**Lecturas Matemáticas**
*Volumen* **23** *(2002), páginas 117–119*

# Noticias

## La conjetura de Catalan ha sido demostrada

*Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1844.*

**Note**

extraite d'une lettre adressée à l'éditeur par Mr. *E. Catalan*, Répétiteur à l'École Polytechnique de Paris.

Je vous prie, Monsieur, de vouloir bien énoncer, dans votre recueil, le théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer complètement; d'autres seront peut-être plus heureux:

*Deux nombres entiers consécutifs, autres que* 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes; autrement dit: l'équation* $x^m - y^n = 1$, *dans laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admèt qu'une solution.*

Un matemático suizo, de origen rumano, Preda Mihailescu ha demostrado este año la conjetura hecha por el matemático belga Eugénie Charles Catalan en 1844, en carta enviada al *Journal de Crelle*:

> *Dos números enteros consecutivos, distintos de* $8 = 2^3$ *y* $9 = 2^3$, *no pueden ser potencias exactas.; dicho de otra manera, la ecuación*
>
> $$x^p - y^q = 1 \qquad (1)$$
>
> *donde las incógnitas son enteras y positivas sólo admite una solución.*

Es muy posible que Catalan no haya sido el primero en considerar el estudio de potencias consecutivas de números enteros, pues ya alrededor de 1320, Levi ben Gerson había demostrado que si dos potencias de 2 y 3 eran consecutivas, necesariamente ellas eran 8 y 9. Vale la pena mencionar que la conjetura se puede simplificar pues es posible suponer que $p$ y $q$ son ambos números primos impares y que $p < q$, como se concluye de los trabajos de Victor A. Lebesgue [*Sur l'impossibilité en nombre entiers de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, Nouv. Ann. Math. **9** (1850), 178–181] y de Ko Chao [*On the diophantine equation* $x^2 = Y^n + 1$, $xy \neq 0$, Sci. Sinica **14** (1965), 457–460]. (Véase: Yuri F. Bilu, *Catalan's conjecture* [after Mihailescu], Séminaire Bourbaki, 55éme année, 2002–2003, n$^{\text{o}}$ 909.) Un gran número de matemáticos se ocupó durante el siglo y medio siguiente en la búsqueda de una respuesta positiva o negativa a la conjetura. Una historia bien documentada sobre esta búsqueda y la vasta literatura que generó se encuentra en Paulo Ribemboim: *Catalan's Conjecture: are* 8 *and* 9 *the only consecutive powers?* [Boston, MA: Academic Press, 1999]. Cabe señalar que, como en el caso de la demostración del último teorema de Fermat, Mihailescu se apoya sobre las impostants contribuciones de otros matemáticos, especialmente en el trbajo de Robert Tijdeman (*On the equation of Catalan*, Acta Arith. **29** (1976), 197–209) quien demostró que si la conjetura no es cierta entonces a lo sumo existe un número finito de excepciones y el de Maurice Mignotte quien en 1999 demostró que si existe una solución de (1) distinta de la conocida, entonces $107 < p < 7.15 \times 10^{11}$ y $107 < q < 7.78 \times 10^{16}$. Este resultado condujo a un gran esfuerzo computacional en los años subsiguientes, esperando demostrar así la conjetura con la ayuda de los computadores. Pero, desde el punto de vista teórico, en la primavera de 2002 (abril), Mihailescu redujo el problema a lo siguiente: *Si existe una solución no trivial de (1), entonces los primos $p$ y $q$ deben cumplir simultáneamente las condiciones*

$$\begin{aligned} p^{q-1} &\equiv 1 (\text{mód}\, q^2) \ , \\ q^{p-1} &\equiv 1 (\text{mód}\, p^2) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

(Véase P. Mihailescu, *A class number free criterion for Catalan's conjecture*, J. Number Th., de próxima aparición). En la demostración de este resultado Mihailescu utiliza la siguiente desigualdad

$$\min\{p, q\} \geq 10^5 \ ,$$

obtenida por Mignotte & Roy después de varios meses de cálculo electrónico. Las parejas de números primos $p$ y $q$ que satisfacen (2) se dicen *pares dobles de Wieferich*. Se conocen solo seis de estos pares:

$$(2, 1093), (3, 1006003), (5, 1645333507),$$
$$(83, 4871), (911, 318917), (2903, 18787).$$

La demostración definitiva de la conjetura, Mihailescu la ha enviado para publicación bajo el título *Primary cyclotomic units and a proof for Catalan's conjecture*. Mientras aparecen publicados estos dos trabajos, el lector podrá sacar provecho del informe de Bilu mencionado antes, donde se hace una exposición de la demostración de Mihailescu. Quizás valga la pena mencionar que la imagen de Mihailescu como matemático no es muy ortodoxa. En efecto, él no es un matemático profesional en el sentido tradicional, pues antes de dedicarse a la matemática pura trabajaba en un empresa suiza en el análisis de huellas digitales, y sólo cuando frisaba los 42 años decidió emprender la elaboración de una tesis doctoral sobre el tema de la ciclotomía, finalizada en 1999, que luego tendría una importancia capital en su ataque, a la edad de 47 años, a la conjetura de Catalan.

Víctor Albis
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de colombia

## Premios

**El premio de la Hardy–Ramanjuan Society**. Le fue concedido a los profesores R. C. Baker, G. Harman & J. Pintz por su trabajo *The difference between consecutive primes. II*, publicado en los Proceedings of the London Mathematical Society **83** (2001), 532–562. El principal resultado es el siguiente:

**Teorema**. *Para todo $x > x_0$, el intervalo $[x-y, x]$ contiene por lo menos*

$$\left(\frac{9}{100}\right)\frac{y}{\log x}$$

*números primos si $y = x^{0.525}$.*

[Tomado del *Hardy–Ramanujan Journal*, **25** (2002).]