

Sobrevivencia en un sistema Lotka–Volterra

DAN SOLANO

Universidad Centroccidental *Lisandro Alvarado*
Universidad Nacional Abierta, Barquisimeto, Venezuela

ABSTRACT. In this expository paper we consider the dynamics of the positive equilibrium point of the nonautonomous Volterra–Lotka Competition Equations.

Key Words and Phrases: Attractor, positive invariant set, logistic equation.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary: 00A35

RESUMEN. En este trabajo expositivo se considera la dinámica del punto de equilibrio positivo de las ecuaciones no autónomas de Volterra–Lotka.

Introducción

El objetivo del presente trabajo consiste en hacer un estudio cualitativo de un punto crítico del sistema de ecuaciones Lotka–Volterra

$$(1) \quad \begin{aligned} u'(t) &= u(t)(a - bu(t) - cv(t)) = f_1(u(t), v(t)) \\ v'(t) &= v(t)(d - eu(t) - fv(t)) = f_2(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

Este sistema modela dos especies en competencia con recursos limitados en un medio cerrado, veremos que si se satisfacen ciertas desigualdades dicho punto crítico corresponde a una situación realista y es un atractor para (1), donde $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuamente diferenciables para

$i = 1, 2$; a, b, c, d, e, f son constantes positivas y tienen la siguiente interpretación: a, d son las razones de crecimiento de u y v respectivamente, b, f representan la medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre si misma, c, e representan la medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra.

Los puntos de equilibrio de (1) son $(0, 0)$, $(a/b, 0)$, $(0, d/f)$ y cuando $u \neq 0 \neq v$ y el determinante del sistema resultante al hacer $u' = v' = 0$ y cancelar u y v es diferente de cero obtenemos otro punto crítico

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{af - dc}{bf - ce}, \frac{bd - ae}{bf - ce} \right)$$

La estabilidad asintótica del punto crítico (α, β) ha sido probada por dos métodos diferentes, el primero usa el Teorema de Hartman y Grobman en $\mathbb{R}^2$, el cual consiste en ver que (α, β) es un punto crítico hiperbólico y ver que el sistema no lineal (1) tiene la misma estructura cualitativa para el sistema lineal asociado a (1). Se prueba que (α, β) es asintóticamente estable para el sistema lineal y de aquí se deduce que también es asintóticamente estable para el sistema (1) este método está desarrollado en [?] y resuelve el problema localmente.

En el segundo método usando el criterio de Bendixon–Dulac se prueba que el sistema (1) no tiene ciclos límites y que la forma cuadrática

$$V(u(\bullet), v(\bullet)) = be(u - \alpha^2) + 2ce(u - \alpha)(v - \beta) + cf(v - \beta^2)$$

es una función de Lyapunov para (1), ver [?]. Por tanto el punto crítico (α, β) es asintóticamente estable globalmente. Yo pruebo la estabilidad asintótica del punto crítico (α, β) usando las ideas geométricas de Poincaré y en su prueba me baso fundamentalmente en el Lema 1.2 el cual es un caso particular del Teorema de Poincaré–Bendixon en $\mathbb{R}^2$, el concepto de conjunto invariante y la monotonía de las funciones u, v en ciertas regiones del plano fase. Esta solución es global.

1. Análisis del plano de fase

Para el estudio del punto crítico (α, β) necesitamos los siguientes resultados:

Lema 1.1. *Si g es una función creciente (respectivamente decreciente) en $[t_0, \infty)$ y acotada superiormente (respectivamente inferiormente) por alguna constante R entonces existe $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Prueba. Supongamos g creciente en $[t_0, \infty)$ y sea $A = \{g(t) : t \geq t_0\}$. Entonces $A \neq \emptyset$, pues $g(t_0) \in A$ y por ser acotado superiormente por R entonces existe $S = \sup A$, por tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > t_0$ tal que $S - \varepsilon < g(t_\varepsilon)$ y como $g(t_\varepsilon) < g(t)$ para todo $t > t_\varepsilon$, de donde $0 < S - g(t) < \varepsilon$ para todo $t > t_\varepsilon$ luego $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = S$. Cuando g es decreciente y acotada inferiormente por R en forma análoga se prueba que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \inf\{g(t) : t \geq t_0, R \leq g(t)\}$. $\square$

Lema 1.2. *Sea $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t))$, una solución del sistema*

$$(2) \quad \begin{aligned} u_1'(t) &= F_1(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) &= F_2(u_1(t), u_2(t)) \end{aligned}$$

con F_1 y F_2 continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Si $u(t)$ tiende al vector $\text{col}(\xi_1, \xi_2)$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\text{col}(\xi_1, \xi_2)$ es un punto de equilibrio de (2)

Prueba. Supongamos que $u(t)$ tiende a $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $u_1(t)$ tiende a ξ_1 y $u_2(t)$ tiende a ξ_2 cuando $t \rightarrow \infty$. Para $j = 1, 2$ tendremos $|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq |u_j(t_1) - \xi_j| + |u_j(t_2) - \xi_j| \rightarrow 0$ cuando $t_1 \rightarrow \infty$ y $t_2 \rightarrow \infty$. En particular para $t_1 = t$ y $t_2 = t + h$ con h un número positivo fijo tendremos $|u_j(t + h) - u_j(t)|$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, ($j = 1, 2$). Como u_j es continua en $[t, t + h]$ y derivable en $(t, t + h)$ entonces, por el teorema del valor medio, existe σ_j en $(t, t + h)$, para $j = 1, 2$ tal que

$$u_j(t + h) - u_j(t) = hu_j'(\sigma_j) = hF_j(u_1(\sigma_j), u_2(\sigma_j))$$

Ahora, debido a que F_1 y F_2 son continuas y $u(t)$ tiende a ξ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $F_j(u(t))$ tiende a $F_j(\xi)$ cuando $t \rightarrow \infty$; $j = 1, 2$. Luego

$$\begin{aligned} F_j(\xi_1, \xi_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} F_j(u_1(\sigma_j), u_2(\sigma_j)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_j(t + h) - u_j(t)}{h} \\ &= 0, \quad \text{para } j = 1, 2 \end{aligned}$$

por tanto (ξ_2, ξ_2) es un punto de equilibrio de (2). $\checkmark$

Observación: Notemos que si u es solución de la ecuación logística

$$u'(t) = u(t)(a - bu(t))$$

entonces $col(u(t), 0)$ es solución de (1) y si v es solución de la ecuación logística

$$v'(t) = v(t)(d - fv(t))$$

entonces $col(0, v(t))$ es solución de (1).

Lema 1.3. *Las soluciones de (1) son invariantes en el cono positivo de $\mathbb{R}^2$*

Prueba. El lema nos afirma que si $col(u(t), v(t))$ es solución de (1) con $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$ para algún $t_0 \in [0, \infty)$ entonces $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para $t \geq t_0$. Si la afirmación anterior es falsa, debe existir un primer tiempo t_1 con $t_1 > t_0$ tal que

$$(3) \quad u(t) > 0 \text{ si } t_0 \leq t < t_1 \text{ y } u(t_1) = 0,$$

ó

$$(4) \quad v(t) > 0 \text{ si } t_0 \leq t < t_1 \text{ y } v(t_1) = 0$$

Supongamos que ocurre (4), tendremos que si $\bar{u}(t)$ es solución de la ecuación logística

$$y'(t) = y(t)(a - by(t)) \text{ con } \bar{u}(t_1) = u(t_1)$$

entonces, por la observación, $col(\bar{u}(t), 0)$ es solución de (1) y coincide con la solución $col(u(t), v(t))$ de (1) en $t = t_1$, entonces por el teorema de unicidad tendremos que $u(t) = \bar{u}(t)$ y $v(t) \equiv 0$ en $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$ con $t_0 < t_1 - \alpha < t_1$ para algún α pequeño y positivo, pero esto contradice que t_1 sea el primer tiempo para el cual ocurre (4). Si ocurre (3) en forma análoga llegamos a una contradicción; por tanto debemos tener $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$, para $t \geq t_0$, luego las soluciones de (1) son invariantes en el cono positivo de $\mathbb{R}^2$. $\checkmark$

Lema 1.4. *Las soluciones $col(u(t), v(t))$ de (1) con $u(0) = u_0$ y $v(0) = v_0$ son acotadas en $[0, \infty)$.*