Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 43(2009)2, páginas 87-100

Operadores de Toeplitz en la 2-esfera

Toeplitz's operators on the 2-sphere

ERNESTO PRIETO SANABRIA[1,a]

[1]Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

RESUMEN. En este artículo se demuestra que el operador de Toeplitz T_a con símbolo radial actuando en los espacios de Bergman con peso $A_h^2(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación y se obtienen algunos corolarios de este resultado.

Palabras y frases clave. Espacio de Bergman, proyección de Bergman, operador de Toeplitz.

2000 Mathematics Subject Classification. 47B35, 30A31.

ABSTRACT. In the article we study the Toeplitz operators defined on the 2-sphere. We show that the Toeplitz operators T_a with radial symbol, acting on the Bergman space $A_h^2(\mathbb{C})$, is unitary equivalent to a multiplication operator.

Key words and phrases. Bergman space, Bergman projection, Toeplitz operator.

1. Introducción

Los operadores de Toeplitz han sido ampliamente estudiados para diversos dominios. En el caso del espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario, N. L.Vasilievski [4] demostró que el operador de Toeplitz con símbolo radial es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación. En [6], para el caso de símbolos radiales, se estudia el comportamiento de diferentes propiedades (acotación, compacidad, propiedades espectrales, etc.) de los operadores de Toeplitz $T_a^{(\lambda)}$ actuando en los espacios de Bergman con peso $A_\lambda^2(\mathbb{D})$ sobre

[a] El tema desarrollado en el presente artìculo está dirigido por los doctores Nikolai Vasilevski y Sergey Grudsky, profesores del instituto CINVESTAV del I.P.N de México. Este trabajo es patrocinado por la Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia) y por CONACYT.

el disco unitario $\mathbb{D}$, en dependencia del parámetro λ, y se compara el comportamiento del límite cuando $\lambda \to +\infty$ con las correspondientes propiedades del símbolo inicial a.

Para un estudio en la bola de $\mathbb{C}^n$ se puede ver [5].

En [3], usando el método de cuantización de Berezin en la 2-esfera, se dan los detalles de la construcción de los campos vectoriales hamiltonianos, los corchetes de Poisson, el operador de Laplace-Beltrami y usando la teoría de Bergman se construye el núcleo de Bergman y se da la forma integral de la proyección de Bergman. Estos conceptos son utilizados en el desarrollo de la teoría de los operadores de Toeplitz y se pueden estudiar en [1].

Nuestro principal objetivo es demostrar que el operador de Toeplitz actuando en la 2-esfera con un símbolo radial es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación. En el presente trabajo también se estudian los operadores de Toeplitz con símbolos angulares y con símbolos generales.

El artículo tiene el siguiente orden. La sección 2 está dedicada a la proyección de Bergman. En la sección 3 se estudian los operadores de Toeplitz con símbolos radiales. En la sección 4 se consideran los operadores con símbolos angulares y la sección 5 está dedicada a los operadores con símbolos generales.

2. La proyección de Bergman

En esta sección seguiremos el artículo [4]. Se estudiará el espacio $L^2(\mathbb{C}, \beta_N)$ y su subespacio de Bergman $A_h^2(\mathbb{C})$ el cual está compuesto por las funciones analíticas de $L^2(\mathbb{C}, \beta_N)$.

Aquí la medida β_N tiene la siguiente forma:

$$\beta_N\left(\xi, \bar{\xi}\right) = (N+1)\left(1+\xi\bar{\xi}\right)^{-N} d\mu\left(\xi, \bar{\xi}\right) ,$$

$N = \frac{1}{h} \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ y $d\mu\left(\xi, \bar{\xi}\right) = \dfrac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{2\pi i\left(1+\xi\bar{\xi}\right)^2}$.

La proyección de Bergman de $L^2(\mathbb{C}, \beta_N)$ sobre $A_h^2(\mathbb{C})$ está dada por:

$$(B_N f)(z) = \int \left(1+z\bar{\xi}\right)^N f(\xi) d\beta_N(\xi) .$$

El espacio $A_h^2(\mathbb{C})$ puede describirse como el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, \beta_N)$ de todas las funciones que satisfacen la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0 ,$$

donde $z = x + iy$. Pasando a coordenadas polares se tiene que

$$
\begin{aligned}
L^2(\mathbb{C}, \beta_N) &= L^2\left([0, +\infty), (N+1)\frac{rdr}{(1+r^2)^{N+2}}\right) \otimes L^2\left([0, 2\pi)\,, d\alpha\right) \\
&= L^2\left([0, +\infty)\,, \beta_N(r)\right) \otimes L^2\left(S^1, \frac{dt}{\pi i t}\right)\,,
\end{aligned}
$$

donde S^1 es el círculo unitario y $\frac{dt}{\pi i t} = |dt| = d\alpha$ es el elemento de longitud.

Se tiene que

$$
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left[\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right] = 0\,,
$$

haciendo $t = \cos\alpha + i\sin\alpha$ se llega a

$$
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right) f.
$$

Sea U_1 el operador unitario definido como

$$
U_1 = I \otimes \mathcal{F} : L^2\left([0, +\infty)\,, \beta_N(r)\right) \otimes L^2\left(S^1\right) \mapsto L^2\left([0, +\infty)\,, \beta_N(r)\right) \otimes l_2\,,
$$

donde la transformada de Fourier discreta $\mathcal{F} : L^2\left(S^1\right) \mapsto l_2$ está dada por:

$$
\mathcal{F} : f \mapsto c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} f(t) t^{-n} \frac{dt}{it}\,, \qquad n \in \mathbb{Z},
$$

y su inversa $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* : l_2 \mapsto L^2\left(S^1\right)$ tiene la siguiente forma:

$$
\mathcal{F}^{-1} : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n\,.
$$

Calculamos

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(I \otimes \mathcal{F}^{-1}\right) : \{c_n(r)\} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r) t^n \\
&\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right) c_n(r) t^n \\
&\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(c_n'(r) t^n - \frac{1}{r} c_n(r) n t^n\right) \\
&\mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r}\right) c_m(r) \int_{S^1} t^{m-n} \frac{dt}{i}\,,
\end{aligned}
$$

ó

$$(I\otimes\mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(I\otimes\mathcal{F}^{-1}\right)\{c_n(r)\}=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n-1}{r}\right)c_{n-1}(r)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Por lo tanto la imagen del espacio de Bergman $A_1^2 = U_1(A_h^2(\mathbb{C})$ puede describirse como el subespacio cerrado de

$$L^2\left([0,+\infty)\,,\beta_N(r)\right)\otimes l_2 = l_2\left(L^2\left([0,+\infty)\,,\beta_N(r)\right)\right)\,,$$

el cual consiste de todas las sucesiones $\{c_n(r)\}$ que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n}{r}\right)c_n(r)=0\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

La solución general de (1) es $c_n(r)=\alpha_n k_n r^n$, donde $\alpha_n=\sqrt{\frac{2N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}}$, y $k_n\in\mathbb{C}$. Cada función $c_n(r)=\alpha_n k_n r^n$ debe pertenecer al espacio $L^2\left([0,+\infty)\,,\beta_N(r)\right)$ lo cual implica que $c_n=0$ para cada $n\geq N+1$ y $n<0$. Esto es, el espacio $A_1^2\subset L^2\left(\mathbb{R}_+,\beta_N(r)\right)\otimes l_2 = l_2(L^2(\mathbb{R}_+,\beta_N(r)))$ coincide con el espacio de todas las sucesiones (dobles) $\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con

$$c_n(r)=\begin{cases}\alpha_n k_n r^n, & n=0,\dots,N\\ 0, & \text{en los otros casos,}\end{cases}$$

y además,

$$\|\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2}.$$

Es fácil probar que el operador

$$R_0:\mathbb{C}^{N+1}\to L^2\left(\mathbb{R}_+,\beta_N(r)\right)\otimes l_2\,,$$

definido como

$$R_0\{k_n\}_{n=o}^N=\begin{cases}\alpha_n k_n r^n, & n=0,\dots,N,\\ 0, & \text{en los otros casos}\end{cases}$$

es una isometría.

El operador adjunto de R_0 está dado por

$$R_o^*\{f_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\alpha_n r^n f_n(r)\beta_N(r), & \text{si } n\in I_N:=\{0,\dots,N\},\\ 0, & \text{en los otros casos.}\end{cases}$$

De las anteriores definiciones se tiene que

$$\begin{aligned}
R_0^* R_0 \{k_n\}_{n\in I_N} &= R_0^* \{\alpha_n k_n r^n\}_{n\in I_N} \\
&= \left\{ \alpha_n \int_0^{+\infty} \alpha_n r^{2n} k_n \beta_n(r) \right\}_{n\in I_N} \\
&= \left\{ \alpha_n^2 k_n \int_0^{+\infty} r^{2n} \beta_N(r) \right\}_{n\in I_N} \\
&= \{k_n\}_{n\in I_N} ,
\end{aligned}$$

es decir

$$R_0^* R_0 = I : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1} .$$

También se tiene que

$$\begin{aligned}
R_0 R_0^* \{f_n(r)\} &= R_0 \left\{ \int_0^{\infty} \alpha_n r^n f_n(r) \beta_N(r) \right\}_{n\in I_N} \\
&= \left\{ \alpha_n^2 r^n \int_0^{\infty} r^n f_n(r) d\beta_N(r) \right\}_{n\in I_N} .
\end{aligned}$$

Finalmente, sea

$$R = R_0^* U_1 = R_0^* (I \otimes \mathcal{F}) ,$$

el operador R mapea el espacio $L^2(\mathbb{C}, \beta_N)$ sobre l_2^N y la restricción

$$R|_{A^2(\mathbb{C})} \to l_2^N$$

es un isomorfismo isométrico.

Los anteriores cálculos los resumimos en el siguiente teorema

Teorema 2.1. *Sea* $R = R_0^* U_1 = R_0^*(I \otimes \mathcal{F})$. *Entonces*

$$RR^* = I \text{ y } R^* R = B_N .$$

Demostración. Directamente de las definiciones se tiene que

$$RR^* = R_0^* U_1 U_1^* R_0 = R_0^* R_0 = I .$$

Para la segunda igualdad nótese que $R_0 R_0^* = P_1$ es la proyección ortogonal del espacio $L_2(\mathbb{R}_+, \beta_N(r)) \otimes l_2$ sobre el espacio de Bergman A_1^2. Entonces

$$R^* R = U_1^* R_0 R_0^* U_1 = (I \otimes \mathcal{F}^{-1}) P_1 (I \otimes \mathcal{F}) = B_N .$$

☑

3. Operadores de Toeplitz con símbolos radiales

Dada la función a, el operador de Toeplitz T_a, con símbolo a y actuando en el espacio de Bergman $A_h^2(\mathbb{C})$, está definido por

$$T_a(f) := B_N(af)\,, \quad \text{para todo} \quad f \in A_h^2(\mathbb{C}). \tag{2}$$

Teorema 3.1. *Sea $a(r)$ una función del espacio $L_1\left(\mathbb{R}_+, \left(1+r^2\right)^{-\frac{3}{2}} dr\right)$, entonces el operador de Toeplitz T_a definido en $A_h^2(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\gamma_a I = RT_aR^*$, donde el operador R está dado por $R_0^*(I \otimes \mathcal{F})$ y*

$$\gamma_a(n) = \alpha_n^2(N+1)\int_0^{+\infty} a(r)r^{2n}\frac{rdr}{(1+r^2)^{N+2}}\,,$$

para todo $n = 1, 2, \ldots, N$.

Demostración. El operador T_a es unitariamente equivalente al operador

$$\begin{aligned} RT_aR^* &= RB_NaB_NR^* = R(R^*R)a(R^*R)R^* \\ &= (RR^*)RaR^*(RR^*) = RaR^* \\ &= R_0^*U_1aU_1^*R_0 \\ &= R_0^*(I\otimes\mathcal{F})a(r)(I\otimes\mathcal{F}^{-1})R_0 \\ &= R_0^*a(r)R_0\,. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} R_0^*a(r)R_0\left\{K_n\right\}_{n=0}^N &= R_0^*\left\{a(r)\alpha_nK_nr^n\right\}_{n=0}^N \\ &= \left\{\alpha_n^2K_n\int_0^\infty a(r)r^{2n}(N+1)\frac{rdr}{(1+r^2)^{N+2}}\right\}_{n=0}^N \\ &= \left\{k_n\cdot\gamma_a(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\,, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_a(n) = \alpha_n^2(N+1)\int_0^{+\infty} a(r)r^{2n}\frac{rdr}{(1+r^2)^{N+2}}\,. \tag{3}$$

☑

Del teorema anterior se deducen los siguientes corolarios:

Corolario 3.2. *Si en (3) el símbolo $a(r)$ se toma igual a 1, el operador T_a es la identidad.*

Corolario 3.3. *Si en (3) el símbolo $a(r)$ es acotado entonces su operador correspondiente T_a es acotado y la norma del operador coincide con el* $\max_{0\le n\le N}|\gamma_a(n)|$.

Lema 3.4. *Si existen constantes $M > 0$ y $0 \leq \alpha < 1$ tales que*

$$|a(r)| \leq M\left(1 + r^2\right)^{\alpha} \,,$$

para todo $r > 0$, entonces su operador correspondiente T_a es acotado.

Demostración. De (3) se sigue que

$$\begin{aligned}|\gamma_a(n)| &\leq \alpha_n^2(N+1)\int_0^{+\infty}|a(r)|r^{2n}\frac{rdr}{\left(1+r^2\right)^{N+2}}\\ &\leq \alpha_n^2 M(N+1)\int_0^{+\infty} r^{2n}\frac{rdr}{\left(1+r^2\right)^{N+2-\alpha}}\,;\end{aligned}$$

de nuevo las anteriores integrales existen para todo $n = 0, 1, \ldots, N$. ☑

Finalmente se plantea la siguiente pregunta: dados $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$ números complejos, ¿cómo definir el símbolo $a(r)$, tal que el operador de Toeplitz T_a tenga como valores propios estos valores? Para responder afirmativamente esta pregunta en (3) se toma $U_n(r)$ de la siguiente forma:

$$U_n = \alpha_n^2(N+1)\frac{r^{2n+1}}{\left(1+r^2\right)^{N+\frac{3}{2}}}\,,$$

para $n = 0, 1, \ldots, N$, y se define la función $b(r)$ como

$$b(r) = \frac{a(r)}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Nótese que $b(r) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ para todo $a(r) \in L_\infty(R_+)$. Puesto que las funciones U_n son linealmente independientes y pertenecen al espacio $L_2(\mathbb{R}_+)$ se tiene la siguiente descomposición:

$$L_2(\mathbb{R}_+) = L_{N+1} \oplus L_{N+1}^{\perp}\,,$$

donde L_{N+1} es el subespacio (finito dimensional) generado por las U_n y $L_{N+1}^{\perp}$ es su complemento ortogonal. Ahora como $b(r)$ pertenece a $L_2(\mathbb{R}_+)$ para toda función $a(r)$ acotada, de lo anterior (3) se puede reescribir como

$$\gamma(n) = (b, U_n)\,, \tag{4}$$

donde el producto punto es en $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Con lo anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *El problema espectral inverso se resuelve tomando la función $b(r)$ como:*

$$b(r) = \sum_{k=0}^{N} c_k U_k\,. \tag{5}$$

Demostración. Reemplazando (5) en (4) se tiene que

$$\left(\sum_{k=0}^{N} c_k U_k, U_n\right) = \sum_{k=0}^{N} c_k (U_k, U_n) = \gamma(n).$$

El sistema anterior tiene solución (única) puesto que

$$\det |(U_k, U_n)|_{k,n=0}^{N} \neq 0\,,$$

por ser las funciones U_n linealmente independientes [2, p. 92]. ☑

Terminamos esta sección resolviendo el problema espectral inverso para el siguiente caso:

Teorema 3.6. *Sea* $E_m = \left(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{m+1}, 0, \ldots, 0\right)$ *para* $0 \leq m \leq N$, *y la función* $a(r)$ *dada por*

$$a(r) = \left(1 + r^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N} c_k U_k(r)\,,$$

donde $U_k(r) = \frac{\alpha_k^2 (N+1) r^{2k+1}}{(1+r^2)^{N+\frac{3}{2}}}$ *para* $0 \leq k \leq N$ *y las constantes* $c_0, c_1, \ldots, c_N$ *forman el vector columna* $(m+1)$ *de la matriz* $[(U_k, U_n)]_{0 \leq k,n \leq N}^{-1}$. *Entonces el operador de Toeplitz* T_a *definido en* $A_h^2(\mathbb{C})$ *tiene como valores propios las coordenadas del vector* E_m.

Demostración. El operador T_a es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\gamma_a(n)I$ donde

$$\gamma_a(n) = \alpha_n^2 \int_0^{+\infty} a(r) r^{2n} (N+1) \frac{r dr}{(1+r^2)^{N+2}}, \qquad \text{para} \qquad 0 \leq n \leq N\,. \quad (6)$$

Haciendo $U_n(r) = \frac{\alpha_n^2 (N+1) r^{2n+1}}{(1+r^2)^{N+\frac{3}{2}}}$ y $b(r) = \frac{a(r)}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ en (6) se tiene que

$$\gamma_a(n) = (b, U_n)_{L_2(\mathbb{R}_+)} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq n \leq N.$$

Puesto que las funciones U_n son linealmente independientes y pertenecen al espacio $L_2(\mathbb{R}_+)$, se tiene la siguiente descomposición

$$L_2\left(\mathbb{R}_+\right) = L_{N+1} \bigoplus L_{N+1}^{\perp}\,,$$

donde L_{N+1} es el subespacio generado por las U_n y $L_{N+1}^{\perp}$ es su complemento ortogonal. Ahora haciendo $b(r) = \sum_{k=0}^{N} c_k U_k$ se tiene:

$$(b, U_n) = \left(\sum_{k=0}^{N} c_k U_k, U_n \right) = \sum_{K=0}^{N} c_k \left(U_k, U_n \right) = \gamma_a(n). \tag{7}$$

El sistema (7) tiene la siguiente forma matricial

$$AC^t = E_m^t \,, \tag{8}$$

donde $A = [(U_k, U_n)]_{0 \leq k,n \leq N}$, $C = (c_0, c_1, \ldots, c_N)$ y $(\gamma_a(0), \ldots, \gamma_a(N)) = E_m$.

La matriz A es invertible por ser las funciones U_n linealmente independientes y pertenecer al espacio $L_2(\mathbb{R}_+)$, y de (8) se sigue que

$$C^t = A^{-1} E_m^t \,.$$

☑

Los elementos de la matriz A se pueden calcular explícitamente en términos de la función Gamma de la siguiente forma:

Lema 3.7. *El elemento a_{kn} de la matriz $A = [(U_k, U_n)]_{0 \leq k,n \leq N}$ está dado por*

$$a_{kn} = \alpha_k^2 \alpha_n^2 (N+1)^2 \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2N-k-n+\frac{3}{2}\right)}{2(2N+2)!} \,, \tag{9}$$

para todo $0 \leq k, n \leq N$.

Demostración. De la definición se obtiene

$$a_{kn} = (U_k, U_n) = \alpha_k^2 \alpha_n^2 (N+1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{r^{2(k+n+1)}}{\left(1+r^2\right)^{2N+3}} dr \,.$$

donde las integrales que aparecen en el último término se calculan directamente. Haciendo $x = r^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{r^{2(k+n+1)}}{\left(1+r^2\right)^{2N+3}} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}}{(1+x)^{2N+3}} dx \\
&= \frac{1}{2} B\left(k+n+\frac{3}{2}, 2N-k-n+\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2N-k-n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2N+3)} \\
&= \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2N-k-n+\frac{3}{2}\right)}{2(2N+2)!} \,,
\end{aligned}$$

donde $B(p, q)$ es la función Beta. Reemplazando estos valores se demuestra el lema. ☑

4. Operadores de Toeplitz con símbolos angulares

Los anteriores cálculos son para símbolos que dependen solo del radio. Ahora se estudiará el caso cuando el símbolo depende solo del ángulo, es decir cuando

$$a(z) = a(re^{i\theta}) = a(t)\,, \qquad t = e^{i\theta}\,.$$

En este caso el resultado es un poco mas inesperado pues, partiendo de un símbolo no nulo, se obtiene el operador nulo. Mas exactamente se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea $a(t) = t^k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $|t| = 1$, entonces el operador de Toeplitz T_{t^k} es, o bien el operador identidad de A_h^2 si $k = 0$, o el operador corrimiento a la derecha si $0 < k \leq N$, o el operador corrimiento a la izquierda si $-N \leq k < 0$.*

Demostración. Para ver esto sea $a(t) = t^k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $|t| = 1$. Ahora calculamos

$$R_0\{K_n\}_{n=0}^N = \alpha_n K_n r^n.$$

Definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{\alpha_n K_n r^n\right\} = f(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n K_n r^n t^n \\
a(t) f(t) = g(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n K_n r^n t^{n+k} \\
\mathcal{F}(g(t)) = c_m &:= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n K_n r^n \int_{S^1} t^{n+k-m} \frac{dt}{it}\,,
\end{aligned}$$

para $m \in \mathbb{Z}$. En la anterior integral solo un término es diferente de cero y es para $n = m - k$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}(g(t)) = c_m = \alpha_{m-k} K_{m-k} r^{m-k}\,,$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
R_0^*\{c_m\} &= T_{t^k}\{K_m\}_{m=0}^N \\
&= \alpha_{m-k}^2 K_{m-k} \int_0^\infty r^{2(m-k)} (N+1) r \frac{dr}{(1+r^2)^{N+2}}\,. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Si en la ecuación (10) se hace $k = 0$ se tiene

$$T_1(K_0, K_1, \dots, K_N) = (K_0, K_1, \dots, K_N)\,,$$

es decir, T_1 es el operador identidad. Si en (10) se hace $k = 1$ se tiene

$$T_t(K_0, K_1, \ldots, K_N) = (0, K_0, K_1, K_2, \ldots, K_{N-1}) \ ,$$

esto es T_t es el operador corrimiento a la derecha.

En forma general se tiene que T_{t^k} es el operador corrimiento a la derecha k lugares si $k > 0$. De forma análoga, si en (10) se hace $k = -1, -2, \ldots, -N$ sus operadores correspondientes $T_{t^{-1}}, T_{t^{-2}}, \ldots, T_{t^{-N}}$ son operadores corrimiento a la izquierda k lugares. ☑

Corolario 4.2. *Si se toma $a(t) = t^k$, donde $|k| > N$ en el teorema anterior, entonces el operador T_{t^k} es el operador nulo.*

Sea P_k la proyección sobre las primeras k componentes y Q_k la proyección sobre las últimas k componentes. Con el teorema (4.1) las proyecciones P_k y Q_k se pueden expresar en términos de los operadores de Toeplitz de la siguiente forma:

Corolario 4.3. *Las proyecciones P_k y Q_k satisfacen las identidades:*

$$\begin{aligned} P_k &= T_{t^{-k}} T_{t^k} \ , \\ Q_k &= T_{t^k} T_{t^{-k}} \ . \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} T_{t^{-k}} T_{t^k} \left(K_0, K_1, \ldots, K_N\right) &= T_{t^{-k}} \left(0, 0, \ldots, 0, K_0, K_1, \ldots, K_{N-k}\right) \\ &= (K_0, K_1, \ldots, K_{N-k}, 0, 0, \ldots, 0) = P_k. \\ T_{t^k} T_{t^{-k}} \left(K_0, K_1, \ldots, K_N\right) &= T_{t^k} \left(K_{N-k}, \ldots, K_N, 0, \ldots, 0\right) = Q_k \ . \end{aligned}$$

☑

Por último, sea R_m la proyección sobre la componente m, entonces:

Lema 4.4. *La proyección R_m cumple la identidad:*

$$R_m = T_{t^m} T_{t^{-m}} - T_{t^{m+1}} T_{t^{-(m+1)}} \ .$$

Demostración.

$$\begin{aligned} T_{t^m} T_{t^{-m}} - T_{t^{m+1}} T_{t^{-(m+1)}} &= Q_m - Q_{m+1} \\ &= (0, \ldots, 0, K_m, K_{m+1}, \ldots, K_N) - (0, \ldots, 0, K_{m+1}, \ldots, K_N) \\ &= (0, \ldots, 0, K_m, 0, \ldots, 0) = R_m. \end{aligned}$$

☑

5. Operadores de Toeplitz con símbolos generales

Sea $a(z) \in L_\infty(\mathbb{C})$. Al tomar su serie de Fourier sobre t se tiene:

$$a(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(r)t^k \,,$$

por lo tanto

$$T_{a(z)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{a_k(r)t^k} \,.$$

Ahora calculamos el término $T_{a_k(r)t^k}$ de la anterior sumatoria, usando el operador RT_aR^*, el cual es unitariamente equivalente al operador T_a.

Calculando se tiene que

$$R_0 \{K_n\}_{n=0}^N = \begin{cases} \alpha_n K_n r^n, & n \in I_N \,, \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus I_N \,, \end{cases}$$

luego

$$\left(I \otimes \mathcal{F}^{-1}\right) \{\alpha_n K_n r^n\}_{n=0}^N = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n K_n r^n t^n \,.$$

Multiplicando por el símbolo, tenemos

$$a_k(r)t^k f(z) = g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n K_n a_k(r) r^n t^{n+k} \,.$$

Finalmente

$$(I \otimes \mathcal{F})[g(z)] = \{c_m(r)\}_{m\in\mathbb{Z}} \,,$$

donde

$$c_m(r) = \begin{cases} \alpha_{m-k} K_{m-k} r^{m-k} a_k(r), & m \in I_{N+k} \,, \\ 0, & m \in \mathbb{Z} \setminus I_{N+k} \,, \end{cases}$$

con $I_{N+k} = \{k, k+1, \dots, k+N\}$, y por último

$$\begin{aligned} R_0^* \{c_m(r)\}_{m\in\mathbb{Z}} &= \left\{ \int_0^{+\infty} \alpha_m r^m c_m(r) \beta_N(r) dr \right\}_{m\in I_N} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha_m \alpha_{m-k} K_{m-k} r^{2m-k} a_k(r) \beta_N(r) dr, & m \in I_N \cap I_{N+k} \,, \\ 0, & m \in I_N \setminus I_{N+k} \,, \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_{k,m} K_{m-k}, & m \in I_N \cap I_{N+k} \,, \\ 0, & m \in I_N \setminus I_{N+k} \,, \end{cases} \end{aligned}$$

donde

$$d_{k,m} = \int_0^\infty \alpha_m \alpha_{m-k} r^{2m-k} a_k(r) \beta_n \, dr \, .$$

Entonces

$$RT_{a_k(r)t^k} R^* \{K_m\}_{m=0}^N = \begin{cases} d_{k,m} K_{m-k}, & m \in I_N \cap I_{N+k} \, , \\ 0, & m \in I_N \setminus I_{N+k} \, . \end{cases}$$

Los anteriores cálculos demuestran el siguiente teorema

Teorema 5.1. *Sea*

$$a(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(r) t^k = \sum_{k=-N}^{+N} a_k(r) t^k + \sum_{|k|>N} a_k(r) t^k = \hat{a}(z) + \tilde{a}(z) \, .$$

Entonces

$$T_{\tilde{a}(z)} = 0$$

y

$$RT_{\hat{a}(z)} R^* \quad = \quad \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{-1,0} & d_{-2,0} & \cdots & d_{-N,0} \\ d_{1,1} & d_{0,1} & d_{-1,1} & \cdots & d_{-N+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N,N} & d_{N-1,N} & d_{N-2,N} & \cdots & d_{0,N} \end{pmatrix} ,$$

donde

$$d_{k,m} = \int_0^\infty \alpha_m \alpha_{m-k} r^{2m-k} a_k(r) \beta_n \, dr \, .$$

Referencias

[1] F. A. Berezin, *Método de la segunda cuantización (en ruso)*, Nauka, Moscú, 1965.

[2] A. I. Kiseliov, M. Krasnov, and G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Instituto Politécnico Nacional, México D. F., 1990.

[3] E. Prieto, *Operadores de Toeplitz en la 2-esfera*, Master's thesis, CINVESTAV-IPN, México D. F., 2004.

[4] N. L. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Bergman spaces: inside-the-domain effects*, Contemporary Mathematics **289** (2001), 79–146.

[5] N. L. Vasilevski, S. Grudsky, and A. Karapetyants, *Toeplitz operators on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$*,with radial symbols*, Reporte interno 292, Departamento de Matematicas, CINVESTAV del I.P.N., México D. F., 2001.

[6] ______, *Dynamics of properties of toeplitz operators with radial symbols*, Reporte interno 317, Departamento de Matematicas, CINVESTAV del I.P.N., México D. F., 2002.

(Recibido en agosto de 2006. Aceptado en julio de 2009)

Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
Vereda La Julita
Pereira, Colombia
e-mail: ernespri@utp.edu.co