

Invarianza del grado de Leray-Schauder bajo el método de reducción

ALFONSO CASTRO

University of Texas at San
Antonio, San Antonio, TX, USA

JORGE COSSIO

Universidad Nacional de Colombia
Medellín, Colombia

ABSTRACT. In this paper, using elementary properties of the Leray-Schauder degree, we give a simple proof of the invariance of the Leray-Schauder degree under the Lyapunov-Schmidt reduction method. This result has been showed previously by Lazer and McKenna in [7]. As a simple application, we show that a nonlinear Dirichlet problem has at least three solutions.

Key words and phrases. Grado de Leray-Schauder, método de reducción de Lyapunov-Schmidt, problema de Dirichlet

1991 Mathematics Subject Classification. AMS (MOS) Subject Classification. 35J20, 35J25, 35J60, 47H15, 34G20.

RESUMEN. En este trabajo, utilizando las propiedades elementales del grado de Leray-Schauder, presentamos una demostración simple de la invarianza del grado de Leray-Schauder bajo el método de reducción de Lyapunov-Schmidt. Este resultado ha sido demostrado previamente por Lazer y McKenna en [7]. Como una aplicación simple, demostramos que un problema de Dirichlet no lineal tiene por lo menos tres soluciones.

Esta investigación ha sido parcialmente apoyada por COLCIENCIAS-BID (contrato No. 381-97) .

1. Introducción

Para resolver una gran variedad de ecuaciones (integrales, diferenciales, funcionales, etc.) es suficiente hallar soluciones a ecuaciones de la forma

$$(1.1) \quad f(x) = 0,$$

donde f es una función no lineal definida en un espacio de Banach X de dimensión infinita. La teoría del grado de Leray-Schauder (ver [4] y [8]) ha demostrado ser una herramienta muy útil para la solución de ecuaciones del tipo (1.1). Recordamos que si $f(x) - x$ define una función compacta (ver [8]) y $\Omega \subset X$ es una región acotada tal que $f(x) \neq 0 \forall x \in \partial\Omega$, el grado de f en Ω con respecto a 0, denotado por $d(f, \Omega, 0)$, es un número entero y está caracterizado por las siguientes tres propiedades:

(i) (Homotopía) Si para $(\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$, $(1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x) \neq 0$ entonces

$$d(f, \Omega, 0) = d(g, \Omega, 0).$$

(ii) (Escisión) Si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, con Ω_1 y Ω_2 abiertos y disjuntos y $0 \notin f(\Omega - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces

$$d(f, \Omega, 0) = d(f, \Omega_1, 0) + d(f, \Omega_2, 0).$$

(iii) (Existencia) Si $d(f, \Omega, 0) \neq 0$ entonces existe una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en Ω .

Cuando la función f está definida en un espacio de Hilbert y es el gradiente de algún funcional J , es decir (1.1) es equivalente a encontrar puntos críticos de J , se puede, además, utilizar información sobre las propiedades de J . En algunos casos la solubilidad de la ecuación (1.1) es equivalente a resolver una ecuación de la forma

$$(1.2) \quad \hat{f}(x) = 0,$$

donde $\hat{f}$ está definida en un espacio de dimensión finita.

El propósito de este artículo es mostrar como las técnicas de reducción y el grado de Leray-Schauder están relacionadas. En efecto, en el Teorema A, a ser enunciado, se demuestra que el grado no cambia cuando se pasa de la ecuación (1.1) a la ecuación (1.2). Además, en la Sección 3 mostramos un ejemplo típico de como se aplican estas ideas.

Seguidamente presentamos una versión global del método de reducción, conocida también como método de Lyapunov-Schmidt, cuya demostración puede consultarse en [3].

Lema 1.1. Sea H un espacio de Hilbert real y sean X y Y subespacios cerrados de H tales que $H = X \oplus Y$. Sea $j: H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 . Si existen $m > 0$ y $\alpha > 1$ tales que

$$(1.3) \quad \langle \nabla j(x + y) - \nabla j(x + y_1), y - y_1 \rangle \geq m \|y - y_1\|^\alpha \quad \forall x \in X, \forall y, y_1 \in Y$$

entonces

(i) Existe una función continua $\psi: X \rightarrow Y$ tal que

$$j(x + \psi(x)) = \min_{y \in Y} j(x + y).$$

Además, $\psi(x)$ es el único elemento de Y tal que

$$(1.4) \quad \langle \nabla j(x + \psi(x)), y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y.$$

(ii) La función $\tilde{j}: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{j}(x) = j(x + \psi(x))$ es de clase C^1 y

$$(1.5) \quad \langle \nabla \tilde{j}(x), x_1 \rangle = \langle \nabla j(x + \psi(x)), x_1 \rangle \quad \forall x, x_1 \in X.$$

(iii) $x \in X$ es un punto crítico de $\tilde{j}$ si y sólo si $x + \psi(x)$ es un punto crítico de j .

El propósito fundamental de este trabajo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema A. Sean $H, X, Y, j, \tilde{j}$ y ψ como en el Lema 1.1. Sean $S \subset X$ y $\Sigma \subset H$ regiones acotadas tales que

$$\{x + \psi(x); x \in S\} = \Sigma \cap \{x + \psi(x); x \in X\}.$$

Si $\nabla \tilde{j}(x) \neq 0$ para $x \in \partial S$ entonces

$$d(\nabla \tilde{j}, S, 0) = d(\nabla j, \Sigma, 0),$$

donde d denota el grado de Leray-Schauder.

En la demostración del Teorema A, la cual se hace en la Sección 2, se utilizan esencialmente la propiedad de invarianza bajo homotopía y la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder. El Teorema A fue obtenido previamente por Lazer y McKenna (ver Lema 2.6 de [7]) y ha sido utilizado para obtener soluciones de problemas elípticos semilineales (ver [5] y [6]).

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y

$$f'(\infty) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \in \mathbb{R}.$$

Sean Ω una región acotada de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave y $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el operador de Laplace. Sean $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ los valores propios de $-\Delta$ con condición de frontera de Dirichlet en Ω .

Utilizando el Teorema A se demuestra, en la Sección 3, el siguiente teorema.

Teorema B. Si $f'(0) < \lambda_1$, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ ($k \geq 2$) y $f'(t) \leq \gamma < \lambda_{k+1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ entonces el problema

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene por lo menos tres soluciones.

2. Demostración del Teorema A

Sea $\Gamma: H \rightarrow H$ la función definida por $\Gamma(x + y) = \nabla \tilde{j}(x) + y - \psi(x)$.

Lema 2.1. Si $\delta > 0$ y $T = \{x + y: x \in S, \|y - \psi(x)\| < \delta\}$ entonces

$$d(\Gamma, T, 0) = d(\nabla j, T, 0).$$

Demostración. Sea $h: [0, 1] \times H \rightarrow H$ la función definida por

$$h(t, x + y) = t\Gamma(x + y) + (1 - t)\nabla j(x + y).$$

Probemos que si $z \in \partial T$ entonces $h(t, z) \neq 0$. En efecto, sea $z = x + y \in \partial T$. Si $y = \psi(x)$ entonces $x \in \partial S$. Luego $\nabla \tilde{j}(x) \neq 0$. Como $h(t, z) = t\nabla \tilde{j}(x) + (1 - t)\nabla j(x + \psi(x)) = \nabla \tilde{j}(x)$ tenemos que $h(t, z) \neq 0$.

Si $y \neq \psi(x)$ en vista de las ecuaciones (1.3) y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle h(t, x + y), y - \psi(x) \rangle &= \langle t(\nabla \tilde{j}(x) + y - \psi(x)) + (1 - t)\nabla j(x + y), y - \psi(x) \rangle \\ &= \langle t(y - \psi(x)), y - \psi(x) \rangle + \langle (1 - t)\nabla j(x + y), y - \psi(x) \rangle \\ &\geq t\|y - \psi(x)\|^\alpha + (1 - t)m\|y - \psi(x)\|^\alpha > 0, \end{aligned}$$

luego $h(t, z) \neq 0$.

Por la invarianza del grado de Leray-Schauder bajo homotopía obtenemos $d(\Gamma, T, 0) = d(\nabla j, T, 0)$, lo cual demuestra el lema. $\checkmark$

Lema 2.2. Bajo las hipótesis del Lema 2.1

$$d(\Gamma, T, 0) = d(\nabla \tilde{j}, S, 0).$$

Demostración. Por la definición del grado de Leray-Schauder existe un subespacio finito dimensional Y_1 de Y tal que

$$d(\Gamma, T, 0) = d(I + Q\eta, T \cap (X \oplus Y_1), 0),$$

donde Q es la proyección ortogonal sobre $X \oplus Y_1$ y

$$\eta(x + y) = \nabla \tilde{j}(x) - x - \psi(x).$$

Sea $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de funciones de clase C^1 que converge uniformemente a $\nabla \tilde{j}$. Escojamos m suficientemente grande y $\epsilon \in X$ un valor regular de g_m suficientemente pequeño tales que

$$(2.1) \quad d(\nabla \tilde{j}, S, 0) = d(g_m, S, \epsilon).$$

Sea $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de funciones de clase C^1 que converge uniformemente a $Q\psi$. Para $(x + y) \in T_1 := T \cap (X \oplus Y_1)$ definamos

$$\Psi_m(x + y) = g_m(x) + y - \psi_m(x).$$

luego $\{\Psi_m\}_{m=1}^\infty$ converge uniformemente a $I + Q\eta$.

Como

$$D\Psi_m(x + y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_m}{\partial x}(x) & -\frac{\partial \psi_m}{\partial x}(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

y ϵ es un valor regular de g_m tenemos $\forall x \in g_m^{-1}(\epsilon)$,

$$\text{Det}(D\Psi_m(x + y)) = \text{Det}\left(\frac{\partial g_m}{\partial x}(x)\right) \neq 0.$$

Por lo tanto $\epsilon + 0$ es un valor regular de Ψ_m .

Luego

$$\begin{aligned} d(\nabla \tilde{j}, S, 0) &= d(g_m, S, \epsilon) = \sum_{x \in g_m^{-1}(\epsilon)} \text{sign}(\text{Det}\left(\frac{\partial g_m}{\partial x}(x)\right)) \\ &= \sum_{(x+y) \in \Psi_m^{-1}(\epsilon+0)} \text{sign}(\text{Det}(D\Psi_m(x + y))) = d(\Psi_m, T_1, \epsilon + 0) \\ &= d(\Psi_m, T_1, 0) = d(I + Q\eta, T_1, 0) = d(\Gamma, T, 0) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Demostración del Teorema A. Sea T como en el Lema 2.1. Como $(\Sigma - \overline{T}) \cap \{x + \psi(x); x \in X\} = \emptyset$ entonces ∇j no tiene ceros en $\Sigma - \overline{T}$. Por lo tanto utilizando la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder y los Lemas 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} d(\nabla j, \Sigma, 0) &= d(\nabla j, T, 0) + d(\nabla j, \Sigma - \overline{T}, 0) \\ &= d(\nabla j, T, 0) = d(\Gamma, T, 0) = d(\nabla \tilde{j}, S, 0). \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Demostración del Teorema B

Sea H el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (ver [1]). Sea $J: H \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) dx,$$

donde $F(\xi) = \int_0^\xi f(s) ds$.

Como $f(0) = 0$ se sigue que $u = 0$ es una solución del problema (1.6). Además, como $f'(0) < \lambda_1$ tenemos que 0 es un mínimo local de J .

Por hipótesis $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ por lo tanto existe una constante positiva C tal que

$$|f(u)| \leq C(1 + |u|).$$

Luego $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ (ver [9]) y

$$(3.1) \quad \langle \nabla J(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(u) \varphi) dx \quad \forall \varphi \in H.$$

En particular u es una solución débil (3.1) si y sólo si u es un punto crítico de J .

Denotemos por X el subespacio de H generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k\}$, donde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ son las primeras k funciones propias de $(-\Delta)$ con condición de frontera de Dirichlet. Sea Y el complemento ortogonal de X . Demostraremos a continuación que ∇J satisface la hipótesis (1.3) del Lema 1.1. Utilizando (3.1) y el teorema del valor medio tenemos

$$\langle \nabla J(x+y) - \nabla J(x+y_1), y - y_1 \rangle = \|y - y_1\|^2 - \int_{\Omega} f'(\xi)(y - y_1)^2.$$

Denotando por $\|\cdot\|_0$ la norma en $L^2(\Omega)$ y usando la hipótesis $f'(\xi) \leq \gamma < \lambda_{k+1}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(x+y) - \nabla J(x+y_1), y - y_1 \rangle &\geq \|y - y_1\|^2 - \gamma \|y - y_1\|_0^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_{k+1}}\right) \|y - y_1\|^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|z\| \geq \lambda_{k+1} \|z\|_0 \quad \forall z \in Y$. Por lo tanto ∇J satisface (1.3) con $m = (1 - \frac{\gamma}{\lambda_{k+1}}) > 0$ y $\alpha = 2$.

Por el Lema 1.1 se sigue que existe una función continua $\psi: X \rightarrow Y$ tal que la función $\hat{J}: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{J}(x) = J(x + \psi(x))$ es de clase C^1 y un

elemento $x_0 \in X$ es un punto crítico de $\hat{J}$ si y sólo si $x_0 + \psi(x_0)$ es un punto crítico de J .

Usando la hipótesis $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ se prueba que existen $b \in \mathbb{R}$ y $\bar{\gamma} > \lambda_k$ tales que $F(\xi) \geq \frac{\bar{\gamma}\xi^2}{2} + b$. Luego para $x \in X$ tenemos

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \int_{\Omega} F(x) \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{\bar{\gamma}}{2} \int_{\Omega} x^2 - b|\Omega|.$$

Como $\|x\|^2 \leq \lambda_k \|x\|_0^2 \quad \forall x \in X$, obtenemos

$$J(x) \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\lambda_k}\right) - b|\Omega| \longrightarrow -\infty \quad \text{cuando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

En vista de que $\hat{J}(x) \leq J(x)$ tenemos que

$$(3.2) \quad \hat{J}(x) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Como $\dim X < \infty$ existe $x_0 \in X$ tal que

$$\hat{J}(x_0) = \max_{x \in X} J(x + \psi(x)).$$

Haciendo $u_0 = x_0 + \psi(x_0)$ tenemos por el Lema 1.1 (iii) que $\nabla J(u_0) = 0$ y por lo tanto u_0 es una solución del problema (1.6). Nótese que $u_0 \neq 0$ porque x_0 es un máximo de $\hat{J}$ y 0 es un mínimo local de $\hat{J}$.

Demostraremos a continuación que si la solución u_0 , obtenida por el método de reducción, es aislada su grado local es $(-1)^k$. En efecto, sea $V \subset H$ una vecindad de u_0 que no contenga otros puntos críticos de J . Llamemos $S = \{x \in X; x + \psi(x) \in V\}$. Como $-\hat{J}$ tiene un mínimo local en x_0 , $d(\nabla(-\hat{J}), S, 0) = +1$ (ver [2]). Por lo tanto $d(\nabla \hat{J}, S, 0) = (-1)^k$. Por el Teorema A obtenemos $d(\nabla J, V, 0) = (-1)^k$.

Como $f'(0) < \lambda_1$ entonces 0 es un mínimo local de $\hat{J}$ y existe $\epsilon > 0$ tal que 0 es el único punto crítico de $\hat{J}$ en $B_{\epsilon}(0)$ y $d(\nabla \hat{J}, B_{\epsilon}(0), 0) = +1$ (ver [2]). Además, de la ecuación (3.2) se deduce que existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $d(\nabla \hat{J}, B_R(0), 0) = (-1)^k$.

Probemos ahora que existe un tercer punto crítico de $\hat{J}$ distinto de 0 y x_0 . Supongamos, por contradicción, que no exista otro punto crítico distinto de 0 y x_0 . Usando la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder tenemos que

$$(-1)^k = d(\nabla \hat{J}, B_R(0), 0) = d(\nabla \hat{J}, B_{\epsilon}(0), 0) + d(\nabla \hat{J}, B_R(0) - B_{\epsilon}(0), 0) = 1 + 1 = 2. \blacksquare$$

Lo cual es una contradicción. Se concluye así la demostración del Teorema B. $\checkmark$

Observación: Para otras aplicaciones del Teorema A sugerimos al lector consultar las referencias [5] y [6].

REFERENCIAS

1. R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. H. Amman, *A note on degree theory for gradient mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), 591-595.
3. A. Castro, *Métodos de reducción via minimax*, Primer simposio Colombiano de Análisis Funcional, Medellín, 1981.
4. A. Castro, *Non linear Functional Analysis*, Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1994.
5. A. Castro and J. Cossio, *Multiple solutions for a nonlinear Dirichlet problem*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 1554-1561.
6. A. Castro, J. Cossio, and J. M. Neuberger, *A minmax principle, index of the critical point, and existence of sign-changing solutions to elliptic boundary value problems*, Electronic Journal of Differential Equations **1998(1998)**, No. **02** (1998), 1-18.
7. A. C. Lazer and J. P. McKenna, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic and parabolic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. **107** (1985), 371-395.

UNIVERSITY OF TEXAS, SAN ANTONIO, TX 78249-0601, USA. ■

e-mail: castro@sphere.math.utsa.edu ■

JORGE COSSIO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, APARTADO AÉREO 3840
MEDELLÍN, COLOMBIA

e-mail: jcossio@perseus.unalmed.edu.co