

# Una aproximación al concepto de convergencia uniforme usando GeoGebra

## An approach to the concept of uniform convergence using GeoGebra

Wilson Gordillo-Thiriat y Julio C. Ramos-Fernández

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

**RESUMEN.** Este artículo presenta una introducción al concepto de la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones reales mediante el uso de GeoGebra. Utilizando ejemplos específicos, se ilustra cómo esta herramienta puede facilitar la visualización y comprensión de conceptos abstractos en análisis matemático, destacando su utilidad en el análisis gráfico y numérico. Además, se discuten experimentos que permiten explorar de manera interactiva la relación entre la convergencia puntual y uniforme, mostrando cómo estas herramientas potencian el aprendizaje y la investigación en matemáticas.

**Palabras clave:** convergencia uniforme, GeoGebra, herramientas tecnológicas en educación.

**ABSTRACT.** This article provides an introduction to the concepts of pointwise and uniform convergence of sequences and series of real functions through the use of GeoGebra. Using specific examples, it illustrates how this tool can facilitate the visualization and understanding of abstract concepts in Mathematical Analysis, highlighting its usefulness in graphical and numerical analysis. Additionally, experiments are discussed that allow for interactive exploration of the relationship between pointwise and uniform convergence, demonstrating how these tools enhance learning and research in Mathematics.

**Key words:** uniform convergence, GeoGebra, technological tools in education.

*2020 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 40A30, 97U70, 97U10.*

## 1. Introducción

El concepto de convergencia, tanto puntual como uniforme, es un pilar del análisis matemático con aplicaciones fundamentales en el estudio de tendencias, estabilidad de sistemas y análisis en dominios infinitos. Sin embargo, su naturaleza abstracta presenta un desafío significativo para los estudiantes que se enfrentan a estos temas por primera vez.

El concepto de convergencia uniforme, tal como se conoce hoy en día, fue introducido por Karl Weierstrass en la segunda mitad del siglo XIX. Este concepto surgió para abordar las limitaciones de la convergencia puntual, particularmente en problemas relacionados con la continuidad y la diferenciación de funciones límite. Weierstrass se basó en los avances de matemáticos predecesores como Newton, quien utilizó series infinitas para aproximar raíces y logaritmos; Leibniz, con sus estudios sobre series alternadas; y Cauchy, quien formalizó las primeras definiciones rigurosas de convergencia. También recibió influencia de los trabajos de Bernhard Riemann en series de Fourier. Posteriormente, Henri Lebesgue extendió estas ideas a otros tipos de convergencia, como la convergencia en medida y la convergencia casi en todo punto, mientras que desarrollos posteriores las integraron al análisis funcional en espacios como los de Hilbert y Banach. La evolución histórica de estos conceptos está documentada en textos clásicos como los de Eves (1964) y Struik (1967).

En la era digital actual, herramientas como GeoGebra han demostrado ser recursos valiosos para superar las barreras que plantea la abstracción matemática. GeoGebra, un programa dinámico con múltiples funcionalidades, permite a los estudiantes visualizar y construir conceptos matemáticos de forma interactiva, como destacan Sianipar y Silalahi (2024). Esta herramienta no solo facilita la demostración de conceptos complejos, sino que también enriquece la experiencia de aprendizaje al integrarse en el aula como medio pedagógico. Además, varios estudios recientes han evidenciado la eficacia de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos, como la convergencia de sucesiones, series y funciones. Por ejemplo, Ferreira y Pires (2021) desarrollaron un programa en GeoGebra para analizar gráficamente el Método de Newton, ilustrando cómo este converge mediante procesos iterativos aplicados a diferentes funciones reales. Este enfoque permitió a los estudiantes entender de manera más clara el comportamiento del método y su aplicabilidad. Por otro lado, De Moura y De Oliveira (2016) exploraron cómo el uso de GeoGebra facilita la comprensión de la convergencia de sucesiones en estudiantes de cálculo. A través de actividades diseñadas para clases regulares, los autores implementaron estrategias basadas en la encarnación de conceptos y el uso de software dinámico. Los resultados mostraron que estas actividades ayudaron a los estudiantes a formar imágenes mentales claras sobre la convergencia de sucesiones, lo que fortaleció su comprensión conceptual y estableció bases sólidas para el desarrollo formal de límites y su aplicación en contextos teóricos.

Zuluaga Betancur (2021) también abordó el uso de GeoGebra en un proyecto de aula con estudiantes de grado décimo, centrado en la transformación de funciones. A través de un libro interactivo en GeoGebra, los estudiantes pudieron convertir entre diferentes registros de representación, promoviendo el aprendizaje autónomo y el análisis visual de

funciones. Además, Arceo-Díaz et al. (2020) estudiaron el impacto de GeoGebra para ilustrar algoritmos de búsqueda de raíces, como los métodos de bisección y Newton-Raphson, destacando cómo la herramienta mejoró la comprensión de la convergencia de raíces sucesivas en problemas de ingeniería.

Siguiendo esta línea, el presente artículo explora el uso de GeoGebra para ilustrar el concepto de convergencia puntual y uniforme en sucesiones y series de funciones reales. A través de experimentos gráficos y numéricos, se busca no solo facilitar la comprensión de estos conceptos, sino también resaltar el potencial de GeoGebra como un recurso para el análisis matemático avanzado y la enseñanza interactiva.

## 2. Convergencia puntual de sucesiones de funciones reales con GeoGebra

En esta sección motivamos el estudio de la convergencia puntual de una sucesión de funciones reales usando GeoGebra. Se tiene una sucesión de funciones reales  $\{f_n\}$  con dominio común  $D \subseteq \mathbb{R}$  y se quiere estudiar la convergencia de la sucesión numérica  $\{f_n(x_0)\}$  para cada valor  $x_0 \in D$ . Sea

$$D_c = \{x_0 \in D : \{f_n(x_0)\} \text{ es convergente}\}.$$

Entonces se puede definir una función real  $f : D_c \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la expresión

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

donde  $x \in D_c$  es fija. A esta función  $f$  se le llama el límite puntual de la sucesión  $\{f_n\}$  en  $D_c$  y se suele escribir  $f_n \rightarrow f$  puntualmente en  $D_c$ .

En GeoGebra, es de utilidad el comando

Si( <Condición 1>, <Entonces 1>, <Condición 2>, <Entonces 2>, . . . , <Si no (opcional)> )

para hacer gráficas de funciones definidas a trozos o ramificadas. Por ejemplo, para hacer la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2, \\ -3x + 9, & x > 2, \end{cases}$$

escribimos el comando

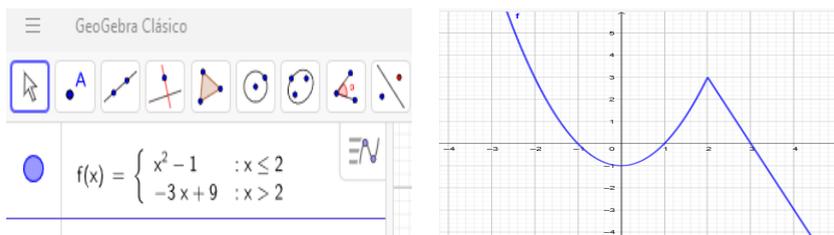
$$f(x) = \text{si}(x \leq 2, x^2 - 1, x > 2, -3x + 9)$$

y se obtiene la siguiente salida en la figura 1:

Ahora ilustramos, con un ejemplo, cómo se podría visualizar la convergencia puntual de una sucesión de funciones usando GeoGebra. Con este fin, consideramos la sucesión  $\{f_n\}$  definida por

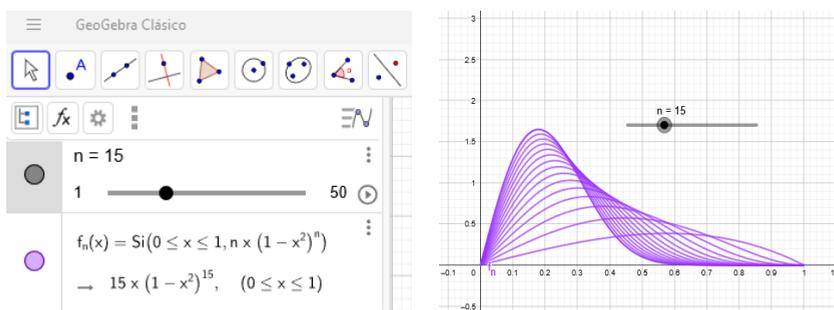
$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$$

con  $x \in [0, 1]$ . Usamos un “deslizador” y el comando “si” para graficar los primeros 15 elementos de la sucesión. Es importante usar entre las propiedades de la gráfica la opción



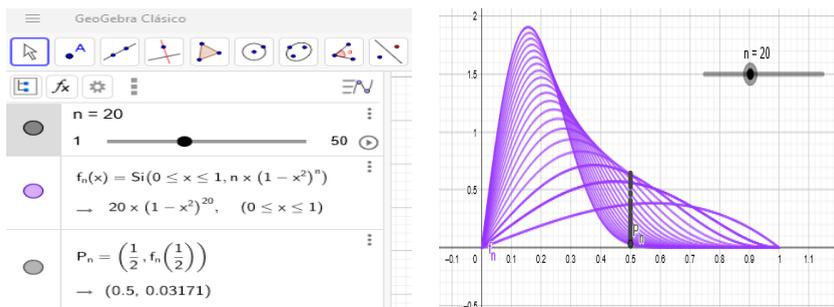
**Figura 1.**  $f(x) = \text{si}(x \leq 2, x^2 - 1, x > 2, -3x + 9)$ .

“mostrar rastro” a fin de que podamos visualizar la evolución de las gráficas tal como se puede ver en la figura 2:



**Figura 2.** Gráfica de una sucesión de funciones en GeoGebra.

A fin de entender el concepto de convergencia puntual, debemos fijar  $x_0 \in [0, 1]$  y analizar la sucesión numérica  $\{f_n(x_0)\}$ . Ciertamente, cuando  $x_0 = 0$  y cuando  $x_0 = 1$  se tiene la sucesión constante igual a cero y, por tanto, se tiene que  $f(0) = f(1) = 0$ . Luego debemos analizar el caso que  $x_0 \in (0, 1)$ . Con este fin, agregamos a la gráfica el punto  $P_{x_0} = (x_0, f_n(x_0))$  y vemos cómo se comporta  $f_n(x_0)$  cuando la  $n$  aumenta: Por ejemplo, con  $x_0 = \frac{1}{2}$  se tiene la siguiente situación:

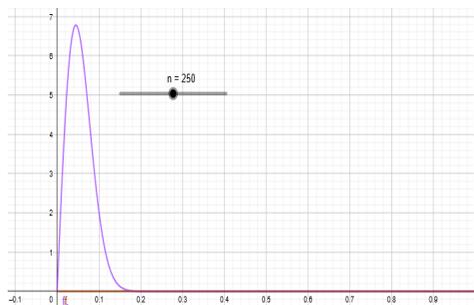


(a) Convergencia de la sucesión en  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

(b) Gráfica de una sucesión numérica  $\{f_n(\frac{1}{2})\}$ .

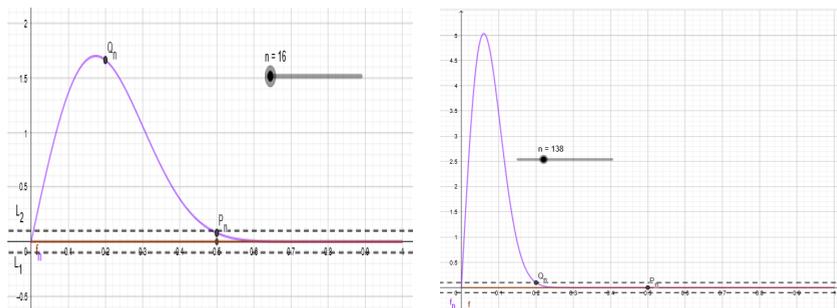
**Figura 3.** Análisis de la convergencia puntual con GeoGebra.

Se observa que  $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$  se “aproxima” a cero cuando  $n$  se hace “grande”; de hecho, si quitamos “mostrar rastro” de las funciones  $f_n$  se puede ver cómo de derecha a izquierda las funciones  $f_n$  con  $n$  grande se van aproximando a la función nula en el dominio  $[0, 1]$ ; pero ciertamente mientras más “cercano” está  $x_0$  del valor cero, se necesitan muchas más iteraciones para que  $f_n(x_0)$  esté cercano al valor 0:



**Figura 4.** Gráfica de la función  $f_{250}$  con GeoGebra.

Por ejemplo, si ponemos  $\varepsilon = 0,1$ , vemos que para  $x_0 = 0,5$  se requiere al menos  $N = 16$  iteraciones para que  $f_n(0,5)$  entre a la banda  $L \pm \varepsilon$ ; mientras que para  $x_0 = 0,2$  se necesitarán  $N = 138$  iteraciones para  $f_n(0,2)$  ingrese a la misma banda:



**Figura 5.** Dependencia del  $N$  en  $x_0$ .

Esto deja en evidencia que ciertamente el valor de  $N$  en la definición de convergencia depende del  $\varepsilon > 0$  dado y también del punto  $x_0$  donde se está estudiando la convergencia puntual.

Es importante destacar que el experimento numérico es útil para visualizar el comportamiento de la sucesión; pero para mostrar que en efecto se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$$

para cualquier  $x_0 \in [0, 1]$ , se debe usar un argumento analítico. En este caso, usamos el hecho que la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nR^n$$

con  $R \in (0, 1)$  es convergente ya que el término general de esta serie es  $a_n = nR^n$  y se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)R^{n+1}}{nR^n} = R < 1.$$

Luego, el criterio del término  $n$ -ésimo implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nR^n = 0$$

siempre que  $R \in (0, 1)$ . En particular, si fijamos  $x_0 \in (0, 1)$  y definimos  $R = 1 - x_0^2$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_0(1 - x_0^2)^n = x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} nR^n = 0$$

y esto muestra que en efecto, el límite es la función nula tal y como se sugiere en el experimento numérico.

### 3. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones con GeoGebra

En esta sección analizamos cómo podemos usar las herramientas de GeoGebra para entender el concepto de convergencia uniforme de una sucesión de funciones reales. Como antes, se tiene una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  con dominio común  $D$  y se quiere ver la existencia de una función  $y = f(x)$  definida en  $D$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  los elementos de la sucesión se “meten” en la banda  $f(x) \pm \varepsilon$  a partir de un cierto índice  $N$ . Esto es, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implica que:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

para todo  $x \in D$ . Matemáticamente hablando esto significa que:

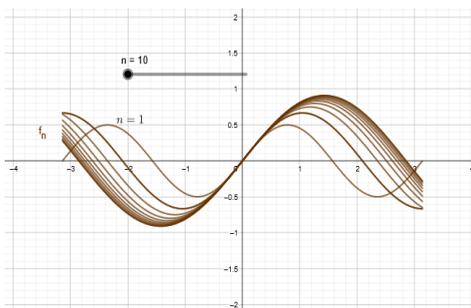
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

y se escribe  $f_n \xrightarrow{u} f$  en  $D$ . En particular, la convergencia uniforme en  $D$  implica la convergencia puntual en  $D$  así que la función límite en la definición de la convergencia uniforme es la misma función límite puntual.

Ilustramos este concepto con el siguiente ejemplo en GeoGebra: Consideramos la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas por:

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1} \operatorname{sen} \left( \frac{n+1}{n} x \right)$$

con  $x \in [-\pi, \pi]$ . La gráfica de los 10 primeros términos de esta sucesión es:



**Figura 6.** Gráfica de las funciones  $f_n(x)$  con GeoGebra.

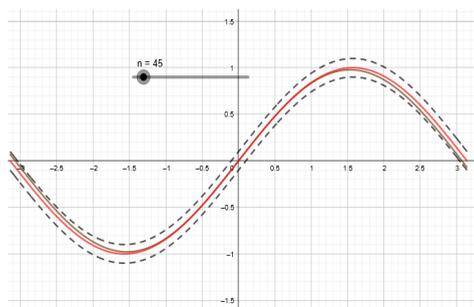
En vista que la función seno es continua y dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

entonces la función límite puntual es  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Es decir, para  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  fijo, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \text{sen}\left(\frac{n+1}{n}x_0\right) = \text{sen}(x_0) = f(x_0).$$

Ahora, usando GeoGebra, “vemos” que los elementos de la sucesión se meten en la banda  $f(x) \pm \varepsilon$  a partir de un cierto índice  $N$ . De hecho, se tiene que para  $\varepsilon = 0,1$  se necesitan alrededor de  $N = 45$  iteraciones para que  $f_N$  esté en la banda ya mencionada tal como se puede ver en la siguiente gráfica (figura 7).



**Figura 7.** Interpretación geométrica de la convergencia uniforme en GeoGebra.

Esto hace pensar que en efecto la convergencia en este caso es uniforme; pero para establecer este hecho hay que argumentar matemáticamente. En este caso, usando herramientas

del cálculo elemental, vemos que para cualquier  $x \in [-\pi, \pi]$  se cumple:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n}{n+1} \operatorname{sen} \left( \frac{n+1}{n} x \right) - \operatorname{sen}(x) \right| \\ &\leq \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n+1}{n} x \right) - \operatorname{sen}(x) \right| + \frac{1}{n+1} \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n+1}{n} x \right) \right| \\ &= 2 \left| \cos \left( \frac{2n+1}{2n} x \right) \right| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2n} x \right) \right| + \frac{1}{n+1} \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n+1}{n} x \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} |x| + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} = 0$$

y la convergencia es uniforme en  $[-\pi, \pi]$  tal como se pudo visualizar en el experimento numérico.

Adicionalmente, en este ejemplo se pudo visualizar el siguiente resultado, el cual básicamente es una consecuencia de la definición de convergencia uniforme (véase Bartle y Sherbert (2000) [2]):

**Teorema 1.** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones que convergen puntualmente a la función  $y = f(x)$  en el dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Se cumple que  $f_n \xrightarrow{u} f$  en  $D$  si y sólo si existe una sucesión numérica  $\{a_n\}$  tal que  $a_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

para todo  $x \in D$ .

En particular, la definición y este último teorema nos dice que en la convergencia uniforme en un dominio  $D$ , el valor de  $N$  no depende del  $x_0 \in D$  lo cual no parece ser el caso en el ejemplo de la sección anterior. En efecto, si suponemos que la sucesión

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n$$

converge uniformemente a la sucesión nula en  $[0, 1]$ , entonces para  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  podemos encontrar  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x)| = nx(1-x^2)^n < \frac{1}{4}$$

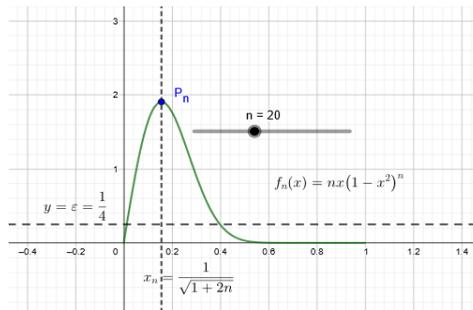
para todo  $x \in [0, 1]$  y para todo  $n \geq N$ . Pero

$$f'_n(x) = n(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

lo que nos dice que el máximo de  $f_n$  ocurre cuando  $x_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$  y el valor máximo de  $f_n$  es

$$f_n(x_n) = \frac{n}{\sqrt{1+2n}} \left( 1 - \frac{1}{1+2n} \right)^n.$$

Gráficamente, se tiene una situación como la siguiente:



**Figura 8.** Ocurrencia del máximo de  $f_n(x)$ .

En particular, numéricamente parece que se cumple:

$$f_n(x_n) > \frac{1}{4}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  lo cual daría una contradicción y demostraría que la convergencia de esta sucesión de funciones no es uniforme en  $[0, 1]$ ; pero este hecho no es claro y se debe demostrar de otra manera: quizás por inducción. En este caso, usando cálculo elemental, se puede ver que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+2n}} \left(\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^{2n+1}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^{-1/2} = +\infty; \end{aligned}$$

así que por definición de límite, eventualmente,  $f_n(x_n) > \frac{1}{4}$  para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $n \geq N$  lo que demuestra formalmente, con herramientas de cálculo, que la convergencia no es uniforme en  $[0, 1]$ .

Otra manera de ver que esta convergencia no es uniforme en este dominio es usando el siguiente criterio con integración el cual puede ser consultado en el libro de Bartle y Sherbert (2000) [2]:

**Teorema 2.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones que convergen puntualmente a la función  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Si la convergencia es uniforme en  $[a, b]$  y cada  $f_n$  es Riemann integrable en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es Riemann integrable en  $[a, b]$  y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

De hecho, el contrareciproco del resultado anterior dice que si una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones integrables en  $[a, b]$  converge a una función  $y = f(x)$  que es integrable en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Entonces la convergencia NO es uniforme en  $[a, b]$ .

En nuestro ejemplo, cada  $f_n$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$  pues se tratan de funciones continuas y además, se tiene:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2n+2}$$

con lo cual

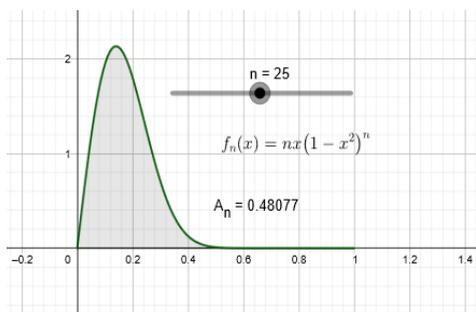
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

y la convergencia no es uniforme en  $[0, 1]$ , según el teorema 2.

En GeoGebra, podemos usar el comando:

*Integral( <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo> )*

y obtenemos:



**Figura 9.** Interpretación geométrica de la integral con GeoGebra.

con lo cual se puede ver la convergencia de

$$A_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$$

al valor  $L = \frac{1}{2} = 0,5 \neq 0$ .

#### 4. Analizando series de funciones con GeoGebra

Una serie de funciones en un dominio  $\subseteq \mathbb{R}$  consiste de un par de sucesiones de funciones  $(\{f_n\}, \{S_n\})$  relacionadas por la expresión recursiva:

$$\begin{cases} S_1(x) = f_1(x), \\ S_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) + S_n(x), \end{cases}$$

para todo  $x \in D$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $\{S_n\}$  se llama sumas parciales y se tiene que:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

para todo  $x \in D$ . La serie se dice convergente en  $D$  si la sucesión de funciones  $\{S_n\}$  es convergente en  $D$  y en este caso, la función límite  $S(x)$  se llama la suma de la serie y se escribe:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x),$$

con  $x \in D$ . También se suele escribir  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  para denotar la serie de las funciones  $f_n(x)$ .

Se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente a la función  $S(x)$  en  $D$  si la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  converge uniformemente a  $S(x)$  en  $D$ . Adicional a los resultados mencionados en los teoremas 1 y 2, para el estudio de la convergencia uniforme, es de ayuda los siguientes criterios (véase Marsden y Hoffman (1993) [6]):

1. **Criterio de la continuidad.** Si  $\{S_n\}$  es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a  $S(x)$  en  $D$ , entonces  $S(x)$  es continua en  $D$ .
2. **Criterio  $M$  de Weierstrass.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas en  $D \subseteq \mathbb{R}$  y supongamos que existe una sucesión numérica  $\{M_n\}$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

para todo  $x \in D$ . Si la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  es convergente, entonces la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente a la función  $S(x)$  en  $D$ .

Veamos cómo podríamos analizar estos conceptos con la ayuda de GeoGebra. Consideramos la sucesión  $\{f_n\}$  definida por:

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-(2n+1)x}$$

con  $x > 0$  y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . En este caso, tenemos la serie:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x}$$

con  $x > 0$ . Los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de esta serie son:

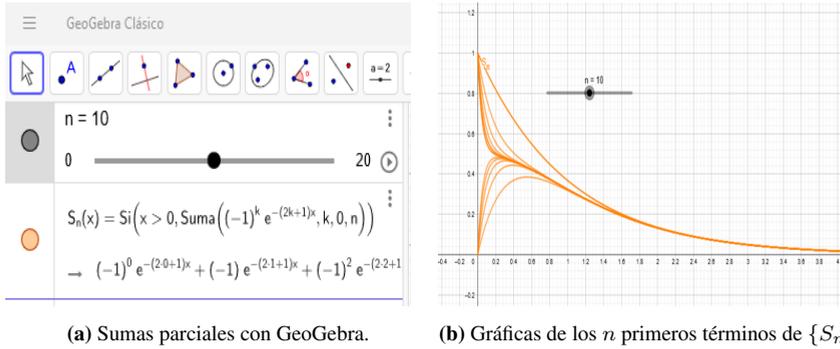


Figura 10. Graficando sucesiones de sumas parciales con GeoGebra.

Revisando de derecha a izquierda el gráfico a la derecha se vislumbra que esta serie es convergente. De hecho, usando series geométricas, se obtiene que:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

pues al ser  $x > 0$ , entonces  $r = -e^{-2x}$  satisface que  $|r| < 1$  y podemos usar la suma geométrica. Poniendo un  $\varepsilon = 0,1$ , tenemos un gráfico como el siguiente:

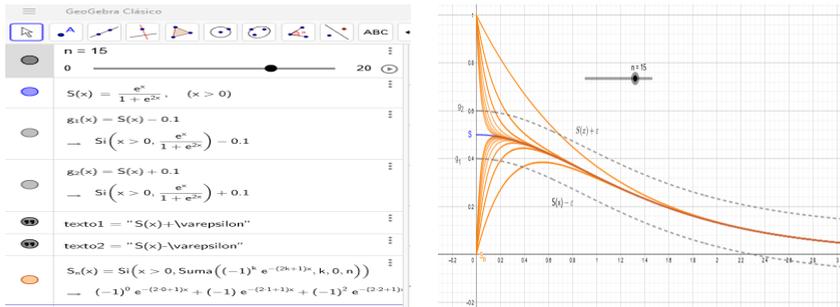


Figura 11. Analizando la convergencia uniforme de series con GeoGebra.

La forma alternante a la derecha de  $x = 0$  nos hace pensar que esta convergencia no es uniforme y que para ver esto basta hacer un argumento por contradicción con cualquier  $\varepsilon > 0$  más pequeño que 0,5 que es la distancia de  $S_n(0^+)$  a  $S(0^+)$ . En efecto, para  $x > 0$  se tiene que:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)x} = e^{-x} \sum_{k=0}^n (-e^{-2x})^k = e^{-x} \frac{1 - (-e^{-2x})^{n+1}}{1 + e^{-2x}}$$

Luego, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |S_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} e^{-2x(n+1)} = \frac{1}{2}$$

De aquí que por definición de límite (poniendo  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ ), para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos encontrar  $x_n > 0$  tal que:

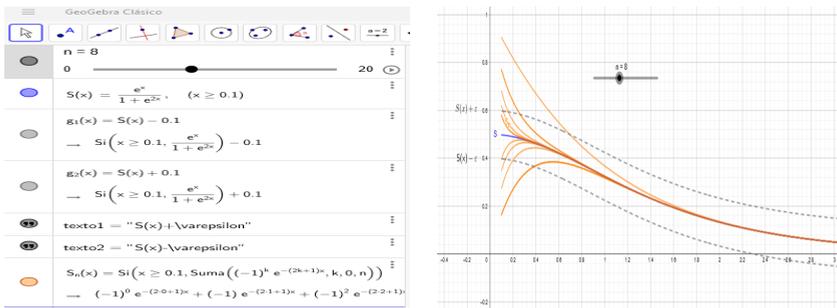
$$|S_n(x_n) - f(x_n)| > \frac{1}{4}.$$

Esto dice que la convergencia no es uniforme en  $(0, \infty)$  porque para  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  debería existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$|S_N(x) - f(x)| < \frac{1}{4}$$

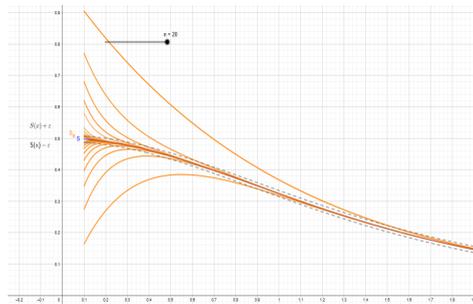
para todo  $x > 0$ , contradiciendo lo anterior.

Ahora bien, si consideramos la misma serie; pero restringimos el dominio al conjunto  $[\frac{1}{10}, \infty)$ , entonces para  $\varepsilon = 0,1$ , se observa que  $S_n(x)$  se mete en la banda  $S(x) \pm \varepsilon$  después de  $n = 8$  iteraciones, tal como se puede ver en la siguiente imagen:



**Figura 12.** Analizando la convergencia uniforme de series con GeoGebra.

Mientras que para  $\varepsilon = 0,01$  se necesitan al menos  $n = 20$  iteraciones para que  $S_n(x)$  ingrese a la banda  $S(x) \pm \varepsilon$  tal como se puede ver en la siguiente gráfica:



**Figura 13.** La convergencia uniforme depende del dominio.

El hecho que podamos encerrar los elementos de la sucesión  $\{S_n(x)\}$  en la banda  $S(x) \pm \varepsilon$  a partir de cierto valor de  $n$ , nos hace pensar que en este caso, la convergencia si es uniforme. De hecho, en este caso, se tiene que:

$$|f_n(x)| = \left| (-1)^n e^{-(2n+1)x} \right| = e^{-x} e^{-2nx} \leq e^{-1} e^{-2n} := M_n$$

para todo  $x \geq 1$  y como la serie numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1} e^{-2n} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2})^n = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} < \infty,$$

es convergente, el criterio  $M$  de Weierstrass nos dice que ciertamente esta serie de funciones converge uniformemente a  $S(x)$  en el dominio  $[\frac{1}{10}, \infty)$ . Todavía más, el argumento anterior demuestra que si fijamos  $r > 0$ , entonces  $\{S_n(x)\}$  converge uniformemente a  $S(x)$  en el dominio  $[r, \infty)$  por lo que el teorema integral de la convergencia uniforme implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_r^{\infty} S_n(x) dx = \int_r^{\infty} S(x) dx$$

para cualquier  $r > 0$ . Esto es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-(2k+1)r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_r^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)x} dx = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(e^r)$$

para todo  $r > 0$ . Con lo cual, haciendo  $r$  tender a cero por la derecha, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4};$$

tal como se puede ver en la siguiente gráfica:

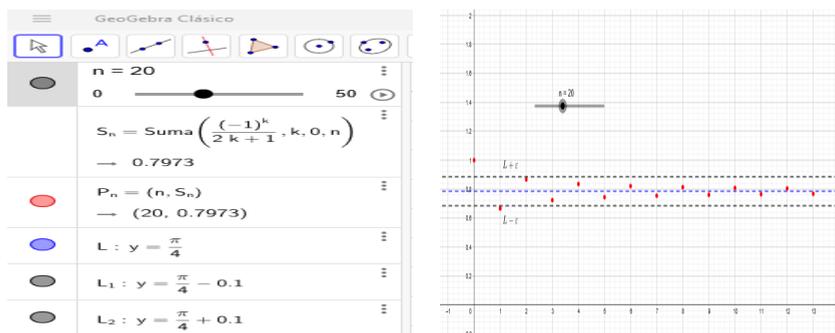


Figura 14. Aplicaciones a las series numéricas.

Esto culmina el ejemplo.

## 5. Conclusiones y recomendaciones

En el desarrollo de este trabajo se puede evidenciar las siguientes conclusiones:

- GeoGebra se establece como una herramienta eficaz para enseñar conceptos abstractos como la convergencia uniforme y puntual, al permitir una visualización clara e interactiva.

- La interacción gráfica con deslizadores y comandos facilita el análisis dinámico de funciones y series, haciendo más accesible el entendimiento para estudiantes y profesionales.
- Aunque las visualizaciones ayudan a intuir los resultados, el análisis matemático formal sigue siendo esencial para validar los resultados obtenidos.
- Se sugiere explorar aplicaciones similares de GeoGebra en otros temas del análisis matemático, como la continuidad uniforme o la diferenciación de funciones de sucesiones.

### Referencias

- [1] S. Arceo-Díaz, E. B. Barrios, J. A. Maravillas and J. Salazar-Torres, *GeoGebra as learning tool for the search of the roots of functions in numerical methods*, Journal of Physics: Conference Series **1672**, No. 1 (2020), p. 012001.
- [2] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, Vol. 2*, New York: Wiley, 2000.
- [3] D. S. S. De Moura Fonseca and R. H. De Oliveira Lino Franchi, *Exploring the convergence of sequences in the embodied world using GeoGebra*, Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, **35**, No. 2 (2016), 88-101.
- [4] H. W. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [5] O. P. Ferreira and D. A. Pires, *Newton's Method with GeoGebra*, arXiv preprint arXiv:2107.04453, 2021.
- [6] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Elementary classical Analysis*, Macmillan 1993.
- [7] J. A. Mendez, and F. Y. R. Loor, *Use of GeoGebra for teaching quadratic equation*, Revista Minerva: Multidisciplinaria de Investigación Científica, **5**, No. 13 (2024), 79-88.
- [8] H. F. Sianipar and T. Silalahi, *Utilization of GeoGebra in Mathematics Learning*, International Conference Of Digital Sciences And Engineering Technology, **1**, No. 1 (2024), 128-133.
- [9] D. J. Struik, *A concise history of Mathematics, (Vol. 255)*, Courier Corporation, 1967.
- [10] A. M. Zuluaga Betancur, *Proyecto de aula mediado por GeoGebra para la enseñanza de las transformaciones de funciones*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, (2021). Repositorio Institucional UNAL. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79708>.

WILSON GORDILLO-THIRIART  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
BOGOTÁ, COLOMBIA  
e-mail: wgordillot@udistrital.edu.co

JULIO C. RAMOS-FERNÁNDEZ  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
BOGOTÁ, COLOMBIA  
e-mail: jcramosf@udistrital.edu.co