Teorema de Liouville-Hardy

Elio Eduardo Espejo Arenas
Universidad Nacional de Colombia

Resumen. Luego de hacer una exposición del problema de integrabilidad elemental, se expone una demostración (nueva) de un teorema clásico en esta rama de la matemática: El teorema de Liouville Hardy.

1. Introducción

En los textos de cálculo integral nos encontramos frecuentemente con integrales tales como $\int e^{x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ o $\int \frac{e^x}{x}dx$ y otras más, las cuales no pueden ser halladas por ninguno de nuestros métodos de integración, y de hecho se puede demostrar que no es posible mediante ningún método.

Algo sorprendente es el desconocimiento casi general que se tiene sobre este tema, que fácilmente sale a relucir en una clase de cálculo integral. Tal vez esto se deba al punto de vista práctico, ya que el cálculo de tales integrales, se necesita básicamente para encontrar el valor de integrales definidas y para esto existen excelentes técnicas en análisis numérico que resuelven el problema. Sin embargo, debido a las investigaciones que se están desarrollando en álgebra simbólica en países como los Estados Unidos y Alemania, desde hace ya unos veinte años se ha renovado fuertemente el interés en encontrar algoritmos que nos permitan saber si una integral dada es expresable o no en términos de "funciones elementales" (es decir funciones que pueden ser obtenidas mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces usando solo exponenciaciales, logaritmos, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas).

La tesis doctoral de J. R. SLAGLE (1961), ([8]), fué el primer trabajo que llamó la atención a los investigadores de manipulación algebraica. El método empleado fué plenamente heurístico y en realidad es una aplicación de las técnicas de intelegencia artificial al problema de integración. La eficiencia del programa desarrollado por SLAGLE es semejante a la de un estudiante promedio de cálculo. El primer trabajo computacional que hace uso de una matemática rigurosa es la tesis del investigador del MIT Joel Moses, Symbolic Integration, ([4]). Al final de la década de los sesenta aparece uno de los resultados más importantes que se tienen sobre este tema: "El Algoritmo de Risch" ([5]) un procedimiento de gran generalidad que permite decidir para una gran clase de funciones la posibilidad de integración. La principal desventaja del algoritmo de Rish es su complejidad, por lo cual continúan los esfuerzos por encontrar métodos mas eficientes. Las investigaciones actuales buscan encontrar algoritmos semejantes al de Risch que permitan ampliar nuestro conjunto de funciones elementales, incorporando funciones tales como la función error, la función seno integral y otras más. Entre los investigadores mas notables de la actualidad se destacan los nombres de JOEL MOSES, M. SINGER, J.H. DAVENPORT, G. W CHERRY y M. BRONSTEIN.

En este artículo, luego de exponer el problema de integración finita y mostrar su carácter algebraico, se expone una generalización del teorema de HARDY-LIOUVILLE, el cual es un criterio de integrabilidad para funciones de la forma $f(z)\ln z$, siendo f una función racional. La técnica que se seguirá es semejante a la que el matemático ROSENLICHT usa en ([6]) para demostrar el teorema de Liouville. Es importante decir que aunque la generalización que se expone es interesante por la facilidad con que se puede manejar, el tipo de funciones que se estudiarán están incluidas en el *algoritmo de Risch.*

2. **Algebra Diferencial**

El estudio de la diferenciación como una operación algebraica (y no como una operación analítica) es lo que constituye el algebra diferencial, un campo de la matemática fundado por Joseph Fels Ritt, aunque se encuentran los rudimentos de esta en los trabajos de Liouville y Laplace. A continuación se exponen algunos conceptos fundamentales de algebra diferencial con el fin de desarrollar las herramientas necesarias para demostrar el teorema de Liouville-Hardy.

Definición 1.1. Llamaremos *Campo Diferencial* a un campo F, junto con una operación "derivación" sobre F, la cual es una aplicación de F en si mismo, usualmente denotada $a \to a'$, tal que $(a+b)' = a' + b'$ y $(ab)' = a'b + ab'$ para todo $a, b \in F$.

Consecuencias inmediatas son que $(a/b)' = (ab' - a'b)/b^2$ si a,$b \in F$, $b \neq 0$, $(a^n)' = na^{n-1}a'$ para todos los enteros n. Además $0' = (0+0)' = 0' + 0'$ de donde $0' = 0$ y $1' = (1^2)' = 2 * 1 * 1'$, así $1' = 0$. Por lo cual $K = \{c \in F : c' = 0\}$, es un subcampo de F, como se puede comprobar directamente, el cual llamaremos campo de constantes de F. Por ejemplo si $r \in K$, $(r \neq 0)$ entonces existe $r^{-1} \in F$, tal que $r * r^{-1} = 1$; derivando a ambos lados, obtenemos $r' * r^{-1} + r * (r^{-1})' = 1'$, de donde $r * (r^{-1})' = 0$ y por lo tanto $(r^{-1})' = 0$, es decir $r^{-1} \in K$.

Definición 1.2. Si a,b son elementos del campo diferencial F, a no nula, llamaremos a 'a' *exponencial* de b o a b un *logaritmo* de a, si $b' = a'/a$.

Definición 1.3. Por una "*Extensión diferencial*" de un campo diferencial F entenderemos, por supuesto un campo diferencial, el cual es un campo extensión de F cuya derivación extiende la derivación sobre F.

El siguiente lema es un resultado conocido en álgebra diferencial y será básico en la demostración del teorema de Liouville-Hardy.

Lema 1. *Sea F un campo diferencial, $F(t)$ una extensión n diferencial de F con el mismo subcampo de constantes, t trascendente sobre F, y $t' \in F$; entonces para cualquier polinomio $f(t) \in F[t]$ de grado positivo, $(f(t))'$ es un polinomio en $F[t]$ de grado menor en uno que el de $f(t)$ o del mismo grado, según si el coeficiente dominante de $f(t)$ es o no una constante.*

Prueba: Sea $t' = b$ y $n > 0$ el grado de $f(t)$, de modo que $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$, con $a_0, \ldots, a_n \in F$, $a_n \neq 0$. Entonces

$$(f(t))' = a_n' t^n + (na_n b + a_{n-1}')t^{n-1} + \cdots$$

es un polinomio en el anillo $F[t]$, de grado n si a_n no es constante. Si a_n es constante y $na_n b + a_{n-1}' = 0$, entonces $(na_{n-1}t + a_{n-1})' = na_n b + a_{n-1}' = 0$ así que $na_n t + a_{n-1}$ es una constante, por lo tanto un elemento de F (Acá debemos tener en cuenta la igualdad entre el subcampo de constantes de F y de $F(t)$), así que $t \in F$, lo que contradice la hipótesis de que t es trascendente sobre F. Es decir si a_n es constante, $(f(t))'$ tiene grado $n - 1$.

Definición 1.4. Sea F un campo diferencial. Definimos una *extensión elemental* de F como un campo extensión diferencial de F la cual es obtenida por sucesivas adjunciones de elementos que son algebraicos, o logarítmicos, o exponenciales, esto es, un campo extensión diferencial de la forma $F(t_1, \ldots, t_N)$, donde para cada $i = 1, \ldots, N$, el elemento t_i es o bien algebraico sobre el campo $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$ o el logaritmo o la exponencial de un elemento de $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$. Observemos que cada campo intermedio $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$ es un campo diferencial y una extensión elemental de F.

Ahora tenemos las herramientas necesarias para dar la definición formal de función elemental:

Definición 1.5 Sea F un campo diferencial. Diremos que $f \in F$ tiene *integral elemental* sobre F si existe una extensión elemental E de

F y $g \in E$ tal que $g' = f$. Una *función elemental* es cualquier función de cualquier extensión elemental de $\mathbf{C}(\mathbf{z})$.

De la definición anterior se desprende que las funciones trigonométricas y sus inversas son elementales, puesto que estas se pueden expresar como el logarítmo de funciones algebraicas. Se sigue que la integral de una función racional es elemental, ya que es combinación de logaritmos, tangentes inversas y funciones racionales.

El problema de integración en un número finito de términos lo podemos ahora formular de una manera precisa: Dado un campo diferencial F y $f \in F$, ¿Cómo decidir en un número finito de pasos si f tiene integral elemental sobre F y cómo calcular una de estas integrales en caso de tenerla?

El siguiente teorema es un conocido criterio de integrabilidad y es el eje central de este artículo.

Teorema de Liouville-Hardy. *Si $f(z)$ es una función racional, entonces $\int f(z) \ln z dz$ es elemental si y solo si existe una función racional $h(z)$ y una constante M tal que $f(z) = M/z + h'(z)$.*

La demostración de este teorema, se puede encontrar en el artículo de Marchisotto y Zakeri, ([3]) en el cual el método usado es plenamente analítico (se usa series de Taylor en varias variables, ecuaciones diferenciales , etc.). A continuación se expondrá una demostración totalmente algebraica y que generaliza el teorema. Este resultado es aún mas interesante si tenemos en cuenta que las investigaciones actuales se encaminan a extender el conjunto de las funciones elementales incluyendo entre estas la función error, la función seno integral y logaritmo integral; los criterios encontrados son en su mayoría para funciones de la forma fe^g (f y g racionales, consultar [7]) y la demostración que se presenta da un posible camino para extender estos criterios a funciones del tipo $f \ln g$.

La principal herramienta usada en la demostración es el siguiente teorema (el más importante en integración elemental), la demostración se puede encontrar en [6].

3. Teorema de Liouville

Sea F un campo diferencial de característica cero y $\alpha \in F$. Si la ecuación $y' = \alpha$ tiene una solución en alguna extensión elemental diferencial de F con el mismo subcampo de constantes, entonces existen constantes $c_1, \ldots, c_n \in F$ y elementos $u_1, \ldots, u_n, v \in F$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

4. Extensión del teorema de Liouville-Hardy

En primer lugar observemos que $\ln g$ no es algebraico sobre $C(z)$, si $g \in \mathbf{C}(\mathbf{z})$ no es constante:

Supongamos por el contrario que $\ln g$ es algebraico sobre $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ y sea P su polinomio mínimo (el cual supondremos mónico), entonces $P(\ln g) = 0$ y no existe un polinomio de grado menor que el de P con esta propiedad. Ahora derivemos la igualdad $P(\ln g) = 0$,obtenemos $P'(\ln g)g'/g = 0$, de donde $P'(\ln g) = 0$ y por el lema 2.1, sabemos que P' es un polinomo de grado menor que el de P, lo que contradice que P es el polinomio mínimo de $\ln g$ y por lo tanto $\ln g$ no es algebraico sobre $\mathbf{C}(\mathbf{z})$.

Teorema

Sea $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ es el campo las funciones racionales sobre los complejos y f,$g \in \mathbf{C}(\mathbf{z})$, entonces $\int f(z) \ln g(z) dz$ es elemental si y solo si existe $h \in \mathbf{C}(\mathbf{z})$ y una constante $M \in \mathbf{C}$ tales que $f(z) = M(g'/g) + h'$.

Demostración:

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{C}(\mathbf{z})$ y $\ln g = t$, y consideremos el campo $\mathbf{F}(\mathbf{t})$=$\mathbf{C}(\mathbf{z}, \mathbf{t})$[1]. Si $\int f(z) \ln g(z) dz$ es elemental , por el Teorema de Liouville tendremos

[1] Este campo lo podemos considerar como un campo diferencial en donde la operación “derivación” es la que conocemos en cálculo diferencial elemental.

que

$$ft = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \tag{1}$$

con $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ y $u_1, \ldots, u_n, v \in F(t)$. Observamos que

1. Cada $u_i(t)$ puede ser expresado como un cociente u/v de dos polinomios en $F[t]$ y como $(u/v)'/(u/v) = u'/u - v'/v$ podemos reescribir la expresión para ft y asumir que cada $u_i(t) \in F[t]$.
2. Si algún $u_i = UV$, con U y $V \in F[t]$, entonces
$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{(UV)'}{UV} = \frac{U'}{U} + \frac{V'}{V}$$
de modo que podemos pensar en los u_i como elementos de F o de $F[t]$ los cuales son diferentes, mónicos e irreducibles y que ninguna constante c_i es nula.

Por el Lema 2.1, los u_i' están también en $F[t]$ y tienen grado menor que el de u_i, por lo cual $u_i \nmid u_i'$ y la fracción u_i'/u_i está ya en forma irreducible. Ahora por un razonamiento de reducción al absurdo se probará que $v \in F[t]$:

Si una expresión de la forma f/u_i^r ocurre en la expresión de v en fracciones parciales y r es el máximo exponente para u_i, entonces v' consistirá de varios términos en cuyo denominador figura u_i a lo mas r veces y además $(1/u_i^r)'f = -rfu_i'/u_i^{r+1}$. Puesto que $u_i \nmid fu_i'$, (Pues de lo contrario al ser u_i y f coprimos, u_i dividiría u_i') vemos que un término con denominador u_i^{r+1} aparece en v'. Por lo tanto, si algún $u_i \in F[t] - F$ apareciera en el denominador de v, aparecería en ft (por 1) lo cual es absurdo. En consecuencia ningún $u_i \in F[t] - F$ aparece en el denominador de v y $v(t) \in F[t]$.

Ahora bien, $\sum c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F$ (Si en el miembro derecho de 1, alguna fracción tiene en el denominador un $h(t) \in F[t] - F$, necesariamente esta deberá anularse con algún otro término de esta suma, para que la suma pueda ser ft y como $v(t) \in F[t]$ estas cancelaciones no son posibles, así que necesariamente cada $u_i \in F$), por lo cual (por 1) v' es un polinomio en t de grado uno y en consecuencia (Lema 2.1) v es un polinomio de grado menor o igual a dos. Sea $v(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2$, entonces $v'(t) = v_0' + v_1' t + v_1 t' + v_2' t^2 + 2v_2 t t' = (v_0' + v_1 t') + (v_1' + 2v_2 t')t + v_2' t^2$. Al igualar los coeficientes de las potencias en t en 1 se obtiene[2],

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v_0' + v_1 t' = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v_0' + v_1 \frac{g'}{g} = 0 \tag{2}$$

$$f = v_1' + 2v_2 t' = v_1' + 2v_2 g'/g \tag{3}$$

$$v_2' = 0 \tag{4}$$

por 4, v_2 es constante. Escribiendo $v_1 = h$ y $2v_2 = M$ (constante), 3 queda que

$$f(z) = M(g'/g) + h'$$

Para terminar debemos ver que si f tiene la forma

$$f(z) = M(g'(z)/g(z)) + h'(z),$$

entonces $\int f(z) \ln g(z) dz$ es elemental[3]. Usando integración por partes obtenemos que

$$\int f(z) \ln g(z) dz = \int \left(h'(z) \ln g(z) + M \frac{g'(z)}{g(z)} \ln g(z) \right) dz =$$
$$h(z) \ln g(z) - \int (h(z) g'(z)/g(z)) dz + M(\ln g(z))^2/2,$$

donde $\int (h(z)g'(z)/g(z))dz$ es elemental puesto que $h(z)g'(z)/g(z)$ es una función racional.

Corolario. *Si $f, g \in \mathbf{C}(\mathbf{z})$ entonces $\int f(z) \arctan g(z) dz$ es elemental si y solo si existe $h \in \mathbf{C}(\mathbf{z})$ y una constante $M \in \mathbf{C}$ tales que $f = Mg'/(1+g^2) + h'$*

[2] Observemos que si $\ln g$ fuera algebraico sobre $C(z)$ la igualdad entre los coeficientes de t no siempre sería válida.

[3] Lo cual también probará que 2 no tiene relevancia alguna para el teorema que se está demostrando, aunque en esta igualdad aparezcan los términos v_0' y v_1.

Demostración: Podemos tomar $\arctan g(z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{g(z)-i}{g(z)+i}$ y además ignorar la constante $1/2i$ en el análisis de la integración. En consecuencia al aplicar la extensión del teorema de Liouville-Hardy, tendremos que $\int f(z)\arctan g(z)dz$ es elemental si y solo si existe una constante M_0 y $h \in \mathbf{C(z)}$ tal que,

$$f(z) = M_0(\left(\frac{g(z)-i}{g(z)+i}\right)' / \left(\frac{g(z)-i}{g(z)+i}\right) + h'(z) =$$

$$M_0\left(\frac{g'(z)}{g(z)+i} - \frac{g'(z)}{g(z)-i}\right) + h'(z) = \frac{Mg'(z)}{1+g^2(z)} + h'(z)$$

Veamos algunos ejemplos de la aplicabilidad de este teorema:

Ejemplo 1. $\int \frac{\ln(z^n+1)}{z}\mathbf{dz}$, n un entero positivo. Si $\int \frac{\ln(z^n+1)}{z}dz$ es elemental entonces existen $P,Q \in C[z]$ (coprimos) tales que

$$\frac{1}{z} = M\frac{nz^{n-1}}{z^n+1} + (\frac{P}{Q})' = M\frac{nz^{n-1}}{z^n+1} + \frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$$

o lo que es equivalente,

$$Q^2(z^n+1) = Mnz^nQ^2 + (z^n+1)z(P'Q-PQ')$$

reordenando,

$$Q(Q(z^n+1) - Mnz^nQ - (z^n+1)zP') = -(z^n+1)zPQ'. \tag{5}$$

Supongamos que Q no es constante y que una de sus raíces α es diferente de cero y de cualquiera de las raíces de z^n+1, y sea m su multiplicidad, entonces la última igualdad nos lleva a una contradicción, puesto que α es un cero del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$, y un cero del lado derecho de multiplicidad menor que.m Por lo tanto α debe ser o cero o una raíz de z^n+1, en este caso obtenemos nuevamente una contradicción, ya que α será una raíz del lado izquierdo de 5 de multiplicidad $\geq m+1$ y un cero del lado derecho de multiplicidad menor o igual a m. Concluimos que Q debe ser una constante, la cual podemos suponer igual a 1. La igualdad 5 se transforma en

$$z^n+1-Mnz^n = (z^n+1)zP'.$$

que es imposible puesto que $grad(z^n + 1 - Mnz^n) < grad((z^n + 1)zP')$. Por lo tanto no existen los P y Q buscados y $\int \frac{\ln(z^n+1)}{z}dz$ no es elemental para ningún n entero positivo.

Ejemplo 2. $\int \mathbf{z} \tan \mathbf{zdz}$ Como $\tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$, haciendo el cambio de variable $z = i \ln t$, la integral se transforma en $\int \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} \ln t dt$ y si esta es elemental tendremos que para ciertos P,$Q \in \mathbf{C}[\mathbf{t}]$ y una constante M,

$$\frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} = \frac{M}{t} + (\frac{P}{Q})' = \frac{M}{t} + \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

De donde

$$Q^2(t^2 - 1) = M(t^2 + 1)Q^2 + t(t^2 + 1)(P'Q - PQ') \tag{6}$$

Reordenando,

$$Q(Q(t^2 - 1) - M(t^2 + 1)Q - t(t^2 + 1)P') = -t(t^2 + 1)PQ'$$

Supongamos que Q no es constante y que $\alpha \neq 0$, i y $-i$ es una raíz de Q y que su multiplicidad es m, la última igualdad nos conduce a una contradicción puesto que α sería una raíz del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$ y un cero del lado derecho de multiplicidad $< m$. Luego $\alpha \in \{0, i, -i\}$. En este caso nuevamente por 6 obtenemos una contradicción, α es una raíz del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m+1$ y una raíz del lado derecho de multiplicidad $< m + 1$. Se sigue que Q debe ser una constante, que podemos suponer igual a 1 y la igualdad 6 se convierte en

$$(t^2 - 1) - M(t^2 + 1) = t(t^2 + 1)P'$$

lo cual es imposible puesto que en el lado izquierdo tenemos un polinomio de grado ≤ 2 y en lado derecho un polinomio de grado > 3. Concluimos que no existen polinomios P y $Q \in C[t]$ que satisfagan 6, por lo cual $\int$ztan z no es elemental.

Ejemplo 3. $\int \frac{\ln z dz}{P(z)}$, P un polinomio sin raíces de multiplicidad > 1. Si la integral dada es elemental existen polinomios R y Q (coprimos) tales que $\frac{1}{P} = \frac{M}{z} + (\frac{R}{Q})' = \frac{M}{z} + \frac{R\prime Q - RQ'}{Q^2} = \frac{MQ^2 + z(R'Q - RQ')}{zQ^2}$, de donde

$$zQ^2 = (MQ^2 + z(R'Q - RQ'))P$$

(7) Reordenando, $\quad Q(zQ - MPQ - zR'P) = -zPRQ'$

Supongamos que Q no es constante, denotemos por α una raíz de Q de multiplicidad m y consideremos los casos que pueden suceder en 7:

1. α es diferente de cero y de cualquier raíz de P, entonces α es un cero del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$ y un cero del miembro derecho de multiplicidad $< m$.
2. α es raíz de P diferente de cero, entonces, α es raíz del miembro izquierdo de 7, con multiplicidad $\geq m+1$ y de multiplicidad $< m+1$ en le miembro derecho..
3. $\alpha = 0$, en este caso tendremos dos posibilidades: α es raíz de P, en este caso la multiplicidad de α en el miembro izquierdo es $> m+1$ y en el miembro derecho es $\leq m+1$; la segunda posibilidad es que α no sea raíz de P, en cuyo caso, la multiplicidad de α en el miembro izquierdo de 7 es $> m$ y en el miembro izquierdo la multiplicidad es $\leq m$.

En cualquiera de los casos analizados hemos llegado a una contradicción por lo cual concluimos que Q debe ser una constante que podemos suponer igual a uno y así 7 se reduce a,

$$z = P(M + zR') \tag{8}$$

Observando el grado de los polinomios que aparecen en cada miembro de igualdad, vemos tenemos tan solo tenemos las dos siguientes posibilidades,

1. $grad(P) = 0$, en cuyo caso $P = P_0$ es constante y la integral es elemental, por ejemplo, $\int \frac{\ln z}{P_0} dz = (zlnz - z)/P_0$.
2. $grad(P) = 1$ y $R' = 0$, en este caso P es de la forma $P = z + a$, siendo a una constante, remplazando esta expresión en 8 queda

$$z = (z + a)M = Mz + aM$$

de donde $M = 1$ y $aM = 0$, o bien $a = 0$, así $P = z$ y la integral en este caso es elemental, por ejemplo, $\int \frac{\ln z}{z} dz = \ln(\ln z)$.

Hemos así demostrado que la integral dada es elemental solamente cuando P es constante o $P = z$.

Referencias

[1] Bronstein, M. *Symbolic Integration I,* Springer, Heidelberg. 1996.

[2] Fitt, A. and Hoare, G. *The closed-form integration of arbitrary function*, Mathematical Gazette (1993), pp 227-236.

[3] Marchisotto E. and Zakeri G. *An invitation to integration in finite terms*, College Mathematical Journal (1994), pp 295-308

[4] Moses, J. *Symbolic Integration*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1967).

[5] R. Risch. *The Problem of Integration in Finite Terms*, Transactions of the American Mathematical Society 139 (1969), 167-189.

[6] Rosenlicht, M. *Integration In Finite Terms*, Amer. Math. Month. 79 (1972) pp. 963-972

[7] Singer. M, Saunders B. y Caviness B., *An Extension Of Liouville's Theorem On Integration In Finite Terms*, SIAM Journall of Computing 14 (1985) 966-990.

[8] Slagle, J.R. *A Heuristic Program that Solves Symbolic Integration Problem in Freshman Calculus, Symbolic Automatic Integrator (SAINT)*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1961).