

## Simplificación de presentaciones de grupos

MIKE HILDEN

University of Hawai, Honolulu, EE. UU.

DÉBORA TEJADA & MARGARITA TORO

Universidad Nacional de Colombia, Medellín

RESUMEN. En este artículo queremos realzar el papel que pueden jugar juntas la topología y el álgebra cuando se trata de simplificar presentaciones de grupos. El principal resultado es una prueba diferente al teorema que dice que todo nudo de número de túnel 1 admite una presentación con dos generadores y una sola relación que es capicúa (palabra que se lee lo mismo de izquierda a derecha que de derecha a izquierda). Esta prueba se desprende como corolario de otros dos resultados; uno algebraico, que muestra cómo una relación capicúa puede reescribirse como una capicúa con una letra extra, y otro topológico, el cual relaciona capicúas con curvas simétricas en cuerpos de  $n$ -asas.

*Key words and phrases.* Fundamental group, tunnel number, knot, knot group, presentation, palindrome.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary 57M25. Secondary 57M05.

ABSTRACT. This article deals with the interplay between topology and algebra as relates to the problem of simplification of group presentations. As a main result, we obtain a different proof of the theorem that says: “If  $K$  is a tunnel number one knot, then its fundamental group has a two generator and one relator presentation in which the relator is a palindrome”. This proof comes from two results: one algebraic result that shows that a palindrome can be written as a palindrome with an extra letter, and one topological result that connects palindromes with symmetric curves in a handlebody.

## 1. Presentaciones de grupos y grupos fundamentales

Una presentación de un grupo nos permite conocer, no solamente, un conjunto de generadores, sino también las relaciones que se cumplen entre ellos. Uno de los problemas más importantes que enfrenta el estudio de los grupos es el de poder decidir cuando dos presentaciones diferentes corresponden a grupos isomorfos. Por el teorema de Tietze (véase KUROSH, [5], pp.75), dadas dos presentaciones de un mismo grupo es posible, al menos teóricamente, pasar de una presentación a la otra a través de un número finito de pasos. La dificultad en este proceso, se debe a que no es posible dar un algoritmo que permita llevar a cabo este proceso de una forma ordenada y exitosa. El estudio de un grupo puede simplificarse mucho si se logra reducir al máximo el número de generadores o el número de relaciones.

En este estudio, la topología puede darle una mano al álgebra. Por ejemplo, si se conoce que un grupo  $G$  es el grupo fundamental de un espacio topológico dado, al hacerle un homeomorfismo a dicho espacio, el grupo fundamental no cambia, pero si el grupo está inicialmente dado con una presentación, es posible seguirle el rastro tanto a los generadores como a las relaciones al aplicar el homeomorfismo y de esta manera encontrar otra presentación del mismo grupo fundamental, la cual podría ser más simple que la inicial.

A continuación, recordamos ejemplos de espacios topológicos cuyos grupos fundamentales tienen presentaciones con un número finito de generadores y relaciones.

Dado un grupo libre finitamente generado con  $n$  generadores, son muchos los espacios (no necesariamente homeomorfos entre sí) que tienen un grupo fundamental isomorfo a éste. Entre ellos podemos mencionar, por ejemplo, un cuerpo de  $n$ -asas; el complemento de un cuerpo de  $n$ -asas en  $S^3$ ;  $n$  círculos  $S^1$  con un único punto en común entre todos ellos o una esfera perforada en  $n + 1$  puntos.

Un grupo con un número finito de generadores y una única relación, que involucra todos los generadores, es isomorfo al grupo fundamental del espacio topológico obtenido a partir de un polígono, cuyos lados están marcados (se entiende que lados con la misma marca están identificados) con los nombres de los generadores y orientados de tal manera que al recorrerlos en un sentido (por ejemplo, según las manecillas del reloj) se lea precisamente la relación. Consideremos los espacios descritos en las figuras siguientes:

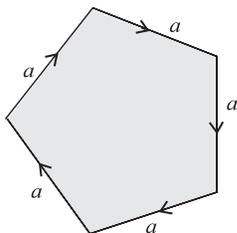


FIGURA 1a)

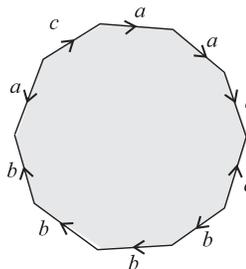


FIGURA 1b)

El teorema de van Kampen permite probar que el grupo fundamental del espacio descrito en la Figura 1a) es  $\langle a : a^5 \rangle$  y el de la Figura 1b) es  $\langle a, b, c : a^3c^{-1}b^4a^{-1}c \rangle$ .

Teniendo en cuenta esta anotación, conjuntamente con el *teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados* y con el hecho de que el grupo fundamental de un producto cartesiano de espacios es el producto de sus grupos fundamentales, es posible construir espacios topológicos que tengan como grupo fundamental cualquier grupo abeliano finitamente generado dado. Un espacio topológico cuyo grupo fundamental es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$  es, por ejemplo, el de la figura siguiente:

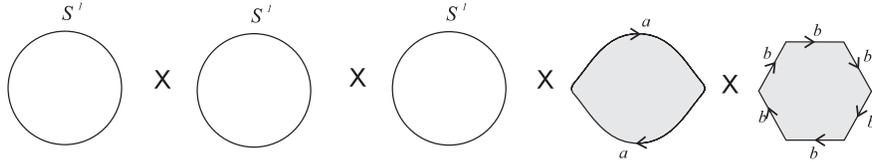


FIGURA 2

Consideremos un espacio topológico junto con una presentación de su grupo fundamental. La operación algebraica de hacer el cociente de este grupo al anular, algún elemento, se puede traducir topológicamente como la construcción de un nuevo espacio obtenido del primero al unirle un disco, pegándole la frontera del disco a lo largo de una curva que sea homotópica al elemento que queremos anular.

Por ejemplo, sea  $X = S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ , entonces  $\pi_1(X)$  es el grupo libre  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ , donde los  $\alpha_i$  los describimos en la siguiente figura:

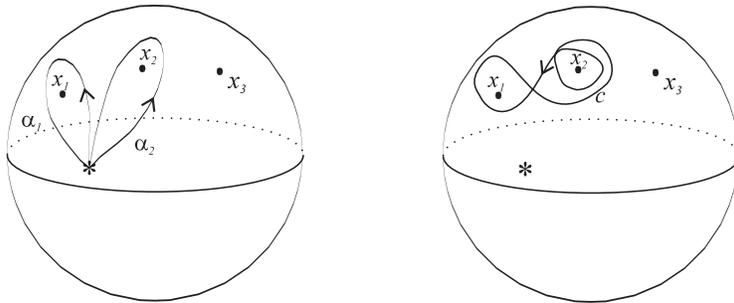


FIGURA 3

Y un espacio topológico cuyo grupo fundamental es  $\langle \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_2^2 \alpha_1^{-1} \rangle$ , se obtiene al pegar la frontera de un disco a lo largo de la curva  $c$  (véase la figura anterior) que es homotopa a  $\alpha_2^2 \alpha_1^{-1}$ . Otro espacio que tiene grupo fundamental isomorfo al anterior es el triángulo cuyos lados aparecen identificados como en la figura:

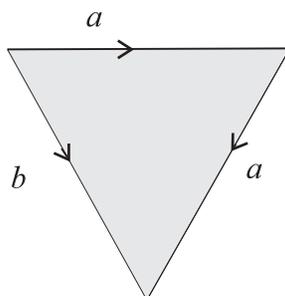


FIGURA 4

En realidad, no es difícil construir un espacio topológico que tenga como grupo fundamental un grupo que admita un número finito de generadores y un número finito de relaciones, sin embargo, el trabajo de hacer homeomorfismos sobre estos espacios no siempre es fácil y es más difícil, aún, seguirle el rastro a los generadores y a las relaciones que aparecen en la presentación de su grupo fundamental. Para comenzar este estudio, por simplicidad, nos proponemos estudiar grupos que tengan sólo dos generadores y una única relación, la cual tenga una simetría especial.

### 1. Grupos fundamentales que admiten una presentación con relaciones capicúas

Recordemos que una relación (palabra o frase) que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda es llamada una *capicúa* o *palíndromo*. Entenderemos por *semicapicúa*, una palabra o frase que si le quitamos la primera (o última) letra nos queda una capicúa.

Sabemos que el grupo fundamental de un cuerpo de  $n$ -asas es un grupo libre con  $n$  generadores, entonces para obtener un espacio topológico cuyo grupo fundamental tenga  $n$  generadores y una relación dada, bastará pegarle un disco por su frontera a lo largo de una curva homotópica a la curva descrita por la relación deseada. En particular, mostraremos aquí que para conseguir que la relación sea capicúa (o semicapicúa) es

suficiente pegar el disco a una curva simétrica que esté sobre la superficie del cuerpo de  $n$  asas.

Diremos que dos curvas  $C_1, C_2$  en  $\mathbb{R}^3 + \infty$  son *simétricas entre sí* respecto al eje  $y$  si  $\rho(C_1) = C_2$ , donde  $\rho$  es la rotación de  $180^\circ$  alrededor de dicho eje. Nótese que dadas dos curvas simétricas  $C_1$  y  $C_2$ , es posible parametrizarlas de tal manera que  $\rho(C_1(t)) = C_2(b - (t - a))$ , para todo  $t \in [a, b]$ . En este caso se dice que las curvas están *simétricamente parametrizadas entre sí* con respecto al eje  $y$ . Si para una curva  $C$  (resp. una curva  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada) se tiene que  $\rho(C) = C$  (resp.  $\rho(C(t)) = C(b - (t - a)), t \in [a, b]$ ), se dice que la curva es *simétrica consigo misma* (resp. está *simétricamente parametrizada consigo misma*) respecto al eje  $y$ . En lo que sigue, cuando mencionemos curvas simétricas se entenderán que lo son respecto al eje  $y$ .

Sea  $M$  una superficie de género  $g$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponerla embebida en  $\mathbb{R}^3 + \infty = S^3$ , simétrica con respecto al eje  $y$  y de tal manera que cada asa  $i$  sea simétrica con respecto al punto  $(0, \frac{2i-1}{2}, 0)$  y esté limitada por los planos  $P_j$ , ( $j = i - 1, i$ ), donde  $P_j = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = j\}$ . Véase Figura 5.

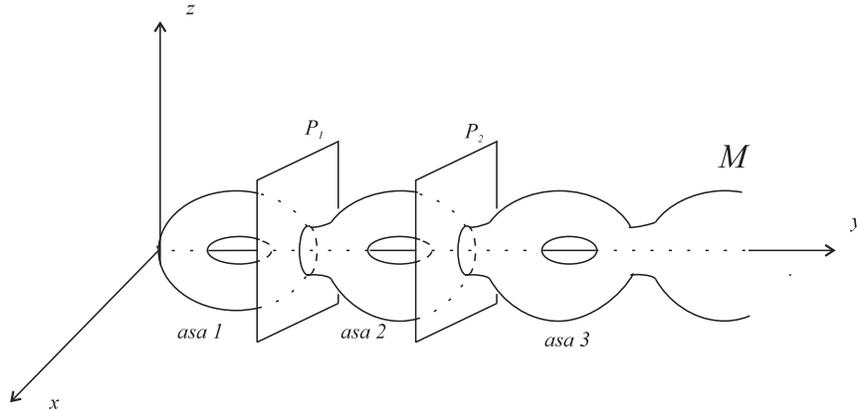


FIGURA 5

Denotaremos por  $H$  la clausura del “exterior” (es decir  $H$  contiene al punto  $\infty$ ) de la superficie  $M$ ; por  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) los generadores del

grupo fundamental de  $H$ ; por  $* = (0, 0, 2)$  el punto base y por  $P_{yz}$  el plano  $yz$ . Véase Figura 6.

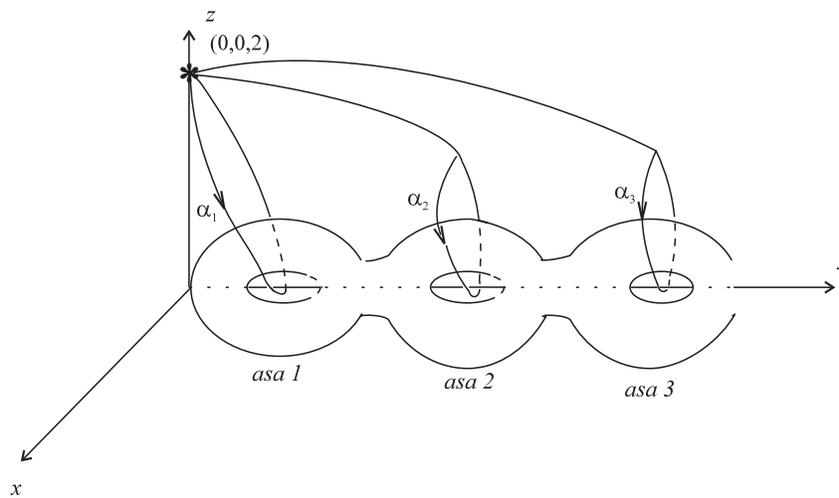


FIGURA 6

Sea ahora  $C : [0, 1] \rightarrow M$  una curva simétricamente parametrizada, consigo misma, tal que  $C(0) = C(1) = (0, y_0, 0)$  ( $y_0 \geq 0$ ). Por la compacidad de  $[0, 1]$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dicha curva corta los planos  $P_i$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ) en un número finito de puntos.

Partiendo del punto  $(0, y_0, 0)$  recorramos las curvas  $C$  y  $C^{-1}$  en forma simétrica y simultánea hasta el punto  $C(\frac{1}{2})$ . Si llevamos el récord de los puntos de corte de  $C$  y  $C^{-1}$  con los planos  $P_i$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ), encontraremos dos listas  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  y  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}$ , donde existe  $t \in (0, 1)$  tal que  $x_j = C(t)$  y  $x'_j = C^{-1}(t) = C(1-t)$  (para todo  $j$  entre 1 y  $k$ ). Véase Figura 7.

Observamos que estos puntos dividen la curva  $C$  en tramos simétricos completamente comprendidos en alguna de las asas. Para  $1 \leq j \leq k$ , denotemos por  $C_{j(j+1)}$  (resp.  $C'_{j(j+1)}$ ) el tramo entre  $x_j$  y  $x_{j+1}$  (resp. entre  $x'_{j+1}$  y  $x'_j$ ), por  $C_{11}$  el tramo obtenido al unir el tramo que comienza en  $x'_1$  y termina en  $C(0)$  con el tramo que comienza en  $C(0)$  y termina

en  $x_1$  y por  $C_{kk}$  el tramo que comienza en  $x_k$  pasa por  $C(\frac{1}{2})$  y termina en  $x'_k$ . Nótese que las curvas  $C_{j(j+1)}$  y  $C'_{j(j+1)}$  son simétricas entre sí para todo  $j$  entre 1 y  $k-1$  y por lo tanto pueden reparametrizarse en forma simétrica.

Para  $j$  entre 1 y  $k$ , sea  $\delta_j : [0, 1] \rightarrow H$  (resp.  $\delta'_j : [0, 1] \rightarrow H$ ) un camino que una el punto base  $*$  con el punto  $x_j$  (resp.  $x'_j$ ) y tal que  $\delta_j([0, 1]) \subset \{(x, y, z) | x \geq 0\}$  (resp.  $\delta'_j([0, 1]) \subset \{(x, y, z) | x \leq 0\}$ ). A estos caminos les exigimos, además, que sean simétricos entre sí con respecto al plano  $P_{yz}$ .

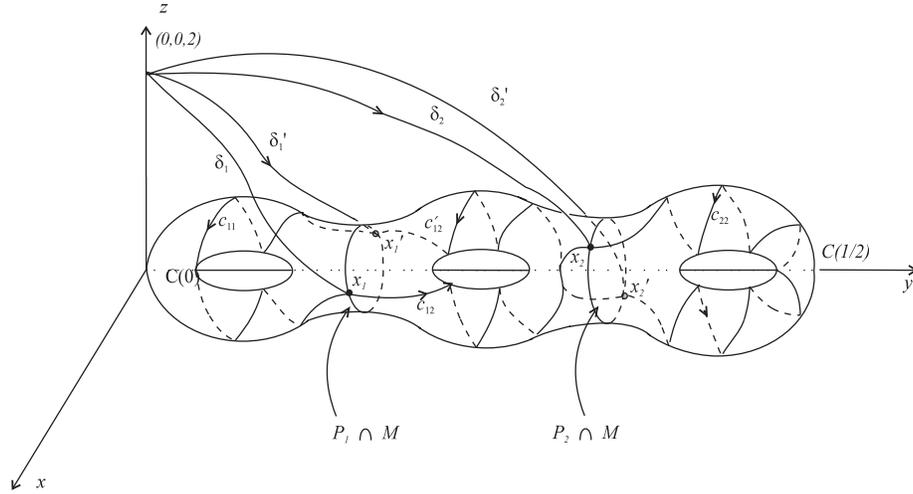


FIGURA 7

**2.1. Lema.** Sean  $M, H, \alpha_i$  ( $1 \leq i \leq g$ ),  $C, x_j, x'_j, C_{j(j+1)}, C'_{j(j+1)}, \delta_j, \delta'_j$ , ( $1 \leq j \leq k$ ),  $C_{11}$  y  $C_{kk}$  como en el texto anterior. Entonces

- El lazo  $\delta'_1 C_{11} \delta_1^{-1}$  (resp.  $\delta_k C_{kk} \delta_k'^{-1}$ ) es homotópico al lazo  $\alpha_{i_0}^{n_0}$  (resp.  $\alpha_{i_k}^{n_k}$ ) para algún  $i_0 \in \{1, \dots, g\}$  (resp.  $i_k$ ) y algún entero  $n_0$  (resp.  $n_k$ ).
- Los lazos  $\delta_j C_{j(j+1)} \delta_{j+1}^{-1}$  y  $\delta'_{j+1} C'_{j(j+1)} \delta_j'^{-1}$  son homotópicos a una misma potencia de alguno de los lazos  $\alpha_{i_j}$  ( $1 \leq i_j \leq g, 1 \leq j \leq k$ ).

c) *El lazo*

$$\delta'_1 C_{11} C_{12} C_{23} \cdots C_{kk} \cdots C'_{23} C'_{12} \delta'^{-1}_1,$$

es homotópico al lazo

$$\alpha_{i_0}^{n_0} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_3}^{n_3} \cdots \alpha_{i_k}^{n_k} \cdots \alpha_{i_3}^{n_3} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_1}^{n_1}.$$

*Demostración.* a) En efecto, la curva  $C_{11}$  está completamente contenida en una de las asas de  $M$  (digamos que es el asa  $i_0$ ) y supongamos que le da un número  $n_0$  de vueltas a dicha asa. Por la construcción de  $\delta_1$  y de  $\delta'_1$  el lazo  $\delta'_1 C_{11} \delta_1^{-1}$  le dará el mismo número de vueltas a dicha asa y no le dará vueltas a ninguna otra asa. Luego  $\delta'_1 C_{11} \delta_1^{-1} \sim \alpha_{i_0}^{n_0}$ . La prueba para  $\delta_k C_{kk} \delta_k'^{-1}$  es similar.

b) Por la simetría de  $C_{j(j+1)}$  con  $C'_{j(j+1)}$ , ambas curvas están totalmente comprendidas en la misma asa (digamos que es el asa  $i_j$ ) y le dan el mismo número de vueltas ( $n_j$ ), además, si las consideramos parametrizadas simétricamente es claro que ambas girarán alrededor del asa en el mismo sentido. Así pues,  $\delta_j C_{j(j+1)} \delta_{j+1}^{-1} \sim \delta'_{j+1} C'_{j(j+1)} \delta_j'^{-1} \sim \alpha_{i_j}^{n_j}$ . Véase la Figura 7.

c) La homotopía resulta de aplicar los literales a) y b).  $\square$

El teorema siguiente nos garantiza que las curvas simétricas pueden ser expresadas como capicúas o semicapicúas.

**2.2. Teorema.** Sean  $M$  una superficie de género  $g$  embebida simétricamente en  $S^3$  tal como se dijo anteriormente;  $H$  la clausura del “exterior” de  $M$ , y  $\{\alpha_i\}_{i=1}^g$  el conjunto de generadores del grupo fundamental de  $H$ . Si  $C$  es una curva simétrica (respecto al eje  $y$ ) en  $M$  entonces ésta es una capicúa o una semicapicúa cuando se escribe en los generadores  $\alpha_i$ .

*Demostración.* En efecto, basta observar que la curva  $C$  es homotópica (la homotopía considerada aquí no es de lazos) a la curva descrita por el lazo

$$\delta'_1 C_{11} \delta_1^{-1} \delta_1 C_{12} \delta_2^{-1} \delta_2 C_{23} \delta_3^{-1} \cdots \delta_k C_{kk} \delta_k'^{-1} \cdots \delta'_3 C'_{23} \delta_2'^{-1} \delta'_2 C'_{12} \delta_1'^{-1}.$$

Y como

$$\alpha_{i_0}^{n_0} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_3}^{n_3} \cdots \alpha_{i_k}^{n_k} \cdots \alpha_{i_3}^{n_3} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_1}^{n_1}$$

es homotópico (como curva) a

$$\alpha_{i_0}^{\frac{n_0}{2}} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_3}^{n_3} \cdots \alpha_{i_k}^{n_k} \cdots \alpha_{i_3}^{n_3} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_0}^{\frac{n_0}{2}}, \quad \text{si } n_0 \text{ es par, o a}$$

$$\alpha_{i_0} \alpha_{i_0}^{\frac{n_0-1}{2}} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_3}^{n_3} \cdots \alpha_{i_k}^{n_k} \cdots \alpha_{i_3}^{n_3} \alpha_{i_2}^{n_2} \alpha_{i_1}^{n_1} \alpha_{i_0}^{\frac{n_0-1}{2}}, \quad \text{si } n_0 \text{ es impar,}$$

entonces obtenemos en el primer caso una capicúa y en el segundo una semicapicúa.  $\checkmark$

## 2. Presentaciones con una sola relación capicúa

El interés del estudio en capicúas proviene del hecho de que cuando se estudian representaciones de grupos (véase BRUMFIEL-HILDEN [1]) con relaciones de este estilo, la simetría de la capicúa puede ayudar a simplificar los cálculos.

A continuación probaremos que tener una capicúa o una semicapicúa es prácticamente lo mismo.

**3.1. Teorema.** *Si se tiene un grupo presentado con dos generadores y una relación que es capicúa (resp. semicapicúa) es posible hacer una sustitución adecuada para encontrar una presentación del mismo grupo que tenga también dos generadores y la relación se transforme en semicapicúa (resp. en capicúa).*

*Demostración.* Sean  $a, b$  los generadores de dicho grupo. Podemos pensar que una capicúa se puede escribir en un número finito de etapas, tales que en la primera etapa se escribe una potencia de  $a$  ó de  $b$  cualquiera, y en las etapas subsiguientes se van agregando simultáneamente al lado izquierdo y al derecho una misma potencia del generador que no se utilizó en la etapa inmediatamente anterior.

Con el fin de hacer más fácil la lectura de relaciones muy largas, denotaremos  $a^{-1}$  por  $\bar{a}$ . Supongamos que  $t = ab$  entonces  $a = \bar{t}b$ ,  $\bar{a} = b\bar{t}$ ,  $b = \bar{a}t$  y  $\bar{b} = \bar{t}a$ . Veamos lo que ocurre cuando en una capicúa (escrita en  $a$  y en  $b$ ) sustituímos a  $a$  ó a  $b$  por medio de las ecuaciones anteriores.

Supongamos que  $P_1$  es una capicúa que se escribió en una sola etapa. Entonces:

i) Si  $P_1 = a^{n_1}$  con  $n_1 > 0$  al sustituir a  $a$  obtenemos  $P_1 = \bar{t}\bar{b}\bar{t}\bar{b}\cdots\bar{t}\bar{b}\bar{t}$  que es una semicapicúa, ya que si se quita la  $\bar{b}$  del lado derecho obtenemos una capicúa. Esto último lo denotaremos por  $Q\bar{b}$ , donde  $Q$  es alguna capicúa. En lo que sigue  $Q$  y  $Q'$  denotarán capicúas cualesquiera cuya escritura específica no nos interesa. Observamos que la forma  $Q\bar{b}$  obtenida no depende de cual sea  $n_1 > 0$ . En este mismo caso, si sustituyéramos a  $b$ , estrictamente no ocurre nada, pero podríamos pensar formalmente que  $P_1$  es una semicapicúa de la forma  $Qa$ .

Si  $n_1 < 0$ , al sustituir a  $a$  obtenemos  $b\bar{t}b\bar{t}\cdots b\bar{t}b\bar{t}$ , la cual es una semicapicúa de la forma  $bQ$ . Hecho que no depende de cual sea  $n_1 < 0$ . En este caso, si sustituyéramos a  $b$  pensamos formalmente que es una semicapicúa de la forma  $\bar{a}Q$ .

ii) Si  $P_1 = b^{n_1}$  con  $n_1 > 0$  (resp.,  $n_1 < 0$ ), si sustituimos a  $a$ , obtenemos formalmente que  $P_1$  es de la forma  $bQ$  (resp.,  $Q\bar{b}$ ), mientras que al sustituir a  $b$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $\bar{a}Q$  (resp.,  $Qa$ ).

Ahora, por inducción sobre el número de etapas utilizadas en la construcción de una capicúa, mostraremos que lo anterior se cumple para toda capicúa.

En efecto, supongamos que toda capicúa  $P_k$  escrita en  $k$  etapas tiene la propiedad siguiente:

Si  $P_k = a^{n_k}P_{k-1}a^{n_k}$  y  $n_k > 0$  ó si  $P_k = b^{n_k}P_{k-1}b^{n_k}$  con  $n_k < 0$ , (donde  $P_{k-1}$  denota una capicúa escrita en  $k-1$  etapas) al sustituir a  $a$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $Q\bar{b}$ , mientras que al sustituir a  $b$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $Qa$ . Y si  $P_k = a^{n_k}P_{k-1}a^{n_k}$  y  $n_k < 0$  ó si  $P_k = b^{n_k}P_{k-1}b^{n_k}$  con  $n_k > 0$ , al sustituir  $a$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $bQ$ , mientras que al sustituir  $b$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $\bar{a}Q$ .

Veamos que dicha propiedad se cumple para una capicúa escrita en  $k+1$  etapas. Tenemos que considerar varios casos:

Si  $P_{k+1} = b^{n_{k+1}}P_k b^{n_{k+1}}$  (resp.,  $P_{k+1} = a^{n_{k+1}}P_k a^{n_{k+1}}$ ), con  $P_k$  escrita en la etapa  $k$ , necesariamente  $P_k = a^{n_k}P_{k-1}a^{n_k}$  (resp.,  $P_k = b^{n_k}P_{k-1}b^{n_k}$ ) y:

(\*) Si  $n_{k+1} > 0$  con  $n_k > 0$  al sustituir  $a$ , por la hipótesis de inducción se prueba que es una semicapicúa de la forma  $bQ'$  (resp.  $Q'\bar{b}$ ), donde

$Q'$  es alguna capicúa. Al sustituir a  $b$  obtenemos una semicapicúa de la forma  $\bar{a}Q'$  (resp.  $Q'a$ ).

Si  $n_{k+1} > 0$  y  $n_k < 0$ , la forma de las semicapicúas resultantes es la misma en cada sustitución. En conclusión, para estos casos la forma de la semicapicúa depende sólo del hecho de que  $n_{k+1}$  sea mayor que 0.

(\*\*) Si  $n_{k+1} < 0$  (sin importar como sea  $n_k$ ) se puede ver de manera similar que al sustituir  $a$ , la forma obtenida es  $Q'\bar{b}$  (resp.,  $bQ'$ ) y al sustituir a  $b$  la forma es  $Q'a$  (resp.,  $\bar{a}Q'$ ).

Queda entonces probado que toda capicúa se puede reescribir en forma de semicapicúa haciendo una sustitución apropiada.

Veamos ahora lo qué ocurre cuando a una semicapicúa, perteneciente a un grupo generado por dos generadores  $a$  y  $b$ , de la forma  $a^{\pm 1}P$  (resp., de la forma  $b^{\pm 1}P$ ), donde  $P$  es una capicúa cualquiera, se le sustituye a  $b$  (resp., a  $a$ ).

Si  $P$  ha sido escrita en  $k$  etapas y  $P = a^{n_k}P_{k-1}a^{n_k}$  con  $n_k > 0$  (resp.,  $n_k < 0$ ) y si sustituimos  $b$  en  $aP$  nos queda  $aP = aQa$  (resp.,  $aP = a\bar{a}Q = Q$ ) la cual es una capicúa. Similarmente si se sustituye  $a$  en  $bP$  se obtiene una capicúa.

Si de nuevo  $P = a^{n_k}P_{k-1}a^{n_k}$  con  $n_k > 0$  (resp.  $n_k < 0$ ) y si sustituimos  $b$  en  $\bar{a}P$  nos queda  $\bar{a}P = \bar{a}Qa$  (resp.  $\bar{a}P = \bar{a}\bar{a}Q$ ), la cual no es capicúa, pero como es igual al elemento neutro (por ser una relación) podemos rotar cíclicamente las letras y obtendremos  $a\bar{a}Q = Q$  (resp.  $\bar{a}Q\bar{a}$ ) que sí es una capicúa. Similarmente si sustituimos  $a$  en  $\bar{b}P$  el resultado es una capicúa.

Para el caso en el cual  $P = b^{n_k}P_{k-1}b^{n_k}$  se obtiene un resultado similar.

Hemos probado entonces el teorema.  $\checkmark$

Claramente, también será cierto que si se tiene una relación que es capicúa (resp., semicapicúa) escrita en sólo dos generadores en un grupo cualquiera (no importa con cuantos generadores), se puede hacer una sustitución conveniente en los generadores, para que dicha relación se convierta en una semicapicúa (resp., una capicúa).

### 3. Nudos de número de túnel uno

Recordemos que un nudo es una copia de  $S^1$  en  $S^3$ . El grupo fundamental de un nudo es por definición el grupo fundamental del complemento del nudo en  $S^3$ .

Dado un nudo  $K$  en  $S^3$ , decimos que una curva  $T : [0, 1] \rightarrow S^3$  es un *túnel para el nudo  $K$*  si  $T$  es una función continua,  $T|_{(0,1)}$  es inyectiva y tal que  $T([0, 1]) \cap K = \{T(0), T(1)\}$  (véase [7] MORIMOTO).

Diremos que un nudo  $K$  admite un *número de túnel  $n$*  si existen  $n$  túneles  $T_i$  que hacen que  $S^3 - V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$  sea homeomorfo a un cuerpo de  $n + 1$  asas, donde  $V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$  es una vecindad abierta y tubular de  $K \cup (\cup_{i=1}^n T_i)$  y, además, no existen  $n - 1$  túneles que hagan a  $S^3 - V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$  homeomorfo a un cuerpo de  $n + 1$  asas. El mínimo entre todos los números de túnel que admite un nudo es llamado *el número de túnel del nudo*.

De aquí se puede deducir (véase [4] HILDEN-TEJADA-TORO) que el grupo fundamental de un nudo de número de túnel 1 admite una presentación con 2 generadores y una única relación, sin embargo, por los métodos tradicionales (ver, por ejemplo, presentación de Wirtinger en ROLFSEN [9] pp. 56) de encontrar la presentación del grupo de un nudo lo que se obtiene es un número de generadores y de relaciones más grande. ¿Cómo, entonces, obtener una presentación tan simple?

A continuación daremos un ejemplo que nos muestra cómo la topología le da la mano al álgebra para simplificar presentaciones de grupos. La serie de dibujos que indican las isotopías son la guía para encontrar la presentación del grupo deseada. Si se intentara obtener la presentación final a partir de la presentación inicial, utilizando solamente el “olfato” algebraico y sin mirar los dibujos, es bastante probable que se fracasaría.

En particular, mostraremos cómo transformar la presentación de Wirtinger del nudo  $K = 8_{20}$ , la cual tiene 8 generadores, en una presentación con dos generadores y una única relación. Este nudo es un nudo de número de túnel 1, y por lo tanto al pegarle un túnel, el complemento es un cuerpo de dos asas. Al tiempo que iremos transformando por medio de isotopías el complemento del nudo unido con el túnel en un cuerpo de

2 asas ( $S^3 - V(K \cup T)$ ), iremos siguiéndole el rastro a los generadores y relaciones de la presentación del grupo del nudo y veremos al final cómo ésta queda simplificada.

Usando el diagrama siguiente para el  $8_{20}$

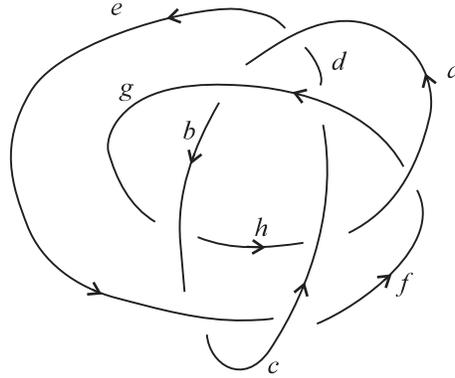


FIGURA 8.

la presentación de Wirtinger es:

$$\pi_1(K) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h : da = ae; bg = ga; hb = bg;$$

$$be = ec; ec = cf; hc = ca; cg = gd; af = ga \rangle .$$

Ahora colocamos un túnel que una los arcos marcados con  $a$  y  $f$  y lo colapsamos por una isotopía a un punto que representamos en el cruce correspondiente a la relación  $af = ga$ . Para obtener el grupo fundamental del complemento del nudo unido al túnel debemos adicionar un nuevo generador  $i$ . Consecuentemente cambiamos las relaciones  $af = ga$  y  $hc = ca$  por  $if = ga$  y  $hc = ci$ , respectivamente. Así, obtenemos que

$$\pi_1(K \cup T) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i : da = ae; bg = ga; hb = bg;$$

$$be = ec; ec = cf; hc = ci; cg = gd; if = ga \rangle .$$

es una presentación para el grupo fundamental del grafo siguiente:

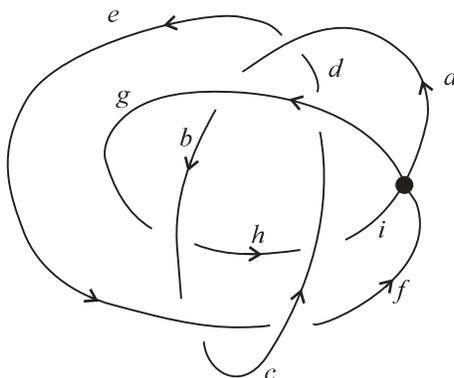


Figura 9.

Pero como a nosotros lo que nos interesa es únicamente el grupo fundamental del nudo  $K$ , adicionamos una nueva relación  $i = a$  con el fin de eliminar el efecto del túnel  $T$  en el cálculo del grupo fundamental. Obtenemos una nueva presentación para el grupo fundamental del nudo  $K$ :

$$\pi_1(K) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i : da = ae; bg = ga; hb = bg;$$

$$be = ec; ec = cf; hc = ci; cg = gd; if = ga; \boxed{i = a} \rangle .$$

La relación  $i = a$  la enmarcamos en un cuadro, con el fin de llevarle el récord a lo largo de las isotopías que iremos haciendo. Nótese que aunque los grafos que iremos mostrando corresponden al nudo con el túnel, las presentaciones corresponden sólo al grupo del nudo  $K$ . Si bien, en un principio, las presentaciones parecerán estar complicándose, sin embargo, en los últimos pasos, éstas se simplificarán notablemente.

Ahora “estiramos” el punto correspondiente al túnel (cada vez que hagamos una isotopía de este estilo diremos que estamos abriendo el túnel) y debemos, entonces, agregar un nuevo generador  $t$  y una nueva relación  $t = if$ , con el fin de que no se dañe la presentación del grupo del nudo  $K$ . El grafo correspondiente es:

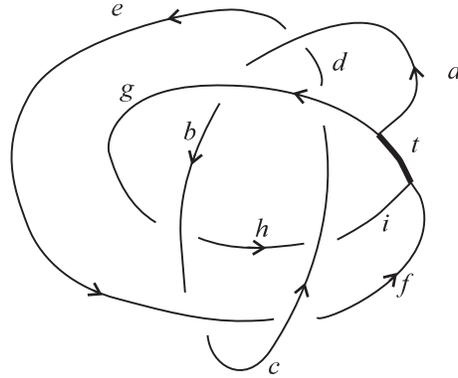


FIGURA 10.

Y la presentación de  $K$  es:

$$\pi_1(K) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, t : da = ae; bg = ga; hb = bg;$$

$$be = ec; ec = cf; hc = ci; cg = gd; if = ga; \boxed{i = a}; t = if \rangle .$$

Hacemos ahora una isotopía que elimina los arcos  $d, f$  e  $i$  y produce un arco nuevo  $t'$ .

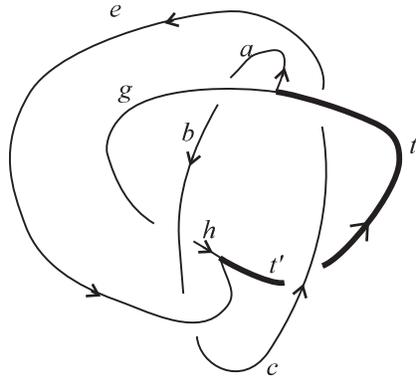


FIGURA 11.

Algebraicamente ésto significa que eliminamos los generadores  $d, f$  e  $i$  y adicionamos el generador  $t'$ . Así pues, de la primera relación

obtenemos  $d = ae\bar{a}$ , la cual permite eliminar a  $d$ . Similarmente usamos las relaciones  $f = \bar{c}ec$  e  $i = \bar{c}hc$  para eliminar los generadores  $f$  e  $i$  y reducir, así, la presentación. Debemos también adicionar las relaciones  $t' = he$  y  $t'c = ct$ , que verifica el nuevo generador  $t'$ . Obtenemos la presentación:

$$\pi_1(K) = \langle a, b, c, e, g, h, t, t' : bg = ga; hb = bg; be = ec;$$

$$cg = ga\bar{e}\bar{a}; \bar{c}hc f = ga; \boxed{\bar{c}hc = a}; t' = he; t'c = ct; t = \bar{c}hec \rangle .$$

Girando sobre el extremo del túnel que conecta con los arcos  $a$  y  $g$  podemos eliminar el arco  $a$ .

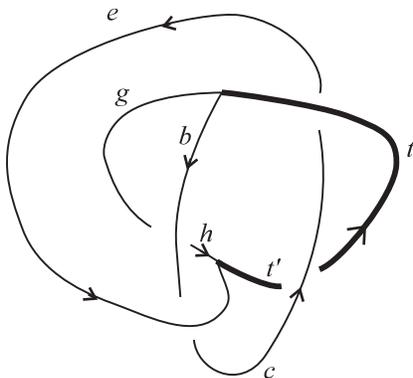


FIGURA 12.

Esto se traduce algebraicamente al usar la relación  $a = \bar{g}bg$  para simplificar la presentación. Y obtenemos:

$$\pi_1(K) = \langle b, c, e, g, h, t, t' : hb = bg; be = ec;$$

$$c = bge\bar{g}\bar{b}; \bar{c}hec = bg; \boxed{\bar{c}hc = \bar{g}bg}; t' = he; t'c = ct; t = \bar{c}hec \rangle .$$

Girando de nuevo sobre el mismo extremo del túnel eliminamos el arco  $g$ .

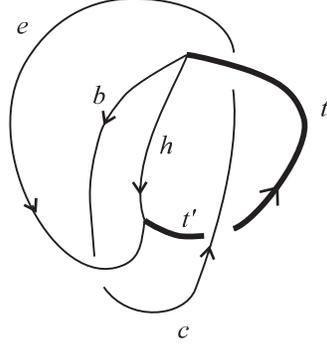


FIGURA 13.

Algebraicamente utilizamos la relación  $\bar{b}hb = g$  para reducir la presentación. Obtenemos:

$$\pi_1(K) = \langle b, c, e, h, t, t' : be = ec;$$

$$c = hbe\bar{b}h; \bar{c}hec = hb; \boxed{\bar{c}hc = \bar{b}hbhb}; t' = he; t'c = ct; t = \bar{c}hec \rangle .$$

En el próximo paso “colapsamos” el arco  $h$  hasta volverlo un punto.

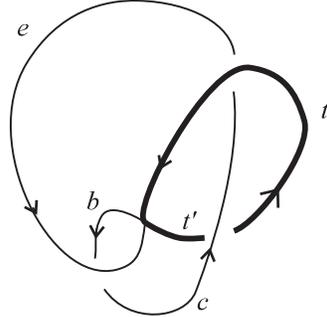


FIGURA 14.

Y, algebraicamente, eliminamos el generador  $h$  al usar la relación  $t' = he$ .

$$\pi_1(K) = \langle b, c, e, t, t' : be = ec;$$

$$c = t'\bar{e}be\bar{e}t'; \bar{c}t'c = t'\bar{e}b; \boxed{\bar{c}t'\bar{e}c = \bar{e}t'bt'\bar{e}b}; t'c = ct; t = \bar{c}t'c \rangle .$$

Como las dos últimas ecuaciones son la misma, eliminamos una de ellas por ser redundante. Hacemos ahora un giro en el punto de contacto del arco  $t$  con el arco  $b$ , el cual nos elimina este último.

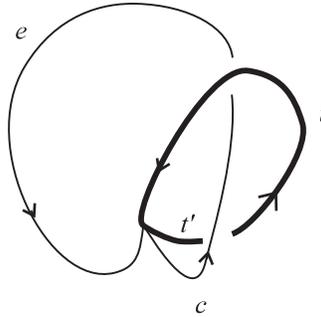


FIGURA 15.

Usamos la relación  $b = ec\bar{e}$  para eliminar el correspondiente generador  $b$  y simplificar la presentación.

$$\pi_1(K) = \langle c, e, t, t' :$$

$$c = t'ce\bar{c}\bar{t}'; \bar{c}\bar{t}'c = t'\bar{c}\bar{e}; \boxed{\bar{c}\bar{t}'\bar{e}c = e\bar{c}\bar{t}'ec\bar{e}\bar{t}'c\bar{e}}; t = \bar{c}\bar{t}'c \rangle .$$

Un nuevo giro nos elimina el arco  $t'$ .

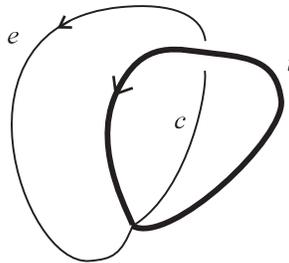


FIGURA 16.

Y usando la relación  $t = \bar{c}\bar{t}'c$  obtenemos la presentación:

$$\pi_1(K) = \langle c, e, t :$$

$$1 = t\bar{e}\bar{t}\bar{c}; t = c\bar{t}\bar{e}; \boxed{t\bar{c}\bar{e}c = e\bar{t}\bar{c}\bar{e}c\bar{e}\bar{t}\bar{c}} \rangle .$$

Observamos que las dos primeras relaciones son la misma. Finalmente, con un último giro, el generador  $c$  desaparece.

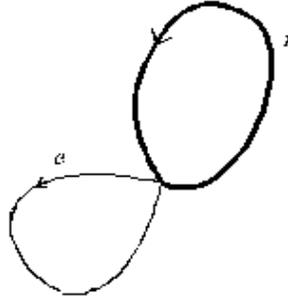


FIGURA 17.

Y utilizamos la relación  $te\bar{t} = c$  para obtener una presentación deseada del nudo  $K$  con sólo dos generadores y una sola relación.

$$\pi_1(K) = \langle e, t :$$

$$\boxed{tt\bar{e}\bar{t}e\bar{t}e\bar{t} = e\bar{t}\bar{t}e\bar{t}e\bar{t}e\bar{t}e\bar{t}e\bar{t}} \rangle .$$

Ahora, lo más sorprendente es que la relación obtenida se puede reescribir como una capicúa. Basta hacer las cancelaciones obvias y rotar convenientemente las letras para obtener  $\bar{t}e\bar{t}\bar{e}\bar{t}\bar{e}t\bar{t}t\bar{t}\bar{e}\bar{t}e\bar{t}e\bar{t}$ . Esto ocurre cada vez que se le hace un procedimiento similar a un nudo que sea de número de túnel 1.

Realmente, ésto es consecuencia del Teorema 4.1 siguiente, el cual es un corolario de los Teoremas 2.2 y 3.1. Una prueba diferente de este teorema se encuentra en [4] HILDEN-TEJADA-TORO.

**4.1. Teorema.** *Sea  $K$  un nudo de número de túnel 1. Entonces, su grupo fundamental admite una presentación con dos generadores y una relación, la cual es una capicúa.*

*Demostración.* En efecto, como  $K$  es de número de túnel 1,  $S^3 - V(K \cup T)$  es homeomorfo a un cuerpo de 2 asas. Si  $m$  es un meridiano del túnel

$T$ , al pegar un disco a lo largo de la frontera de  $m$ , el espacio resultante tendrá el mismo grupo fundamental que el nudo  $K$ .

Por otro lado, la imagen de este meridiano bajo cualquier homeomorfismo será una curva simétrica (salvo isotopías) y por lo tanto podrá escribirse (por 3.1) como una capicúa o semicapicúa en términos de los dos generadores del grupo fundamental del cuerpo de 2 asas. En efecto, por el teorema de Lickorish (véase [6]) se concluye que los homeomorfismos de una superficie de género 2 son isotópicos a productos de giros de Dehn alrededor de las curvas  $C_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) detalladas en la figura siguiente:

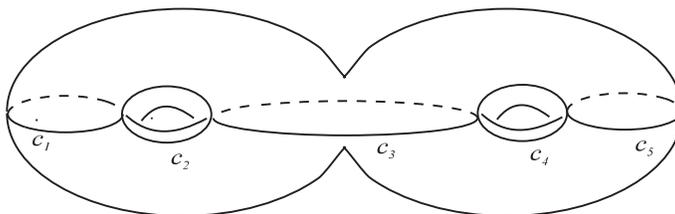


FIGURA 18.

Y como estas son las únicas curvas (alrededor de las cuales hacemos los giros de Dehn) es fácil ver que los homeomorfismos de una superficie de género 2 son isotópicos a homeomorfismos que conmutan con la rotación  $\rho$  de  $180^\circ$  alrededor del eje  $y$  (Véase BIRMAN & HILDEN [1]). Teniendo en cuenta esto, es claro que la imagen de una curva simétrica (respecto al eje  $y$ ) en una superficie de género 2 bajo un homeomorfismo seguirá siendo una curva simétrica (salvo isotopía). Así, pues, la imagen de  $m$ , la cual es simétrica, sigue siendo simétrica. Y por el Teorema 2.2 concluimos el resultado.  $\checkmark$

#### 4. Conclusiones

Hemos probado que el grupo fundamental de un nudo de número de túnel 1 admite una presentación con 2 generadores y una sola relación que es capicúa. Este resultado nos sugiere las siguientes preguntas:

1) ¿Será que toda presentación de un grupo de un nudo de número de túnel 1 que tenga dos generadores tendrá una relación capicúa o semicapicúa? Es decir, ¿será que la simetría de la relación tendrá que preservarse?

2) Si el grupo de un nudo admite una presentación con dos generadores y una relación que es capicúa, ¿será que el nudo tiene que ser de número de túnel 1?

3) ¿Existirá algún algoritmo que permita efectuar las simplificaciones en las relaciones sin tener que recurrir a la ayuda de las isotopías?

## 5. Reconocimientos

Este trabajo fue realizado en el Grupo de Investigación en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede de Medellín y parcialmente financiado por Colciencias, Código 1118-05-10852.

## References

- [1] J. BIRMAN & H. M. HILDEN, *Heegaard Splittings of Branched Coverings of  $S^3$* , Trans. of the Am. Math. Soc. **213** (1975), 315–352.
- [2] S. A. BLEILER & Y. MORIAH, *Heegaard Splittings and Branched Coverings of  $S^3$* , Math. Ann. **281** (1988), 531–543.
- [3] G. W. BRUMFIEL & H. M. HILDEN,  *$SL(2)$  representations of finitely presented groups*, Contemporary Math. **187**, AMS, Providence, Rhode Island, 1995.
- [4] H. M. HILDEN, D. M. TEJADA & M. M. TORO, *Tunnel number one knots have palindrome presentation*, Journal of Knot Theory and its Ramifications (2002), to appear.
- [5] A. G. KUROSH, *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [6] W. B. R. LICKORISH, *On The Homeotopy Group of a 2-manifold*, Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), 769–779.
- [7] K. MORIMOTO & M. SAKUMA, *On Unknotting Tunnels for Knots*, Math. Ann. **289** (1991), 143–167.
- [8] K. MORIMOTO, M. SAKUMA & Y. YOKOTA, *Identifying Tunnel Number one knots*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), 667–688.
- [9] D. ROLFSEN, *Knots and Links*. Publish or Perish, Houston, Texas, 1990.

(Recibido en julio de 2002)

MIKE HILDEN, DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF HAWAII, HONOLULU, HAWAII 96825 USA

*e-mail:* mike@math.hawaii.edu

DÉBORA M. TEJADA & MARGARITA M. TORO, ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, APARTADO AÉREO 3840

MEDELÍN, COLOMBIA

*e-mail:* dtejada@unalmed.edu.co

*e-mail:* mmtoro@perseus.unalmed.edu.co