

Un problema de Riemann para un p -sistema con flujo no lipschitziano

LEONARDO RENDÓN*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. The Riemann problem for a system having a singularity at the origin is considered. The problem is first locally solved when the initial data do not include the origin. The solution in that case involves the three types of elementary waves: constant states, shock waves and rarefaction waves. Finally, the case of initial data at the origin is dealt with.

Keywords and phrases. Riemann problem, singularity, constant states, shock waves, rarefaction waves.

1991 AMS Subject Classification. Primary 35C05 Secondary 30E25

RESUMEN. Estudiamos el problema de Riemann para un p -sistema que tiene una singularidad en el origen. Inicialmente encontramos soluciones locales cuando el dato inicial esta alejado del origen. Las soluciones están dadas por estados constantes, ondas de choque y ondas de rarefacción. Finalmente, estudiamos el caso cuando el dato inicial está en el origen.

*Parcialmente apoyado por el CINDEC 803538.

1. Introducción

El problema de Riemann para sistemas 2×2 con flujo suave se desarrolla ampliamente en diversos textos, por ejemplo en [7]. En este artículo divulgativo adaptamos estas técnicas a un sistema 2×2 en el que el flujo presenta una singularidad en el origen.

Para una comprensión del texto se necesitan algunos conceptos básicos del lenguaje de las ecuaciones diferenciales, los cuales se encuentran en la bibliografía. Al mencionar un concepto hacemos referencia al ítem de la bibliografía en donde puede ser consultado y ampliado.

2. Problema de Riemann

Estudiaremos en este artículo el siguiente problema:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t - \sigma(v)_x &= 0 \\ v_t - u_x &= 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) &= \begin{cases} U_\ell = (u_\ell, v_\ell) & x < 0 \\ U_r = (u_r, v_r) & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

con $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\sigma(v) = v^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $v > 0$.

3. Preliminares

En forma matricial el problema se puede escribir como

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

con $U = (u(x, t), v(x, t))$ y $F(u, v) = (-v^\gamma, -u)$. La matriz del sistema es

$$\nabla F(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma v^{\gamma-1} \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -\gamma^{1/2} v^{(\gamma-1)/2}$, $\lambda_2 = \gamma^{1/2} v^{(\gamma-1)/2}$; y sus vectores propios asociados son

$$r_1 = \left(-\gamma^{1/2} v^{(\gamma-1)/2}, 1 \right), \quad r_2 = \left(\gamma^{1/2} v^{(\gamma-1)/2}, 1 \right),$$

respectivamente. Como

$$(2) \quad \lambda_1(U) < \lambda_2(U) \quad \forall U \in R \times R^+$$

el sistema es estrictamente hiperbólico ([4]).

Además el campo $r_i(U)$ satisface

$$(3) \quad \nabla \lambda_i(U) \cdot r_i(U) \neq 0 \quad i = 1, 2,$$

por lo tanto el sistema es genuinamente no lineal ([4]).

Una solución para el sistema (1) es una función $U(x, t)$ medible tal que U y $F(U)$ estén en $L^1_{\text{loc}}(R \times (0, \infty), R^2)$ y

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ U \frac{\partial \xi}{\partial t} + F(U) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^\infty U_0 \xi(x, 0) dx = 0,$$

para todo $\xi \in C_0^1(R \times [0, \infty))$.

Mostraremos que cuando U_ℓ y U_r están en R^2 , $v > 0$, tenemos soluciones formadas por estados constantes, separados por ondas de choque u ondas de rarefacción. Definamos estos conceptos:

- i) Estados constantes son soluciones de la forma $U(x, t) = \text{constante}$, que son claramente soluciones clásicas del sistema.
- ii) Una onda de choque es una solución $U(x(t), t)$ que es constante e igual a U_ℓ para $x < x(t)$, $t > 0$ y constante e igual a U_r para $x > x(t)$, $t > 0$ con $x(t)$ diferenciable.

Según [4], $x(t)$ es una recta que sale de $(0, 0)$ y cuya velocidad s (inverso de la inclinación) satisface la relación de Rankine-Hugoniot

$$(4) \quad s[U_\ell - U_r] = [F(U_\ell) - F(U_r)],$$

o en la notación usual $s[U] = [F(U)]$. Continuando con [4] trabajaremos con dos tipos de choques admisibles.

Un 1-choque si

$$(5) \quad s < \lambda_1(U_\ell); \quad \lambda_1(U_r) < s < \lambda_2(U_r).$$

Un 2-choque si

$$(6) \quad \lambda_1(U_\ell) < s < \lambda_2(U_\ell); \quad \lambda_2(U_r) < s.$$

Por (2), estas relaciones pueden ser escritas así

$$(7) \quad -\gamma^{1/2} v_r^{(\gamma-1)/2} < s < -\gamma^{1/2} v_\ell^{(\gamma-1)/2} \quad (1\text{-choque})$$

$$(8) \quad \gamma^{1/2} v_r^{(\gamma-1)/2} < s < \gamma^{1/2} v_\ell^{(\gamma-1)/2} \quad (2\text{-choque}).$$

iii) Una onda de rarefacción es una solución de (1) de la forma

$$U(x, t) = h\left(\frac{x}{t}\right) = \left(u\left(\frac{x}{t}\right), v\left(\frac{x}{t}\right)\right),$$

donde $h: R \rightarrow R^2$ es diferenciable.

Reemplazando en (1) obtenemos la siguiente ecuación para h

$$(\nabla F - \xi I) \frac{dh}{d\xi} = 0, \quad \text{con} \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

Así $dh/d\xi$ es un vector propio de ∇F asociado al valor propio ξ .

Luego tenemos dos familias de ondas de rarefacción correspondientes a λ_1, λ_2 . La función h es una i -rarefacción si satisface la condición adicional de que $\lambda_i(h(\xi))$ crece cuando ξ crece.

4. Solución del problema

Comencemos estudiando el problema de encontrar estados (u, v) que pueden ser conectados a la derecha con U_ℓ por un 1-choque.

Los posibles estados U deben satisfacer (4). Así tenemos:

$$(9) \quad \begin{aligned} s(u_\ell - u) &= -(v_\ell^\gamma - v^\gamma) \\ s(v_\ell - v) &= -(u_\ell - u). \end{aligned}$$

Eliminando s

$$(10) \quad u - u_\ell = \pm \sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)}.$$

Determinemos el signo en (10). Por (7) vemos que $v_\ell > v$. De (5) se ve también que $s < 0$. Concluyendo entonces, de (9), que $u < u_\ell$ y, por lo tanto, el signo en (10) es negativo.

El conjunto de estados que pueden ser conectados con U_ℓ , a la derecha, por un 1-choque está dado por

$$S_1(U_\ell) = \{(u, v) : u - u_\ell = -\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)}; v_\ell > v\}.$$

Toda recta que pasa por U_ℓ intersecta el conjunto $S_1(U_\ell)$ a lo máximo en un punto, pues, suponiendo (u, v) tal que

$$\begin{aligned} u - u_\ell &= -\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)} \quad v_\ell > v, \\ u_\ell + t(\xi, n) &= (u, v); \quad (\xi, n) \in \mathbb{R}^2, \quad t \neq 0, \end{aligned}$$

vemos que

$$(v_\ell + t\eta)^\gamma = \frac{v_\ell^\gamma - \xi^2}{\eta^2}.$$

Si tal número t existe, es único por el teorema de Rolle.

Ahora observando que

$$\frac{d}{dv} \left(-\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)} \right) = \frac{v_\ell - v}{2} \sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)} \left(\gamma v^{\gamma-1} + \frac{v_\ell^\gamma - v^\gamma}{v_\ell - v} \right) > 0,$$

pues $v_\ell > v$ y

$$\frac{d^2}{dv^2} \left[-\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)} \right] < 0.$$

En la figura 1 representamos al conjunto $S_1(U_\ell)$ y a la respectiva solución del problema de Riemann.

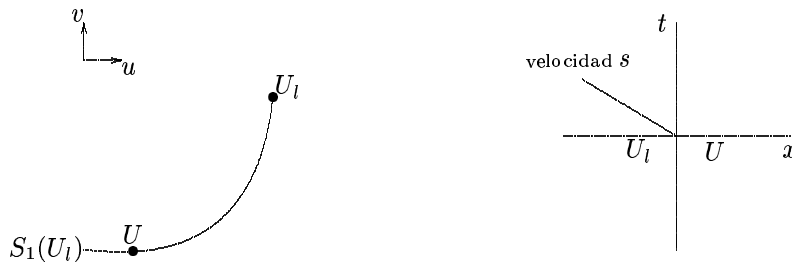


Figura 1

donde s está dado por (4).

Haciendo un análisis semejante para el caso de un 2-choque tenemos: los estados (u, v) que pueden ser conectados a la derecha con U_ℓ por un 2-choque están dados por:

$$S_2(U_\ell) = \{(u, v) : u - u_\ell = -\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)}, v_\ell < v\}.$$

También tenemos

$$\frac{d}{dv} \left(-\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)} \right) < 0,$$

luego toda recta que pasa por U_ℓ intersecta a $S_2(U_\ell)$ a lo sumo en un punto. Así, en la figura 2 representamos el conjunto $S_2(U_\ell)$ y a la respectiva solución del problema de Riemann.



Figura 2

Consideremos ahora el caso de una 1-rarefacción. Si $U(x, t) = h(\xi)$, donde $\xi = x/t$, tenemos

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \gamma v^{\gamma-1} \\ -1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du/d\xi \\ dv/d\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto,

$$\left(\frac{dv}{d\xi} \right) / \left(\frac{du}{d\xi} \right) = -\frac{1}{\lambda_1(u, v)} = \gamma^{-1/2} v^{(1-\gamma)/2}.$$

Luego

$$(11) \quad \frac{dv}{du} = \gamma^{-1/2} v^{(1-\gamma)/2},$$

y

$$u - u_\ell = \int_{v_\ell}^v \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy.$$

Como $\lambda_1(u_\ell, v_\ell) < \lambda_1(u, v)$, tenemos que $v_\ell < v$. Así, el conjunto

$$R_1(U_\ell) = \{(u, v) : u - u_\ell = \int_{v_\ell}^v \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy; v > v_\ell\}$$

representa a los estados (u, v) que pueden ser conectados con U_ℓ a la derecha, separados por ondas de 1-rarefacción. Es inmediato que

$$\frac{d}{dv} \left(\int_{v_\ell}^v \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy \right) > 0, \quad \frac{d^2}{dv^2} \left(\int_{v_\ell}^v \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy \right) < 0.$$

En la figura 3 representamos al conjunto $R_1(U_\ell)$ y a la respectiva solución del problema de Riemann.

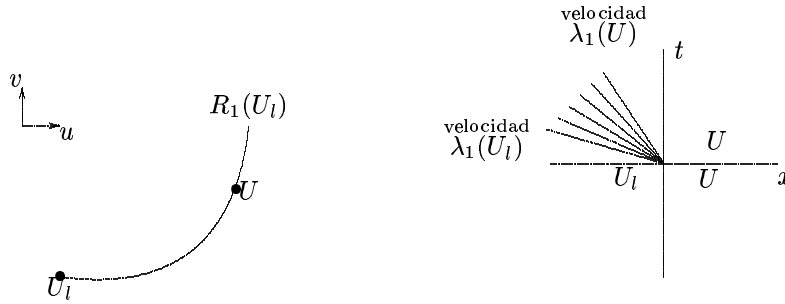


Figura 3

La solución es suave en la faja acotada por las semirectas con velocidad $\lambda_1(U_\ell)$, $\lambda_1(U)$.

Si $\lambda_1(U_\ell) < \frac{x}{t} < \lambda_1(U)$, obtenemos $U(x, t) = h\left(\frac{x}{t}\right)$ notando que

$$\frac{x}{t} = \lambda_1\left(h\left(\frac{x}{t}\right)\right) = -\gamma^{1/2} v^{(\gamma-1)/2} \left(\frac{x}{t}\right),$$

encontramos $v(x/t)$, y usando (11) tenemos $u(x/t)$.

El caso de 2-rarefacción está dado por

$$R_2(U_\ell) = \{(u, v) : u - u_\ell = \int_{v_\ell}^v \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy, v < v_\ell\}.$$

En la figura 4 representamos el conjunto $R_2(U_\ell)$ y la respectiva solución del problema de Riemann.

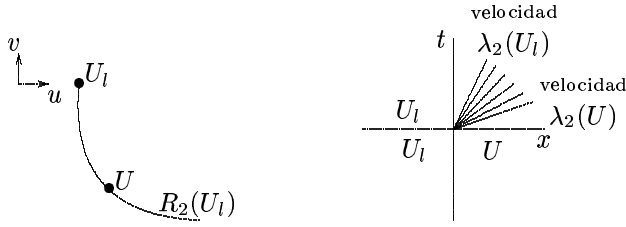


Figura 4

Las curvas de los conjuntos $S_1(U_\ell)$, $R_1(U_\ell)$ y $S_2(U_\ell)$, $R_2(U_\ell)$ presentan contacto de segundo orden en U_ℓ , respectivamente, esto es, sus derivadas hasta el orden dos son iguales. De hecho, en S_1 tenemos que

$$\frac{du}{dv} = \frac{v_\ell - v}{-\sqrt{(v_\ell^\gamma - v^\gamma)(v_\ell - v)}} \left\{ \gamma v^{\gamma-1} + \frac{v_\ell^\gamma - v^\gamma}{v_\ell - v} \right\}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow v_\ell^-} \frac{du}{dv} &= \lim_{v \rightarrow v_\ell^-} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_\ell - v}{v_\ell^\gamma - v^\gamma}} \left\{ \gamma v^{\gamma-1} + \frac{v_\ell^\gamma - v^\gamma}{v_\ell - v} \right\} \\ &= \left(\gamma u_\ell^{\gamma-1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En R_1 tenemos que

$$\lim_{v \rightarrow v_\ell^-} \frac{du}{dv} = \left(\gamma u_\ell^{\gamma-1} \right)^{1/2}.$$

Analogamente se verifica en los otros casos.

Tenemos así en una vecindad de U_ℓ una división en cuatro regiones disyuntas, como muestra la figura 5.

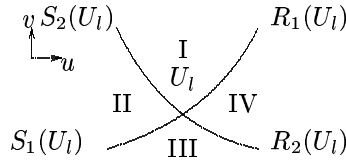


Figura 5

Regresando al problema de Riemann general (1), fijemos U_ℓ y dejemos U_r variando. Si U_r pertenece a las curvas S_1, S_2, R_1, R_2 el problema ya fué solucionado en los comentarios anteriores.

Cuando U_r pertenece a alguna de las regiones I, II, III, o IV, procedemos como sigue. Dado $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{v} > 0$ definamos los conjuntos $S_1(\bar{U}), S_2(\bar{U}), R_1(\bar{U}), R_2(\bar{U})$, como anteriormente, y $W_i(\bar{U}) = S_i(\bar{U}) \cup R_i(\bar{U}) \quad i = 1, 2$.

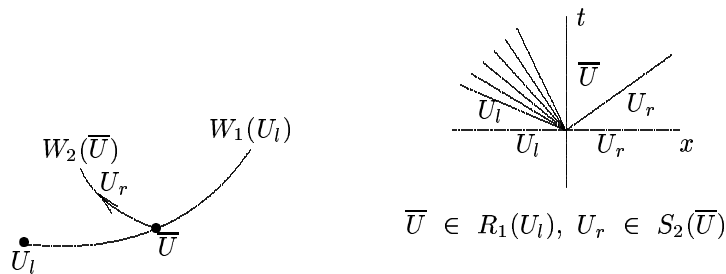
Consideremos ahora la familia:

$$\mathcal{F} = \{W_2(\bar{U}) : \bar{U} \in W_1(U_\ell)\}.$$

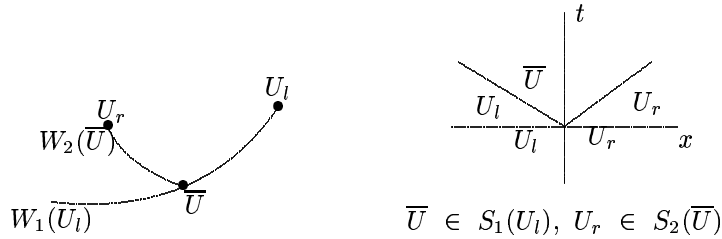
Demostremos que cada punto U_r en una vecindad de U_ℓ contenida en \mathbb{R}^2 , $v > 0$, pertenece a un único miembro de la familia de curvas \mathcal{F} .

Con eso, el problema de Riemann (1) resulta unívocamente determinado. La figura 6 muestra las diferentes posibilidades para U_r y la solución del problema de Riemann correspondiente.

a) U_r en la región I



b) U_r en la región II



c) U_r en la región III

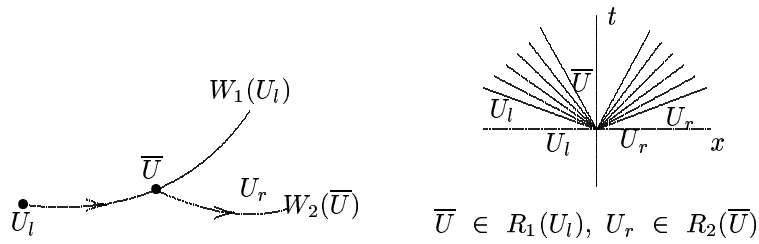
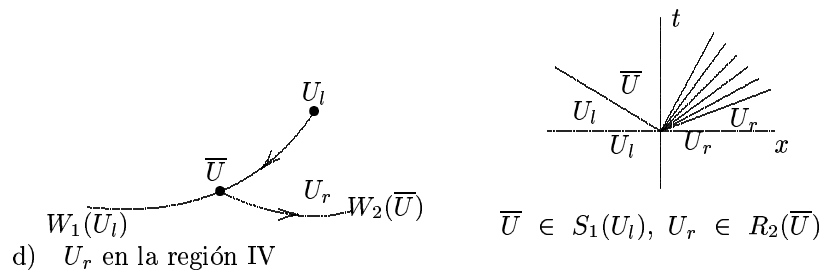


Figura 6

Veamos ahora que todo punto en una vecindad de U_ℓ pertenece a un único miembro de la familia de curvas \mathcal{F} .

Supongamos que U_r pertenece a la región I. La recta horizontal $v = v_r$ intersecta $W_1(U_\ell)$ en $A = (u_0, v_r)$ y $W_2(U_\ell)$ en B . Ver la figura 7.

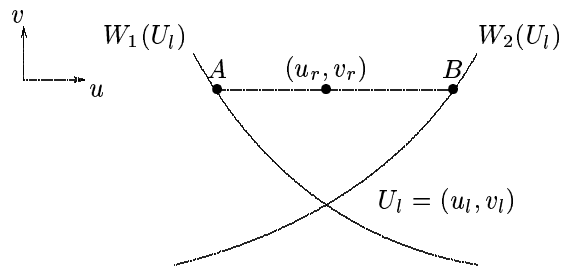


Figura 7

Consideremos la subfamilia de la familia \mathcal{F} definida por $\{W_2(U) : v_\ell \leq v \leq v_r\}$, la cual induce una función $\varphi: \text{Arco } AU_\ell \rightarrow \overline{AB}$. Esta función es continua, ya que cada curva $S_2(U)$, $v_\ell < v < v_r$, tiene tangente positiva.

Como $\varphi(A) = A$ e $\varphi(U_\ell) = B$, por el teorema del valor intermedio existe (\bar{u}, \bar{v}) en el Arco AU_ℓ tal que $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = (u_r, v_r)$. Ver la figura 8.

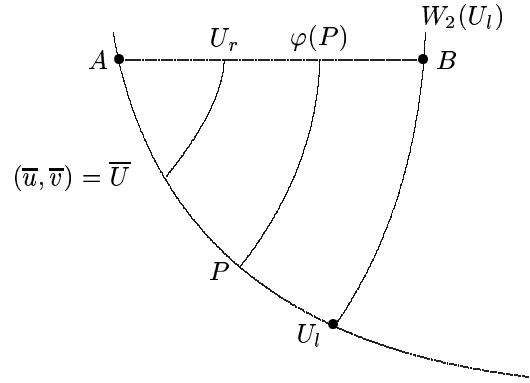


Figura 8

Veamos que (\bar{u}, \bar{v}) es único. En $R_1(U_\ell)$ tenemos que

$$\bar{u} - u_\ell = \int_{v_\ell}^{\bar{v}} \gamma^{1/2} y^{(\gamma-1)/2} dy,$$

y en $S_2(\bar{U})$

$$\bar{u} - u = \sqrt{(\bar{v}^\gamma - v_r^\gamma)(\bar{v} - v_r)} \quad \bar{v} < v_r.$$

Con eso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{v}} - \frac{\bar{v} - v_r}{2\sqrt{(\bar{v}^\gamma - v_r^\gamma)(\bar{v} - v_r)}} \left[\gamma \bar{v}^{\gamma-1} + \frac{\bar{v}^\gamma - v_r^\gamma}{\bar{v} - v_r} \right] \\ &= \gamma^{1/2} \frac{\bar{v}^{\gamma-1}}{\bar{v}^{\gamma/2}} - \frac{\bar{v} - v_r}{2\sqrt{(\bar{v}^\gamma - v_r^\gamma)(\bar{v} - v_r)}} \left[\gamma \bar{v}^{\gamma-1} + \frac{\bar{v}^\gamma - v_r^\gamma}{\bar{v} - v_r} \right] > 0, \end{aligned}$$

ya que $\bar{v} < v_r$, con lo cual queda demostrada la unicidad.

Las otras situaciones son tratadas de forma análoga.

Discutiremos finalmente el caso límite cuando $U_\ell = (0, 0)$. Comenzamos analizando la condición de Rankine-Hugoniot:

$$\begin{cases} -su = v^\gamma \\ -vs = u. \end{cases}$$

Eliminado s , tenemos $u = \pm v^{(\gamma+1)/2}$, $v > 0$; por (5) y (6) vemos que los estados que pueden ser conectados con U_ℓ a la derecha por un choque admisible están dados por:

$$S_2(U_\ell) = \{(u, v) : u = -v^{(\gamma+1)/2}, v > 0\},$$

puesto que (6) garantiza que $s > 0$.

En la figura 9 representamos al conjunto $S_2(U_L)$ y a la respectiva solución del problema de Riemann.

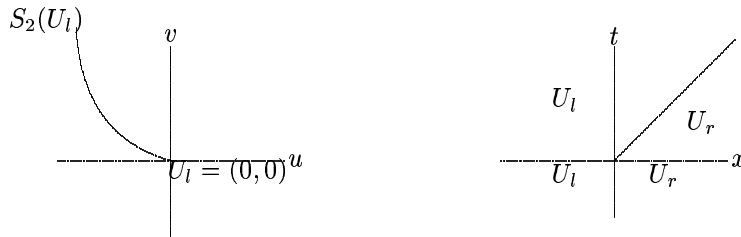


Figura 9

Discutamos ahora el caso de ondas de i -rarefacción. Por lo que vimos anteriormente, los estados que pueden ser conectados con U_ℓ a la derecha, separados por i -rarefacción, están dados por:

$$R_1(U_\ell) = \{(u, v) : u = \frac{2\gamma^{1/2}}{\gamma+1}v^{(\gamma+1)/2}, v > 0\}.$$

En la figura 10 representamos al conjunto $R_1(U_\ell)$ y a la respectiva solución del problema de Riemann.

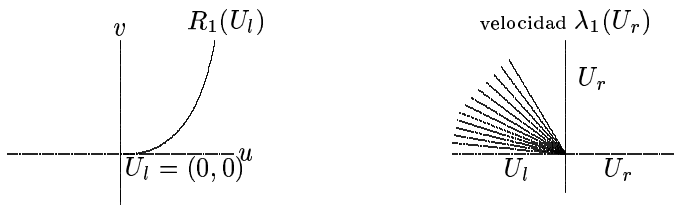


Figura 10

Así tenemos el semiplano dividido em tres regiones disyuntas. Ver la figura 11.

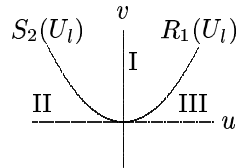


Figura 11

Como anteriormente, en la región I el problema de Riemann está unívocamente determinado por la familia

$$\mathcal{F} = \{S_2(\bar{U}) : \bar{U} \in R_1(U_l)\}.$$

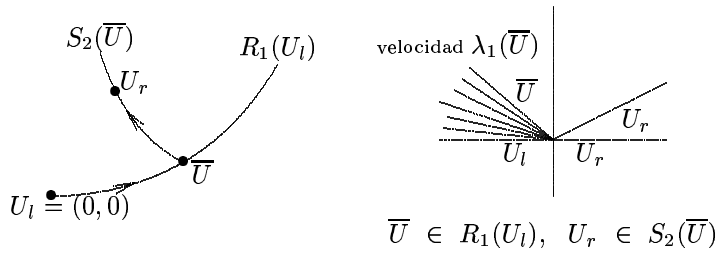


Figura 12

Si U_r pertenece a la región III, definimos

$$\mathcal{F} = \{R_2(\bar{U}) : \bar{U} \in R_1(U_\ell)\},$$

donde

$$R_2(\bar{U}) = \left\{ (u, v) : u - \bar{u} = \frac{2\gamma^{1/2}}{\gamma + 1} \left[\bar{v}^{(\gamma+1)/2} - v^{(\gamma+1)/2} \right]; \bar{v} > v \right\}.$$

U_r pertenece a una única curva de la familia \mathcal{F} ,

$$U_r = (u_r, v_r) \in R_2 \left(\frac{\gamma^{1/2}}{\gamma + 1} v_r^{(\gamma+1)/2} + \frac{u_r}{2}, \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma^{1/2}} \left(\frac{\gamma^{1/2}}{\gamma + 1} v_r^{(\gamma+1)/2} + \frac{u_r}{2} \right) \right]^{2/(\gamma+1)} \right).$$

La figura 13 muestre la solución del problema de Riemann.

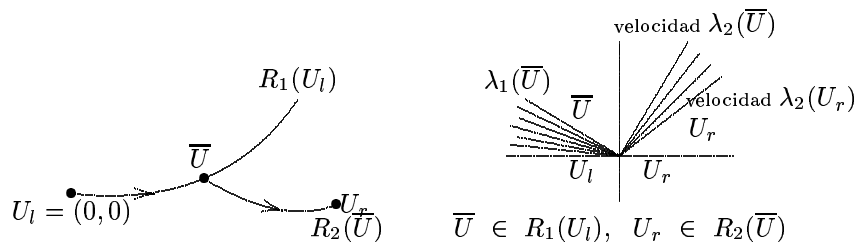


Figura 13

Si U_r pertenece a la región II no tenemos solución al problema de Riemann, ya que ninguna estado $\bar{U} \in S_2(U_\ell)$ puede conectarse a U_r .

Referencias

- [1]. Di Perna, R.J. *Convergence of Approximate Solutions to Conservation Laws*, Arch. Rat. Mech. 82 (1983), 27-70..
- [2]. Frid, H. *Compacidade Compensada e Leis de Conservação*..
- [3]. Greenberg, J.M. *The Cauchy problem for the quasi-linear wave equations*, Notices Amer. Math. Soc. Vol. 19, No 5, Abstract No 696-35-1..
- [4]. Lax, P. *Shock waves and entropy*. In: *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, edited by E. Zarantonello, Academic Press: New York, 1971, 603-634..
- [5]. Lax, P. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws (II)*, Comm. Pure Appl. Math. 10, 537-566 (1957)..

- [6]. Rendón, L. *Sobre um p-sistema com Singularidade não-Lipschitz, Tese de Doutorado.* Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1996..
- [7]. Smoller, J. *Shock waves and Reaction-Diffusion Equations,* Springer-Verlag New York Inc., 1983..

Recibido en febrero de 1998

LEONARDO RENDÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA

e-mail: lrendon@ciencias.ciencias.unal.edu.co