

Aplicación de bases de Gröbner en el problema de alcanzabilidad de estados de sistemas de eventos discretos modelados por redes de Petri

Application of Gröbner bases to the problem of reachability of states of discrete-event systems modeled by Petri nets

Guelvis Mata¹, Abdul Lugo² y Germalis Rojas¹

¹Universidad de los Andes

² Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre

RESUMEN. El centro de este trabajo es un enfoque alternativo para el problema de alcanzabilidad de estados en los sistemas de eventos discretos, fundamentado en la teoría de bases de Gröbner. En efecto, en este artículo expresamos procedimientos de bases de Gröbner dirigidos bajo la consideración de monomiales para representar marcaciones, transiciones y dinámica en una red de Petri reinicializable, con el objetivo de resolver el problema de alcanzabilidad de estados. Más precisamente, dado un estado inicial y otro estado arbitrario representados como productos de potencias, y dada una red de Petri representada como un conjunto de polinomios en varias variables, la alcanzabilidad del estado arbitrario desde el estado inicial es una congruencia módulo un ideal polinomial.

Palabras clave: sistemas de eventos discretos, redes de Petri, bases de Gröbner, alcanzabilidad de estados.

ABSTRACT. The focus of this work is an alternative approach to the problem of reachability of states in discrete-event systems, based on the theory of Gröbner bases. Indeed, in this article we express procedures of Gröbner bases routed under the consideration of monomials to represent markings, transitions and dynamics in a reversible Petri net, in order to solve the problem of reachability of states. More precisely, given an initial state and other arbitrary state, represented as products of powers, and given a Petri net represented as a set of polynomials in multiple variables, the reachability of the arbitrary state from the initial state is a congruence modulus a polynomial ideal.

Key words: discrete event systems, Petri nets, Gröbner bases, reachability of states.

1. Introducción

Los *sistemas de eventos discretos* (SED) constituyen una clase de sistemas dinámicos cuyos comportamientos (dinámicas) corresponden a leyes generadas por el hombre (contrarias a las leyes físicas), pero en algún sentido dependientes de variables continuas. Aquí, los cambios de estados se producen por la ocurrencia de eventos (acciones), y en consecuencia, la dinámica de los SED está constituida por sucesiones finitas de eventos o, equivalentemente, por sucesiones finitas de estados. Por ejemplo, los sistemas logísticos, industriales, de manufactura, de tráfico aéreo, de comunicación, etc., son SED.

En la literatura podemos encontrar diferentes modelos para representar los SED, entre los cuales están incluidos las redes de Petri (RP) [2, 6, 7, 8], los autómatas, procesos recursivos finitos, máquinas de Turing, de Mealy [5], etc. Todos ellos, de una u otra manera son propuestos para dar respuesta oportuna y eficaz a diversos problemas propios de los SED, tales como la alcanzabilidad de estados, el bloqueo o estancamiento, la persistencia, el sobreflujo de capacidad, etc. Por lo tanto, es necesario que los modelos usados para representar SED sean funcionales y permitan el análisis formal, cuyo objetivo es la verificación de propiedades mediante el análisis automático: enfoque algorítmico para construir herramientas de software.

En este artículo es tratado el problema de la alcanzabilidad de estados en SED: dado un estado inicial (estado en el cual comienza a evolucionar el sistema), ¿es algún otro estado arbitrario alcanzable desde dicho estado inicial? Este problema tiene solución automática usando un par de técnicas conocidas como *árbol de alcanzabilidad* y *enfoque matricial*, construidas desde la propia estructura de una RP [8]; sin embargo, el objetivo de este trabajo es proponer un enfoque alternativo fundamentado en la teoría de bases de *Gröbner* [1, 3, 4, 10]: procedimientos de bases de Gröbner dirigidos bajo la consideración de monomiales para representar marcaciones, transiciones y dinámica pueden ser aplicados a una RP reinicializable para resolver el problema de alcanzabilidad de estados. Más precisamente, dados un estado inicial y otro estado arbitrario representados como productos de potencias, y dada una RP representada como un conjunto de polinomios en varias variables, la alcanzabilidad del estado arbitrario desde el estado inicial es una congruencia módulo un ideal polinomial.

Contenido del artículo:

- En la sección 2 daremos las definiciones básicas de la teoría de redes de Petri y estableceremos la dinámica de su evolución, para finalmente expresar la alcanzabilidad como la reiniciabilidad en las RP.
- En la sección 3 incluiremos los conceptos básicos de las bases de Gröbner, necesarios para el desarrollo del trabajo, junto con el algoritmo de Buchberger para la determinación de las mismas.
- Finalmente, en la sección 4 se incluyen las relaciones más estrictas entre las RP y las bases de Gröbner, con lo cual se expresa que la alcanzabilidad es determinada usando bases de Gröbner.

2. Redes de Petri

Las redes de Petri fueron propuestas por CARL PETRI en la década de los años sesenta. Esta es una herramienta matemática de modelado gráfico aplicable a los sistemas de eventos discretos. Gráficamente, pueden ser utilizadas para dar información dinámica del sistema.

Una *red de Petri* es una 4-tupla $\mathcal{R} = (L, T, E, S)$, donde $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ es un conjunto finito de lugares, $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ es un conjunto finito de transiciones, con $L \cap T = \emptyset$. Además, $E : T \rightarrow L^\infty$ es una función de entrada: para cada $t_j \in T$, $E(t_j) \in L^\infty$ es llamado *paquete de entrada* a t_j (L^∞ denota el multiconjunto con número de ocurrencias ilimitado). Y finalmente, $S : T \rightarrow L^\infty$ es una función de salida: para cada $t_j \in S$, $S(t_j) \in L^\infty$ es llamado *paquete de salida* de t_j .

Por su parte, una *red de Petri marcada* es un par $M = (\mathcal{R}, m)$, donde $\mathcal{R} = (L, T, E, S)$ es una red de Petri, y $m : L \rightarrow \mathbb{N}$ es una función de marcación, con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: para cada $l_i \in L$, $m(l_i) \in \mathbb{N}$ será llamado *número de fichas en el lugar* l_i .

Las marcaciones representan el estado actual del sistema que establece las condiciones lógicas para la ocurrencia de eventos. Finalmente, una vez que ocurra un evento, las condiciones del sistema variarán para dar lugar a una nueva marcación o estado.

Las marcaciones en una red de Petri marcada $M = (\mathcal{R}, m)$ pueden ser definidas como un n -vector, es decir, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ con $n = |L|$. Ambas definiciones están relacionadas por $m(l_i) = m_i$; m toma valores en $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$, el cual es numerable.

La representación gráfica de las redes de Petri marcadas se hace mediante grafos dirigidos bipartitos, donde los lugares son representados por círculos y las transiciones son representadas por barras. Si un lugar l_i es un lugar de entrada a una transición t_j ; es decir, $l_i \in E(t_j)$, entonces hay $\#(l_i, E(t_j))$ arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra. Si el lugar l_i es un lugar de salida de la transición t_j ; es decir, $l_i \in S(t_j)$, entonces hay $\#(l_i, S(t_j))$ arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Las fichas son representadas por puntos en los círculos y la función de marcación es representada por el número de puntos en cada círculo o lugar.

La dinámica de una red de Petri determina las reglas de habilitación y disparo de las transiciones, lo cual da paso a nuevas marcaciones para la ocurrencia de nuevos eventos en el sistema. Más precisamente, una transición $t_j \in T$ en una red de Petri marcada $M = (\mathcal{R}, m)$ es llamada *habilitada* en m , si $m(l_i) \geq \#(l_i, E(t_j))$, para todo lugar $l_i \in L$. En este caso también diremos que la transición t_j es habilitada por la marcación m .

El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación m es dado por $\mathcal{E}(m) = \{t_j \in T : m(l_i) \geq \#(l_i, E(t_j)), \forall l_i \in L\}$; luego, ello define una función $\mathcal{E} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathcal{P}(T) = 2^T$, donde $n = |L|$.

Ahora, dada $M = (\mathcal{R}, m)$ una red de Petri marcada, y siendo $t_j \in \mathcal{E}(m)$, la marcación m' dada por $m'(l_i) = m(l_i) - \#(l_i, E(t_j)) + \#(l_i, S(t_j))$, con $i = 1, \dots, |L|$, es llamada *marcación alcanzable* desde m por el disparo de t_j .

Para ilustrar los conceptos arriba expuestos, consideremos la siguiente red de Petri marcada $M = (\mathcal{R}, m)$ con marcación inicial $m = (2, 0, 0)$; aquí, $\mathcal{E}(m) = \{t_1\}$, tal como se muestra en la figura 1.

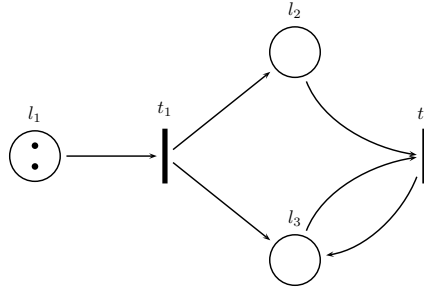


Figura 1. Una RP marcada, con $m = (2, 0, 0)$ y $\mathcal{E}(m) = \{t_1\}$.

Al disparar t_1 se tiene $m' = (1, 1, 1)$, como podemos visualizar en la figura 2. De donde, $\mathcal{E}(m') = \{t_1, t_2\}$.

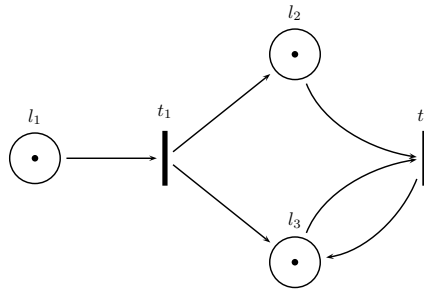


Figura 2. La marcación resultante del disparo de t_1 en la figura 1.

Ahora disparamos t_2 a partir de m' , para obtener $m'' = (1, 0, 1)$; tal como se muestra en la figura 3, con lo cual $\mathcal{E}(m'') = \{t_1\}$.

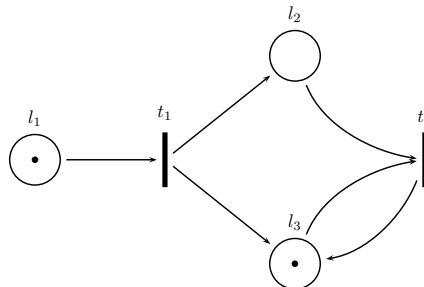


Figura 3. La marcación resultante del disparo de t_2 en la figura 2.

En fin, dada $\mathcal{R} = (L, T, E, S)$ una red de Petri, la función parcial de cambio de marcaciones $\delta : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$, con $n = |L|$, es definida por $\delta(m, t_j) = m'$, donde $m'(l_i) = m(l_i) - \#(l_i, E(t_j)) + \#(l_i, S(t_j))$, para $i = 1, \dots, n$.

Dicha función está definida en $(m, t_j) \in \mathbb{N}^n \times T$ si, y solo si, t_j es permitida en la marcación m , es decir, $t_j \in \mathcal{E}(m)$.

La función parcial de cambio de marcación puede ser generalizada mediante $\widehat{\delta} : \mathbb{N}^n \times T^* \rightarrow \mathbb{N}^n$, definida como $\widehat{\delta}(m, \theta) = m$ y $\widehat{\delta}(m, \sigma t) = \delta(\widehat{\delta}(m, \sigma), t)$, con $m \in \mathbb{N}^n$, $t \in T$, donde $\sigma \in T^*$, y T^* denota el monoide con unidad θ [5]. Como $\widehat{\delta}$ es una extensión de δ , no haremos distinción entre ambas.

La alcanzabilidad es la principal propiedad dinámica en las redes de Petri y puede ser establecida como sigue: dada una red de Petri marcada $M = (\mathcal{R}, m_0)$ y una marcación $m \in \mathbb{N}^n$; $n = |L|$, ¿es alcanzable m desde m_0 ? Formalmente, dada $M = (\mathcal{R}, m_0)$ una red de Petri marcada, una marcación $m \in \mathbb{N}^n$ es llamada *alcanzable* desde m_0 si existe una sucesión de disparos de transiciones $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k} \in T^*$ tal que $\delta(m_0, \sigma) = m$.

El conjunto de alcanzabilidad de la red de Petri desde la marcación m_0 es dado por $A(\mathcal{R}, m_0) = \{m \in \mathbb{N}^n : \exists \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}$.

Por otro lado, una red de Petri marcada $M = (\mathcal{R}, m_0)$ es llamada *reinicializable* si para toda marcación $m \in A(\mathcal{R}, m_0)$ se tiene que $m_0 \in A(\mathcal{R}, m)$.

Finalmente, referimos al lector a [8] para la consideración de las técnicas de análisis en RP: árbol de alcanzabilidad y ecuaciones matriciales.

3. Bases de Gröbner

Las bases de Gröbner fueron propuestas en 1965 por BRUNO BUCHBERGER, quien en 1965 planteó un algoritmo para su cálculo. La teoría de bases de Gröbner es una herramienta fundamental en el álgebra computacional. En esta sección daremos una definición formal de estas, y las herramientas necesarias para su cálculo.

Sea $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de indeterminadas. Un *monomio* es un elemento de la forma $\mathbf{p} = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$, con i_j enteros no negativos; denotaremos por \mathfrak{M} al conjunto de todos los monomios en A .

El *grado monomial* de \mathbf{p} es la suma de sus exponentes y lo denotaremos por $gr(\mathbf{p})$, esto es, $gr(\mathbf{p}) = i_1 + i_2 + \dots + i_n$.

Si \prec es una relación de *orden* en \mathfrak{M} , diremos que \prec es una relación de *orden admisible* sobre \mathfrak{M} si es compatible con la multiplicación de monomios, esto es, si para $m, n, p \in \mathfrak{M}$:

- se tiene que $m \prec n$ ó $n \prec m$ ó $m = n$ (*tricotomía*);
- si $m \prec n$ y $n \prec p$, entonces $m \prec p$ (*transitividad*);
- $1 \prec m$ para todo monomio $m \neq 1$ (*elemento mínimo*);
- si $m \prec n$, entonces $pm \prec pn$ para cualquier monomio p (*compatibilidad con el producto*).

Dados $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ y $n = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, daremos algunos ejemplos de órdenes admisibles:

1. Orden lexicográfico. Definimos el orden lexicográfico en \mathfrak{M} como

$$m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} = n,$$

para $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha_i < \beta_i$ para algún i ; es decir, se tiene que $m \prec n$ si para cada indeterminada con exponente diferente en m y n , el exponente menor se encuentra en m . En el caso de dos o más indeterminadas es importante especificar el orden entre las indeterminadas. Por ejemplo, si $x \prec y$, entonces

$$1 \prec x \prec x^2 \prec x^3 \prec \cdots \prec y \prec xy \prec x^2y \prec \cdots \prec y^2 \prec \cdots$$

Este orden es denotado como *lex*. Note que para este orden, x^μ es siempre más grande que y^β , para todo $\mu, \beta \in \mathbb{N}$.

2. Orden lexicográfico en grados. Definimos el orden lexicográfico en grados en \mathfrak{M} como

$$m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} = n,$$

donde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, si

$$gr(m) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = gr(n).$$

Cuando $gr(m) = gr(n)$, entonces $m \prec_{lex} n$. Para el caso del anillo de polinomios $K[x, y]$ con $x \prec y$, tenemos

$$1 \prec x \prec y \prec x^2 \prec xy \prec y^2 \prec x^3 \prec x^2y \prec xy^2 \prec y^3 \prec \cdots$$

Denotaremos este orden como *grlex*.

3. Orden lexicográfico reverso en grados. Definimos el orden lexicográfico reverso en grados en \mathfrak{M} como

$$m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} = n,$$

para $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

Si $gr(m) < gr(n)$, ó si $gr(m) = gr(n)$ y $\alpha_i > \beta_i$ para algún i ; es decir, $m \prec n$ si $gr(m) < gr(n)$ ó si $gr(m) = gr(n)$ y en la última indeterminada con exponente diferente en m y n , el exponente mayor está en m . Por ejemplo, para el caso de tres indeterminadas se tiene $x_1x_2^3 \prec x_1^2x_2x_3$, con $x_1 \prec x_2 \prec x_3$. Denotaremos este orden como *grlexrev*.

Por ejemplo, sea $\{x, y, z\}$ un conjunto de indeterminadas. Fijemos el siguiente orden entre las indeterminadas: $x \prec y \prec z$. Consideremos los siguientes monomios en $\{x, y, z\}$: $p = x^3yz^3$, $q = x^2y^3z^2$, $r = x^2y^2z$ y $t = x^3z^2$;

- si el orden es *lex*, entonces $r \prec_{lex} q$ y $t \prec_{lex} p$;

- si el orden es *grlex*, entonces $t \prec_{grlex} q$ y $r \prec_{grlex} p$;
- si el orden es *grlexrev*, entonces $t \prec_{grlexrev} r$ y $p \prec_{grlexrev} q$.

Un subconjunto no vacío \mathfrak{a} de un anillo R es llamado un *ideal* si

- para $a, a' \in \mathfrak{a}$ entonces $a + a' \in \mathfrak{a}$;
- para $a \in \mathfrak{a}, r \in R$ entonces $a \cdot r \in \mathfrak{a}$.

Además, un ideal es cerrado en lo que respecta a tomar inverso aditivo, pues si $a \in \mathfrak{a}$, entonces $-a \in \mathfrak{a}$, ya que $-a = a \cdot (-1)$. También contiene elemento neutro para la adición o elemento 0, pues $0 = a \cdot 0$.

Un *ideal monomial* es un ideal generado por un conjunto de monomios, es decir, los elementos del anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$ que son de la forma $x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$.

Sea R un anillo arbitrario y r un elemento cualquiera en R . El ideal generado por $\{r\}$, denotado como $\langle r \rangle$ (el cual está constituido por todos los múltiplos de r), es dado por $\langle r \rangle = \{r \cdot r' : r' \in R\}$, y será llamado *ideal principal*; es decir, el ideal generado por un solo elemento.

Sea $f \in A = K[x_1, \dots, x_n]$ con $f \neq 0$ y supongamos que \prec es un orden admisible en los monomios de A . Entonces, f lo podemos escribir de forma unívoca de la forma $f = c_1 m_1 + \cdots + c_n m_n$, con los monomios $m_1 \prec \cdots \prec m_n$ y $c_i \neq 0, i = 1, \dots, n$. Definimos ahora:

- El soporte de f como, $sop(f) = \{m_i \mid i = 1, \dots, n\}$.
- El monomio líder de f como $lm(f) = m_n$.
- El término líder de f como $lt(f) = c_n m_n$.
- El coeficiente líder de f como, $lc(f) = c_n$.
- Si \mathfrak{a} es un ideal no nulo en A , el ideal de los monomios líderes de \mathfrak{a} está dado por $l(\mathfrak{a}) = \langle lm(f) : f \in \mathfrak{a} \rangle$.

Si $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, entonces $lm(f_i) \in l(\mathfrak{a})$ para $i = 1, \dots, r$. Además, como $lm(pf) = plm(f)$, para algún monomio p y algún polinomio f tenemos que $\langle lm(f_1), \dots, lm(f_r) \rangle = l(\mathfrak{a})$.

Ahora, sea P un subconjunto de polinomios en $K[x_1, \dots, x_n]$. Diremos que dos polinomios f y g de $K[x_1, \dots, x_n]$ son *equivalentes módulo P* , si su diferencia puede ser expresada en términos de P , es decir,

$$f - g = u_1 p_1 + \cdots + u_n p_n,$$

para algunos $p_1, \dots, p_n \in P$ y $u_1, \dots, u_n \in K[x_1, \dots, x_n]$. Esto lo denotaremos como $f \equiv_P g$.

Queremos generalizar el algoritmo de la división de polinomios en una indeterminada a polinomios en varias indeterminadas, también llamado *proceso de reducción*. La principal

diferencia es que utilizamos un algoritmo que divide un polinomio por un conjunto de polinomios; este proceso es de gran importancia para las bases de Gröbner.

En el caso de una indeterminada, el algoritmo de la división en una indeterminada asegura que si $f, g \in K[x]$ son polinomios con $f \neq 0$, al dividir g entre f obtenemos $q, r \in K[x]$, tales que $g = qf + r$ donde $r = 0$ ó $gr(r) < gr(f)$. Esto significa que se puede representar cada polinomio $g \in K[x]$ por un polinomio r con $gr(r) < gr(f)$ ó por 0 módulo el ideal. Ya que $g - r = qf \in \langle f \rangle$, diremos que g y r están relacionados módulo $\langle f \rangle$. Esta representación es única, ya que si $g = q_1f + r_1 = q_2f + r_2$, entonces $r_1 - r_2$ es un múltiplo de f , y esto solo es posible si $r_1 - r_2 = 0$. Por consiguiente, tenemos una única representación de polinomios módulo $\langle f \rangle$.

Es la unicidad de representación de polinomios la que nos permite realizar cálculos módulo $\langle f \rangle$, es decir, en el anillo cociente $K[x]/\langle f \rangle$.

Para visualizar de una manera más sencilla el algoritmo de división, consideremos el siguiente ejemplo:

Sean $g, f \in \mathbb{Q}[x]$ dados por $g = x^3 - 2x^2 + 2x + 8$ y $f = 2x^2 + 3x + 1$. Por el algoritmo de la división, al dividir g entre f

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \quad -2x^2 \quad +2x \quad +8 \\
 -x^3 \quad -\frac{3}{2}x^2 \quad -\frac{1}{2}x \\
 \hline
 \quad -\frac{7}{2}x^2 \quad +\frac{3}{2}x \quad +8 \\
 \quad \phantom{-\frac{7}{2}x^2} \quad +\frac{21}{4}x \quad +\frac{7}{4} \\
 \hline
 \phantom{-\frac{7}{2}x^2} \phantom{+\frac{21}{4}x} \quad \frac{27}{4}x \quad +\frac{39}{4}
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 2x^2 + 3x + 1 \\
 \hline
 \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}
 \end{array}
 \end{array}$$

obtenemos $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, donde $q = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ y $r = \frac{27}{4}x + \frac{39}{4}$. Sustituyendo se tiene $g = (\frac{1}{2}x - \frac{7}{4})f + (\frac{27}{4}x + \frac{39}{4})$.

Pero si hacemos un análisis paso a paso de la división anterior, tenemos que primero se calculó $(\frac{1}{2}x)f$ ya que este resultado se lo restamos a g (esto se hace para disminuir el grado de g).

Además, podemos notar que $(\frac{1}{2}x)f = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, cuyo término líder es x^3 , el cual coincide con $lt(g)$. En otras palabras, lo que hacemos es buscar un término que al multiplicarlo por el polinomio f y al sumarle el polinomio g permita eliminar el término líder de g . Al eliminar el término líder de g se genera un nuevo polinomio $p = g - f(\frac{1}{2}x) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 8$.

Repetimos el procedimiento anterior, pues queremos eliminar el término líder de p por medio de f . Este procedimiento se repite de manera sucesiva hasta que $gr(p) < gr(f)$ ó $p = 0$. Cuando finaliza el proceso, p es el resto de la división de g entre f ; la suma de los términos que usamos para la reducción en cada paso es el polinomio cociente.

Para generalizar el proceso anterior consideremos $g, f \in K[x]$ dados por $g = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, y $f = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ con $gr(g) = n$, $gr(f) = m$ y $f \neq 0$.

Entonces $h = g - \frac{lt(g)}{lt(f)} f$.

Llamaremos a h la reducción de g por f y lo denotaremos como $g \xrightarrow{f} h$. Cuando el proceso se realiza de forma sucesiva lo denotaremos por $g \xrightarrow{f}_+ h$.

Este proceso es finito, pues $K[x]$ es un anillo euclídeo con la función tamaño definida como el grado del polinomio, el cual define el único orden admisible posible.

Para extender el proceso al caso de n indeterminadas debemos considerar que en $K[x_1, \dots, x_n]$ no todos los ideales son principales, a diferencia de $K[x]$, donde todos sus ideales son principales; para ello, en el anillo de polinomios hay que establecer un orden entre las indeterminadas, y por ende, entre los monomios, para así poder hacer una buena elección del conjunto de generadores de un ideal, que es de mucha importancia para definir las bases de Gröbner.

Ahora, para el caso de n indeterminadas, sea K un cuerpo cualquiera de característica cero (no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 = 0$, con n el menor entero positivo en K). Consideremos $K[x_1, \dots, x_n]$, el anillo de polinomios en las indeterminadas x_1, \dots, x_n con coeficientes en \mathbb{N} y \prec un orden admisible sobre \mathfrak{M} , el conjunto de todos los monomios en $K[x_1, \dots, x_n]$.

Para $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ con $g \neq 0$, diremos que f se reduce a h módulo g en un paso si y solo si $lm(g)$ divide a $lm(f)$ y h se obtiene mediante la siguiente ecuación: $h = f - \frac{lt(f)}{lt(g)} g$. Si f se reduce a h módulo g en un paso, esto lo denotaremos como $f \xrightarrow{g} h$.

Por ejemplo, consideremos el orden lexicográfico \prec_{lex} con $x \prec y$ en $\mathbb{Q}[x, y]$. Sean $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ dados por

$$f = 6x^3y + 4x^2y + 4y^3, \quad g = 2xy + y^3.$$

Como $lm(f)$ divide a $lm(g)$, sustituyendo por f y g se obtiene que $h = -3x^2y^3 + 4x^2y + 4y^3$, entonces $f \xrightarrow{g} h$.

La definición anterior puede ser extendida para reducir un polinomio f módulo un conjunto no vacío de polinomios como sigue.

Dados $f, r, f_1, \dots, f_t \in K[x_1, \dots, x_n]$ polinomios con $f_i \neq 0$ y el conjunto $F = \{f_1, \dots, f_t\}$, diremos que f se reduce a r módulo F si y solo si existe una sucesión de índices $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, t\}$ y una sucesión de polinomios h_1, \dots, h_{s-1} en $K[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$f \xrightarrow{f_{i_1}} h_1 \xrightarrow{f_{i_2}} h_2 \xrightarrow{f_{i_3}} h_3 \cdots \xrightarrow{f_{i_{s-1}}} h_{s-1} \xrightarrow{f_{i_s}} r.$$

Si f se reduce a r módulo F , al conjunto F lo denotaremos como $f \xrightarrow{F}_+ r$. El polinomio r se denomina *reducción o resto del polinomio f módulo el conjunto F* .

Notemos que si r es la reducción de f módulo el conjunto F , entonces $lm(r)$ no puede ser dividido por ningún $lm(f_i)$ para $i = 1, \dots, t$; es decir, si para algún índice

$s \in \{1, \dots, t\}$, $lm(f_s)$ divide a $lm(r)$, entonces r se puede reducir módulo F , lo cual sería una contradicción, ya que r es la reducción de f módulo F .

Finalmente, presentaremos la definición de las bases de Gröbner y las herramientas para su cálculo, además del algoritmo propuesto por *Bruno Buchberger*. Para ello, dado \mathfrak{a} de $K[x_1, \dots, x_n]$, una *base de Gröbner* para el ideal \mathfrak{a} es un conjunto $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ de elementos de \mathfrak{a} tal que

$$\langle lm(g_1), \dots, lm(g_s) \rangle = l(\mathfrak{a}).$$

Esta definición de base de Gröbner resuelve el problema de pertenencia a un ideal en polinomios de n indeterminadas. Sin embargo, no nos dice cómo construir la base de Gröbner para un ideal \mathfrak{a} de una base G . La idea del algoritmo de Buchberger es completar la base G añadiendo un número finito de polinomios.

Introducimos la siguiente definición como una herramienta para la construcción del algoritmo de Buchberger:

Dado \prec un orden admisible en \mathfrak{M} , sean f_1, f_2 un par de elementos mónicos fijos en $K[x_1, \dots, x_n]$. El *S-polinomio* de f_1, f_2 con respecto a \prec , denotado por $S(f_1, f_2)$, es el polinomio dado por

$$S(f_1, f_2) = \frac{lcm(lm(f_1), lm(f_2))}{lm(f_2)} f_1 - \frac{lcm(lm(f_1), lm(f_2))}{lm(f_1)} f_2.$$

Teorema 1 (Teorema de Buchberger). *Sea $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ un conjunto no vacío de polinomios en $K[x_1, \dots, x_n]$. Entonces G es un base de Gröbner para el ideal $I = \langle G \rangle$ si y solo si $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$, para todo $i \neq j$.*

La demostración del teorema anterior puede ser encontrada en [4].

A continuación presentaremos el algoritmo de Buchberger, que es un método de gran importancia para determinar las bases de Gröbner.

Algoritmo de Buchberger

- Comenzamos con un conjunto no vacío de polinomios $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ y un ideal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ dados.
- Calculamos todos los S-polinomios y los reducimos módulo F .
- $S(f_i, f_j) \xrightarrow{F}_+ h$ y $h \neq 0$ extendemos $F = F \cup \{h\}$.
- Calculamos todos los S-polinomios que aún no han sido calculados y los reducimos módulo F . Continuamos hasta que no se obtengan nuevos polinomios no nulos.

Notemos que si $S(f_i, f_j) \xrightarrow{F}_+ h$ con $h \neq 0$, entonces

$$lm(h) \notin \langle lm(f_1), \dots, lm(f_k) \rangle,$$

razón por la cual, cada vez que extendemos el conjunto de generadores, también extendemos el ideal monomial generado por los monomios líderes de los generadores con el

monomio líder de h . La terminación de este proceso es garantizada por el *lema de Dickson*, que establece que todo ideal monomial en $K[x_1, \dots, x_n]$ es un anillo de polinomios sobre un cuerpo K , el cual es finitamente generado. La prueba del lema de Dickson puede ser vista en [10].

Resumiendo, la existencia de las bases de Gröbner para un ideal está dada por el teorema de Buchberger y el lema de Dickson. Para calcularlas es necesario establecer un orden sobre el conjunto de monomios del anillo de polinomios. Por tales razones nos referimos a la base de Gröbner de un ideal módulo un conjunto de polinomios respecto a un orden previamente fijado, donde debemos considerar lo siguiente:

- K es un cuerpo de característica cero.
- $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto de indeterminadas sobre K .
- $K[x_1, \dots, x_n]$ es el anillo de polinomios en las indeterminadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ con coeficientes en K .
- \mathfrak{M} es el conjunto de los monomios del anillo de polinomios.
- \prec es un orden admisible sobre \mathfrak{M} .
- El ideal \mathfrak{a} de $K[x_1, \dots, x_n]$.
- El conjunto $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ de polinomios no nulos de elementos de \mathfrak{a} .

Ahora, G es la base de Gröbner para \mathfrak{a} respecto a \prec si y solo si ocurre al menos una de las siguientes condiciones:

- $\langle lm(g_1), \dots, lm(g_s) \rangle = l(\mathfrak{a})$ ó
- $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$ para todo $i \neq j$.

Por ejemplo, consideremos el orden lexicográfico \prec_{lex} con $x \prec y$ en $R[x, y]$. Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ dados por $f_1 = y^2 + yx + x^2$, $f_2 = y + x$, $f_3 = y$

- Comenzamos con el conjunto $F := \{f_1, f_2, f_3\}$
- $S(f_1, f_2) = x^2$, $S(f_1, f_2) \xrightarrow{F} x^2 \neq 0$, obtenemos $f_4 = x^2$.
- Extendemos el conjunto $F = F \cup \{f_4\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$
- $S(f_1, f_3) = yx + x^2$, $S(f_1, f_3) \xrightarrow{f_3} x^2 \xrightarrow{f_4} 0$.
- $S(f_2, f_3) = x$, $S(f_2, f_3) \xrightarrow{F}_+ x \neq 0$, obtenemos $f_5 = x$.
- Extendemos el conjunto $F = F \cup \{f_5\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.
- $S(f_1, f_4) = x^3y + x^4$, $S(f_1, f_4) \xrightarrow{f_3} x^4 \xrightarrow{f_4} 0$.
- $S(f_2, f_4) = x^3$, $S(f_2, f_4) \xrightarrow{f_4} 0$.
- $S(f_3, f_4) = 0$
- $S(f_4, f_5) = 0$

Como todos los S-polinomios se reducen a cero módulo F , tenemos que la base de Gröbner para el ideal \mathfrak{a} con respecto al orden \prec_{lex} es $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

4. El problema de la alcanzabilidad

En esta sección daremos una forma alternativa para resolver el problema de alcanzabilidad de estados en SED. Para ello será utilizado el contenido básico necesario de las redes de Petri y las bases de Gröbner dado en las secciones 2 y 3, junto con una forma polinomial para representar las marcaciones y transiciones.

4.1. Definiciones básicas

Definición 1. Dada $M = (R, m_0)$ una red de Petri marcada con marcación inicial m_0 , para cada marcación $n \in \mathbb{N}^n$ con $n = |L|$, el polinomio formal

$$Pol(m) := \prod_{l_i \in L} l_i^{m(l_i)}, \quad \text{con } i = 1, \dots, |L|$$

será llamado *el polinomio asociado a la marcación m* .

Los elementos referidos en la definición anterior están en el conjunto de monomios \mathfrak{M} con indeterminadas $l_1, \dots, l_n \in L$, y las potencias $m(l_i)$ corresponden al número de fichas en el lugar l_i con $i = 1, \dots, |L|$.

Definición 2. Dada $M = (R, m_0)$ una red de Petri marcada con marcación inicial m_0 , para cada transición t_j , el polinomio formal

$$Pol(t_j) := \prod_{l_i \in L} l_i^{\#(l_i, E(t_j))} - \prod_{l_i \in L} l_i^{\#(l_i, S(t_j))}, \quad \text{con } i = 1, \dots, |L|,$$

será llamado *el polinomio asociado a t_j* .

4.2. Estructura dinámica

Para representar la estructura dinámica debemos considerar la relación entre los polinomios de transición y los polinomios de marcación, y la manera como dicha relación afecta los disparos de las transiciones en los polinomios de marcación. Para ello consideremos lo siguiente:

Sea $m \in \mathbb{N}^n$ y sea $t \in \mathcal{E}(m)$; por definición, tenemos que el polinomio asociado a m es dado por $Pol(m) := \prod_{l \in L} l^{m(l)}$, y el polinomio asociado a t es dado por

$$Pol(t) := \prod_{l_i \in L} l_i^{\#(l_i, E(t))} - \prod_{l_i \in L} l_i^{\#(l_i, S(t))};$$

llamemos

$$\varphi = \prod_{l \in L} l^{\#(l, E(t))} \quad \text{y} \quad \xi = \prod_{l \in L} l^{\#(l, S(t))},$$

entonces $Pol(t) = \varphi - \xi$.

Ahora, como $t \in \mathcal{E}(m)$, entonces $m(l) \geq \#(l, E(t))$, para todo $l \in L$.

Para cada $l \in L$, sea $K_l \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) = \#(l, E(t)) + K_l$; entonces,

$$\begin{aligned} Pol(m) &= \prod_{l \in L} l^{m(l)} = \prod_{l \in L} l^{\#(l, E(t)) + K_l} \\ &= \prod_{l \in L} l^{K_l} \prod_{l \in L} l^{\#(l, E(t))}. \end{aligned}$$

Sea

$$u = \prod_{l \in L} l^{K_l} \in \mathfrak{M},$$

entonces

$$Pol(m) = u \prod_{l \in L} l^{\#(l, E(t))};$$

es decir, $Pol(m) = u\varphi$.

Sea m' la marcación resultante del disparo de $t \in \mathcal{E}(m)$, entonces

$$Pol(m') = \prod_{l \in L} l^{m'(l)};$$

pero $m'(l) = m(l) - \#(l, E(t)) + \#(l, S(t))$; así,

$$\begin{aligned} Pol(m') &= \prod_{l \in L} l^{m(l) - \#(l, E(t)) + \#(l, S(t))} = \prod_{l \in L} l^{m(l) - \#(l, E(t))} \prod_{l \in L} l^{\#(l, S(t))} \\ &= \prod_{l \in L} l^{K_l} \prod_{l \in L} l^{\#(l, S(t))} = u\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Pol(m') = u\xi$. Esto es, $Pol(m') = Pol(m) - uPol(t) = u\xi$.

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente red de Petri marcada $M = (R, m_0)$, como se muestra en la figura 4.

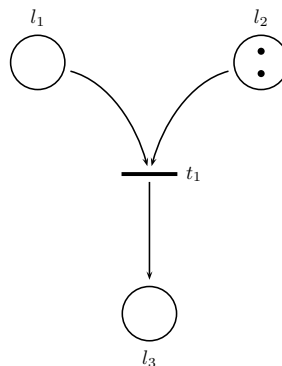


Figura 4. RP marcada

El polinomio asociado a la marcación m es

$$Pol(m) = (l_2)^2$$

y el polinomio asociado a la transición t_1 es $Pol(t_1) = l_1l_2 - l_3$. En este caso tenemos que t no es habilitada en m . De hecho, $K_t = -1$.

Ejemplo 2. Consideremos la red de Petri marcada $M = (R, m_0)$, dada gráficamente en la figura 5, cuyo polinomio de marcación para m es $Pol(m) = (l_1)(l_2)^2$ y el polinomio

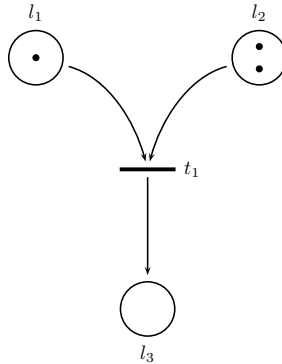


Figura 5. RP marcada con $m = (1, 2, 0)$.

asociado a t_1 es $Pol(t_1) = l_1l_2 - l_3$; t_1 es habilitada en m . La marcación resultante del disparo de t_1 es m' . En términos de polinomios, esto es

$$\begin{aligned} Pol(m') &= Pol(m) - uPol(t_1) = l_1(l_2)^2 - l_2(l_1l_2 - l_3) \\ &= l_1(l_2)^2 - l_1(l_2)^2 + l_2l_3 = l_2l_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Gráficamente el disparo es representado por la red de la figura 6.

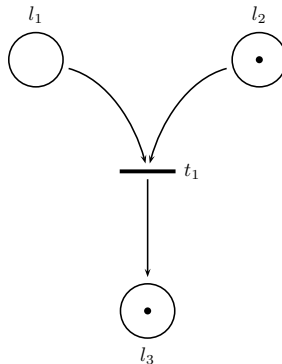


Figura 6. RP marcada para representar el disparo de t_1 .

Observación 1. Sea m_n una marcación alcanzable desde m_0 por $t_1 \cdots t_n$, y sea m_j con $j = 1, \dots, n$, las marcaciones sucesivas para las cuales $m_j = \delta(m_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \dots, n$; es decir,

$$m_0 \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} m_2 \cdots \xrightarrow{t_n} m_n.$$

En términos polinomiales, la secuencia de disparos de transiciones es escrita como

$$Pol(m_0) \xrightarrow{t_1} Pol(m_1) \xrightarrow{t_2} Pol(m_2) \cdots \xrightarrow{t_n} Pol(m_n),$$

donde $Pol(m_n) = u_n \xi_n$; es decir, $Pol(m_n) = Pol(m_{n-1}) - u_n Pol(t_n)$, pero la marcación m_{n-1} es alcanzable desde la marcación m_{n-2} , esto es,

$$Pol(m_{n-1}) = Pol(m_{n-2}) - u_{n-1} Pol(t_{n-1}).$$

Sustituyendo, tenemos que

$$Pol(m_n) = Pol(m_{n-2}) - u_{n-1} Pol(t_{n-1}) - u_n Pol(t_n).$$

Procediendo recursivamente hasta llegar a la marcación inicial m_0 , obtenemos

$$Pol(m_n) = Pol(m_0) - u_1 Pol(t_1) - \cdots - u_n Pol(t_n).$$

Teorema 2 (Alcanzabilidad y equivalencia de polinomios). *Dados $M = (R, m_0)$ una red de Petri marcada reinicializable con marcación inicial m_0 , y $P := \{Pol(t) : t \in T\}$ el cual es no vacío, entonces una marcación m es alcanzable desde m_0 si y solo si $Pol(m_0) =_P Pol(m)$.*

Demostración. Supongamos que m es alcanzable desde la marcación inicial m_0 . Entonces, existe una sucesión de disparos de transiciones $t_1 \cdots t_n$ tal que

$$m_0 \xrightarrow{t_1} m_1 \cdots \xrightarrow{t_{n-1}} m_{n-1} \xrightarrow{t_n} m, \quad (2)$$

equivalentemente $Pol(m) = Pol(m_0) - u_1 Pol(t_1) - \cdots - u_n Pol(t_n)$, para algunos u_1, \dots, u_n en $K[l_1, \dots, l_n]$.

Luego, $Pol(m_0) - Pol(m) = u_1 Pol(t_1) + \cdots + u_n Pol(t_n)$, y por lo tanto $Pol(m_0) =_P Pol(m)$.

Recíprocamente, supongamos que $Pol(m_0) =_P Pol(m)$. Entonces

$$Pol(m_0) = Pol(m) \pm u_1 Pol(t_1) \pm \cdots \pm u_n Pol(t_n).$$

Procedemos a realizar la prueba por inducción sobre n .

Supongamos $n = 0$, entonces $Pol(m_0) = Pol(m)$. Por definición,

$$\prod_{l \in L} l^{m_0(l)} = \prod_{l \in L} l^{m(l)}.$$

Como el conjunto de lugares es fijo en ambas representaciones, las marcaciones son iguales, es decir, $m_0 = m$. Por lo tanto, m es alcanzable desde m_0 (basta tomar θ como la sucesión de disparos).

Para el paso inductivo asumimos que la marcación m' es alcanzable desde m_0 si

$$Pol(m_0) = Pol(m') \pm u_1 Pol(t_1) \pm \cdots \pm u_{n-1} Pol(t_{n-1}),$$

para un n fijo. Ahora, supongamos que m es una marcación en $M = (R, m_0)$ tal que

$$Pol(m_0) = Pol(m) \pm u_1 Pol(t_1) \pm \cdots \pm u_n Pol(t_n).$$

Entonces, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $Pol(m_0) = u_i \varphi_i$, o bien $Pol(m_0) = u_i \xi_i$, donde $Pol(t_i) = \varphi_i - \xi_i$.

Caso 1: $Pol(m_0) = u_i \varphi_i$.

Por la dinámica que sigue una red de Petri, m_0 habilita alguna transición t_i y esto da paso a la ocurrencia de una nueva marcación m' : $m_0 \xrightarrow{t_i} m'$; entonces

$$\begin{aligned} Pol(m') &= Pol(m) \pm u_1 Pol(t_1) \pm \cdots \pm u_{i-1} Pol(t_{i-1}) \\ &\quad \pm u_{i+1} Pol(t_{i+1}) \cdots \pm u_n Pol(t_n). \end{aligned}$$

Así, la marcación m es alcanzable desde la marcación m' , pero por hipótesis inductiva m' es alcanzable desde m_0 . Por lo tanto, m es alcanzable desde m_0 .

Caso 2: $Pol(m_0) = u_i \xi_i$.

Por la dinámica establecida y la reiniciabilidad, hay una marcación m' tal que

$$\begin{aligned} Pol(m') &= Pol(m) \pm u_1 Pol(t_1) \pm \cdots \pm u_{i-1} Pol(t_{i-1}) \\ &\quad \pm u_{i+1} Pol(t_{i+1}) \cdots \pm u_n Pol(t_n); \end{aligned}$$

de esto tenemos que la marcación m es alcanzable desde m' por el disparo de la transición t_i . Como $M(R, m_0)$ es reinicializable, se tiene también que m' es alcanzable desde m . Por lo tanto, m es alcanzable desde m_0 . \square

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior:

Corolario 1 (Determinación de la alcanzabilidad por bases de Gröbner). La alcanzabilidad en una red de Petri reinicializable puede ser determinada usando bases de Gröbner.

Demostración. Sea K un cuerpo de característica cero, y $P \subseteq K[l_1, \dots, l_n]$ con indeterminadas $l_i \in L$, donde $P := \{Pol(t) : t \in T\}$.

Sea G una base de Gröbner para P . Entonces, $Pol(m_0) =_P Pol(m)$ sí y solo si existe $p \in K[l_1, \dots, l_n]$ tal que $Pol(m) \xrightarrow{G} p$ y $Pol(m_0) \xrightarrow{Q} p$. Así, debido al teorema anterior, la marcación m es alcanzable desde m_0 . \square

Observación: Conviene hacer notar que hasta el momento hemos hecho referencia al ideal generado por monomiales porque ellos representan de manera apropiada la estructura de las RP; sin embargo, notemos que la dinámica representada por los polinomios de

transición es generada por un ideal binomial. Esta estructura es compatible para el análisis de problemas relacionados con el bloqueo, la vivencia, el acotamiento, etc, en las RP. Nosotros referimos al lector a [9]. Aquí se tratan aplicaciones en programación entera (problemas de transporte, entre otros) cuyos argumentos teóricos son expresados mediante algoritmos que podrían ser útiles para dar solución a los problemas mencionados con anterioridad.

A continuación presentaremos un ejemplo para ilustrar la importancia y aplicación del corolario anterior.

Ejemplo 3. Consideremos la siguiente red de Petri reiniciable marcada $M = (R, m_0)$, con marcación inicial m_0 , tal como se muestra en la figura 7.

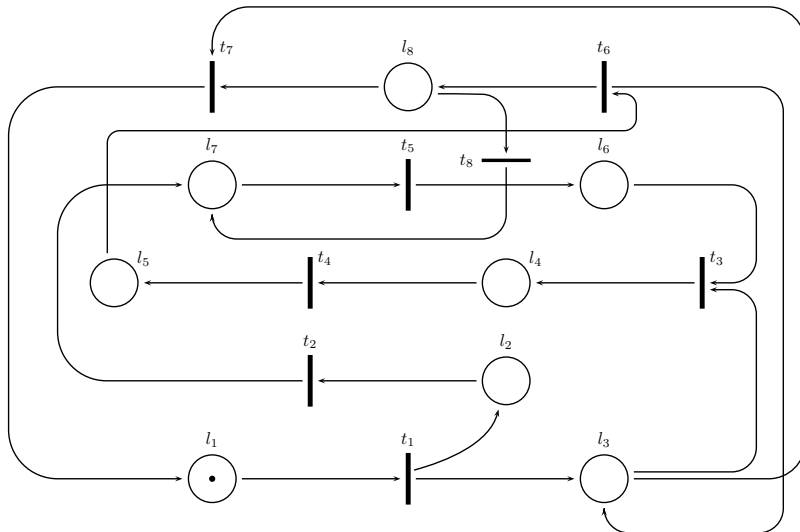


Figura 7. RP marcada reiniciable.

Aquí, $L = \{l_1, \dots, l_8\}$ y $T = \{t_1, \dots, t_8\}$, y los polinomios asociados a cada una de las transiciones son:

- $Pol(t_1) = l_1 - l_2l_3$
- $Pol(t_3) = l_3l_6 - l_4$
- $Pol(t_5) = l_7 - l_6$
- $Pol(t_7) = l_3l_8 - l_1$
- $Pol(t_2) = l_2 - l_7$
- $Pol(t_4) = l_4 - l_5$
- $Pol(t_6) = l_5 - l_3l_8$
- $Pol(t_8) = l_8 - l_7$

Luego, $P = \{Pol(t_1), \dots, Pol(t_8)\}$.

Usando MAPLE calculamos la base de Gröbner G con respecto al orden \prec_{grlex} para P , lo cual da como resultado $G = \{l_7 - l_8, l_6 - l_8, l_4 - l_5, l_3l_8 - l_5, l_2 - l_8, l_1 - l_5\}$. El polinomio asociado a m_0 es $Pol(m_0) = l_1$.

¿Será la marcación m cuyo polinomio asociado es $Pol(m) = l_3l_6$ alcanzable desde m_0 ?

Usando MAPLE con respecto al orden \prec_{grlex} notamos que

$$Pol(m_0) \xrightarrow{G} l_5, \quad y \quad Pol(m) \xrightarrow{G} l_5.$$

Luego, por el corolario anterior se tiene que la marcación m cuyo polinomio asociado es $Pol(m) = l_3l_6$ es alcanzable. Ahora veamos si la marcación m_1 con polinomio asociado $Pol(m_1) = l_1(l_5)^2(l_8)^2$ es alcanzable desde la marcación inicial, cuyo polinomio es $Pol(m_0) = l_1$. Nuevamente usando MAPLE y considerando el orden \prec_{grlex} , se verifica que $Pol(m_0) \xrightarrow{G} l_5$ y $Pol(m_1) \xrightarrow{G} (l_5)^3(l_8)^2$. Luego, por el corolario, la marcación m_1 cuyo polinomio asociado es $Pol(m_1)$ no es alcanzable desde la marcación inicial.

5. Conclusiones

La solución del problema de alcanzabilidad de estados, tal como es expuesto en la sección 4, expresa un algoritmo que es un simplificador canónico que motiva el estudio de algunas otras propiedades de los SED. Justamente, uno de los principales objetivos de la teoría de SED es desarrollar métodos formales que permitan tratar estos sistemas para su modelación, análisis y control. En este sentido, la teoría de bases de Gröbner es muy útil y permite el manejo de sistemas complejos.

Referencias

- [1] W. W. Adams and P. Lousstaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 1994.
- [2] R. Al-Jaar and A. Deroscher, *Petri nets in automation and manufacturing*, Advances in Automation and Robotics, **2** (1990), 153-225.
- [3] B. Buchberger, *Ein algorithmus zum auffinden der basiselemente des restklassenringes nach einem nulldimensionalen polynomideal*, Ph.D. thesis, University of Innsbruck, German, 1965.
- [4] B. Buchberger and F. Winkler, *Gröbner bases and applications*, Lecture note series, Cambridge University Press, 1998.
- [5] S. Eilenberg, *Automata, Languages, and Machines*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1974.
- [6] G. Mata, A. Méndez, J. Cardillo y E. Chacón, *Modelación de exclusión mutal de sistemas de eventos discretos con redes de Petri*, Revista de Ciencias e Ingeniería **36** (2015).

- [7] T. Murata, *Petri nets: properties, analysis and applications*, Proceedings of the IEEE, **77** (1989), 541-580.
- [8] J. L. Peterson, *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice Hall PTR, 1981.
- [9] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes*, University Lecture Series Vol. 8, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.
- [10] R. D. Torrealba F., *Representación matricial de polinomios y una aplicación para calcular bases de Gröbner*, tesis de licenciatura, Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, 2013.

Recibido en noviembre de 2015. Aceptado para publicación en abril de 2016.

GUELVIS MATA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA, VENEZUELA
e-mail: gmata@ula.ve

ABDUL LUGO
COORDINACIÓN DE PROCESOS QUÍMICOS
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA TERRITORIAL DEL OESTE
DE SUCRE “CLODOSBALDO RUSSIÁN”
CUMANÁ, VENEZUELA
e-mail: alugo@uptos.edu.ve

GERMALIS ROJAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA, VENEZUELA
e-mail: garch52@gmail.com