El estudio de estructuras complejas en topología ha evolucionado mediante métodos algebraicos, permitiendo capturar información geométrica a través de la teoría de homotopía. Dentro de estas herramientas se encuentran los grupos topológicos,  $H$ -espacios,  $H$ -grupos,  $H$ -coespacios y espacios fibrados, los cuales facilitan el análisis algebraico de las propiedades



## XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

2 al 6 de junio de 2025

Pereira, Colombia

---

geométricas.

Este trabajo explora la relación entre la estructura de H-espacio y las propiedades de las fibriciones, enfocándose en la sucesión exacta larga asociada a una fibrición. Esta sucesión conecta los grupos de homotopía del espacio base, el espacio total y la fibra, proporcionando una estructura algebraica que ha sido clave en el estudio de objetos como la 3-esfera y la 7-esfera, descritas a través de la fibrición de Hopf.

### **Homología y Torsión en Poliedros: Clasificación a través de Invariantes Algebraicos**

Valentina Martínez González

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[valmartinezg@udistrital.edu.co](mailto:valmartinezg@udistrital.edu.co)

Abordaremos la homología en topología algebraica, utilizando herramientas como los grupos de homología y la característica de Euler para analizar la estructura de los poliedros.