

Asintóticas de ondas guiadas por obstáculos sumergidos

ANA MAGNOLIA MARÍN, RUBÉN DARÍO ORTIZ
Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia
PETR ZHEVANDROV
Universidad Michoacana, Morelia, México

ABSTRACT. It is well-known that underwater ridges and submerged horizontal cylinders can serve as waveguides for surface water waves. For large values of the wavenumber k in the direction the ridge, there is only one trapped wave. We construct asymptotics of these trapped waves and their frequencies as $k \rightarrow \infty$ by means of reducing the initial problem to a pair of boundary integral equations and then solving them.

Key words and phrases. Asymptotics, trapped water waves.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 76B15, 31A10. Secondary: 35J05.

RESUMEN. Es bien conocido que las sierras submarinas y cilindros sumergidos pueden guiar ondas superficiales de agua. Para los grandes valores del número de ondas k en la dirección de la sierra, existe sólo una onda atrapada. Nosotros construimos las asintóticas de estas ondas y sus frecuencias cuando $k \rightarrow \infty$ reduciendo el problema inicial a un par de ecuaciones integrales en la frontera y resolviendolas.

1. Introducción

Desde el primer artículo de URSELL [1], se conoce que los cilindros horizontales sumergidos pueden servir como guías para las ondas de agua. Después, GARIPOV (véase [2]) demostró que las sierras submarinas (es decir, las elevaciones horizontales del fondo) poseen la misma propiedad. En [3], se demostró que para frecuencias altas, existe sólo un modo atrapado que se propaga a lo largo de la sierra. También, en ese artículo se obtuvieron algunas cotas para la frecuencia de este modo. Nuestro propósito es construir la asintótica de esta frecuencia para valores grandes de k , donde k es el número de onda a lo largo

de la dirección de la sierra. Así el plan general del presente artículo es el mismo que el de [4], donde se obtuvieron las asintóticas de las frecuencias de las ondas atrapadas por una playa, y cuya existencia se demostró en el artículo [3]. Sin embargo, la técnica para obtener las fórmulas asintóticas es muy diferente a la usada en [4] y señala metódicamente que el problema presente se parece al problema de las ondas atrapadas por una sierra de poca altura, el cual es tratado en [5], donde se establece una analogía entre el problema de las ondas de agua y la ecuación de Schrödinger para el caso unidimensional con pequeñas perturbaciones. El último problema fue estudiado por muchos autores (mencionamos, por ejemplo, [6–8], y, en el contexto de las ondas de agua, [9]). En nuestro caso, una técnica similar a la de [5] da el resultado deseado. Observamos que en contraste a [5] las asintóticas se vuelven exponenciales, es decir, la distancia de la frecuencia de las ondas atrapadas al espectro continuo es exponencialmente pequeña en k . Este hecho hace ver al problema muy complicado desde el punto de vista de las expansiones asintóticas, pero, como nosotros construimos una expansión que converge exactamente, no se presentan dichas dificultades.

2. La formulación matemática y el resultado principal

Nos ocuparemos principalmente del problema de una sierra submarina, y haremos la mención correspondiente a la generalización del caso de cilindros sumergidos en la sección 5. Consideremos la capa de agua $\Omega = \{-h(x) < y < 0\}$, donde y es la coordenada vertical, x es la coordenada ortogonal a la dirección de la sierra, $y = -h(x)$ describe el fondo. Buscamos el potencial de velocidades en la forma $\exp\{i(\omega t - kz)\}\Phi(x, y)$, donde z es la coordenada horizontal a lo largo de la sierra, ω es la frecuencia; llegamos al problema

$$\Phi_y = \lambda\Phi, \quad y = 0, \quad (2.1)$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - k^2\Phi = 0, \quad -h(x) < y < 0, \quad (2.2)$$

$$\partial\Phi/\partial n = 0, \quad y = -h(x), \quad (2.3)$$

para la función Φ ; aquí $\lambda = \omega^2/g$. Soluciones de este problema pertenecientes al espacio de Sobolev $H_1(\Omega)$ son llamadas ondas atrapadas y existen solo para ciertos valores de λ (el valor propio) para k fijo.

Suponemos que el fondo es plano ($h(x) = h_0$) para $|x| \geq R$ y h es una C^∞ -función que tiene exactamente un mínimo global no degenerado en $x = 0$, con $h''(0) > 0$ (la última condición es solo por simplicidad, véase la Figura 1 para la geometría del problema). El espectro continuo de (2.1)-(2.3) coincide con el del fondo plano y está representado por el rayo $\lambda \in [k \tanh(kh_0), \infty)$. Del resultado de [3] se sigue que existe solo una frecuencia propia λ debajo del espectro esencial para valores grandes de k (por supuesto, deberíamos haber introducido coordenadas adimensionales, tomando, por ejemplo, h_0 como la escala de longitud, pero nos abstenemos de hacerlo así por brevedad). Nuestro

interés es construir asintóticas de esta frecuencia. El resultado principal de este artículo es enunciado a continuación.

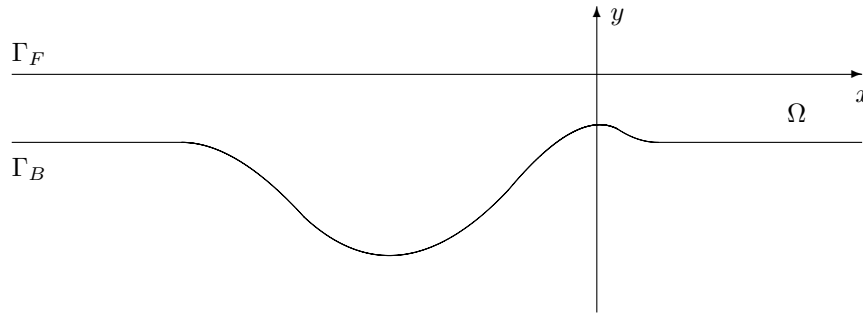


Fig. 1

Teorema 2.1. *El único valor propio $\lambda(k)$ de (2.1)-(2.3) tiene la forma*

$$\lambda(k) = k \tanh kh_0 - \beta^2, \quad (2.4)$$

donde*

$$\beta = k \sqrt{\frac{2\pi}{h''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})). \quad (2.5)$$

En el resto del artículo se desarrolla la demostración de este enunciado y se construye la correspondiente función propia.

3. Reducción a un par de ecuaciones integrales

Primero, reducimos (2.1)-(2.3) a un par de ecuaciones integrales sobre Γ_F y Γ_B para las funciones $\varphi = \Phi|_{y=0}$ y $\theta = \Phi|_{y=-h}$. Para este fin, consideremos la región $\Omega \setminus B_\rho(\xi, \eta)$, donde $B_\rho(\xi, \eta) = \{(x, y) : \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \rho\}$ es el disco de radio ρ con el centro en (ξ, η) , y aplicamos la fórmula de Green a Φ y $(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr))$ en $\Omega \setminus B_\rho$, donde $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ y K_0 es la función de Macdonald (así que $-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)$ es la solución fundamental del operador $\Delta - k^2$).

*Notemos que la fórmula correspondiente para β que aparece en [10] difiere de la que sigue por el factor 2 debido a un error aritmético en el artículo señalado.

Haciendo $\rho \rightarrow 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx \\ &+ \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} \\ &\times [h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] \theta(x) dx, \quad (\xi, \eta) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pasando en (3.1) a los límites $\eta \rightarrow 0$ y $\eta \rightarrow -h(\xi)$, obtenemos, usando las fórmulas de salto para los potenciales,

$$\begin{aligned} \pi\varphi(\xi) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|x-\xi|) \varphi(x) dx \\ &+ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2}} [h'(x)(x-\xi) - h(x)] \theta(x) dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \pi\theta(\xi) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2}) \varphi(x) dx \\ &- kh(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2}} \varphi(x) dx \\ &+ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ &\times [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))] \theta(x) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para aplicar la técnica de [5] a (3.2), (3.3) es necesario pasar a la transformada de Fourier $\tilde{\varphi}$ de la función φ ,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}[\varphi(\xi)](p) \equiv \tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Usando las fórmulas (véase [11])

$$K'_0(z) = -K_1(z), \quad \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}[K_0(k|\xi|)](p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{k^2 + p^2}},$$

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{kh_0} e^{-h_0\sqrt{k^2+p^2}},$$

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[K_0(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2}) \right] (p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{k^2 + p^2}} e^{-h_0\sqrt{k^2+p^2}},$$

llegamos al siguiente sistema para $\tilde{\varphi}(p)$, $\theta(\xi)$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - h(x)\tau(p)} \left(1 + \frac{iph'(x)}{\tau(p)}\right) \theta(x) dx, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - h(x)\tau(p)} \left(\frac{\lambda}{\tau(p)} + 1\right) \tilde{\varphi}(p) dp \\ &\quad + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0'(k\sqrt{\varrho(\xi, x)})}{\sqrt{\varrho(\xi, x)}} \\ &\quad \times [h'(\xi)(\xi - x) - (h(\xi) - h(x))] \theta(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau(p) &=: \sqrt{k^2 + p^2}, \\ \varrho(\xi, x) &=: (\xi - x)^2 + (h(\xi) - h(x))^2. \end{aligned}$$

Reescribimos el sistema (3.4) - (3.5) como

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = (\hat{M}_1 \theta)(p), \quad (3.6)$$

$$[(1 - \hat{M}_3) \theta](x) = (\hat{M}_2 \tilde{\varphi})(x), \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} (\hat{M}_1 \theta)(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p, x) \theta(x) dx, \\ (\hat{M}_2 \tilde{\varphi})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(x, p) \tilde{\varphi}(p) dp, \\ (\hat{M}_3 \theta)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_3(x, \xi) \theta(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} M_1(p, x) &= e^{ipx-h(x)\tau(p)} \left(1 + \frac{iph'(x)}{\tau(p)} \right), \\ M_2(x, p) &= \frac{1}{2\pi} e^{ipx-h(x)\tau(p)} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p)} \right), \\ M_3(x, \xi) &= \frac{k}{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{\varrho(\xi, x)})}{\sqrt{\varrho(\xi, x)}} [h'(\xi)(\xi - x) - (h(\xi) - h(x))]. \end{aligned}$$

Obviamente, una solución de (3.6), (3.7) da, mediante (3.1), una solución de (2.1)-(2.3).

4. Solución del sistema de ecuaciones integrales

Considere la ecuación (3.7). Recordemos el siguiente resultado (véase, por ejemplo, [12]).

Lema 4.1. *Sea $K(x, y)$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)| dx < M, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)| dy < M.$$

Entonces

$$\|\hat{K}u\|_{L_2} \leq M\|u\|_{L_2},$$

donde

$$\hat{K}u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)u(y)dy.$$

No es difícil ver, usando las asintóticas de $K_1(x)$ para valores pequeños y grandes de x , que el núcleo M_3 en (3.7) satisface las condiciones del Lema 4.1 con $M = \text{const. } k^{-1/2}$. Por lo tanto podemos invertir el operador $(1 - \hat{M}_3)$ en (3.7) usando la serie de Neumann y obtenemos

$$\theta(x) = [(1 - \hat{M}_3)^{-1} \hat{M}_2 \tilde{\varphi}](x), \quad (4.1)$$

donde $(1 - \hat{M}_3)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_3^n$. Sustituyendo (4.1) en (3.6) finalmente llegamos a

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) \tilde{\varphi}(p) = [\hat{M}_1 (1 - \hat{M}_3)^{-1} \hat{M}_2 \tilde{\varphi}](p). \quad (4.2)$$

Aislemos en (4.2) los términos que corresponden a la profundidad constante en la parte derecha y pasémoslos a la parte izquierda. Con este fin, representemos los operadores $\hat{M}_{1,2}$ como sigue:

$$M_1(p, x) = M_1^0(p, x) + M_1^1(p, x), \quad M_2(x, p) = M_2^0(x, p) + M_2^1(x, p), \quad (4.3)$$

donde $M_1^0(p, x) = \exp(ipx - h_0\tau(p))$, $M_2^0(x, p) = (2\pi)^{-1} \exp(ipx - h_0\tau(p))(1 + \lambda/\tau(p))$, y $M_{1,2}^1$ se definen mediante (4.3). Notemos que ahora $M_{1,2}^1$ tienen soportes compactos en x y que el operador \hat{M}_3 es idénticamente cero para $h(x) = h_0$. Tenemos de (4.2)

$$\left[1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} - e^{-2h_0\tau(p)} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) \right] \tilde{\varphi}(p) = \hat{M}\tilde{\varphi}, \tag{4.4}$$

donde $\hat{M} = \hat{M}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{M}_3^n \hat{M}_2 + \hat{M}_1^1 \hat{M}_2^0 + \hat{M}_1 \hat{M}_2^1$.

Aplicamos el razonamiento de [5] a (4.4). En efecto, sabemos que λ es dado por (2.4), donde β es exponencialmente pequeño en k [3]. Por lo tanto el primer factor en el lado izquierdo de (4.4),

$$L(p) := 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} - e^{-2h_0\tau(p)} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) = 1 - \frac{k - \beta^2}{\sqrt{k^2 + p^2}} + O(e^{-2kh_0}), \tag{4.5}$$

es exponencialmente pequeño en k para $p = 0$. De hecho, las raíces de $L(p) = 0$ las cuales tienden a cero cuando $k \rightarrow \infty$, lo cual no es difícil ver, son simples y dadas por

$$p = p_{\pm} = \pm \frac{i\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1/2}\beta^3), \quad \varepsilon = \frac{1}{k}. \tag{4.6}$$

Por esta razón, las consideraciones heurísticas de la sección 2 de [5] son aplicables a (4.4). Siguiendo aquellos argumentos, buscamos $\tilde{\varphi}$ en la forma $\tilde{\varphi}(p) = A(p)/L(p)$. También veremos (véase fórmula (4.8) abajo), que $A(p)$ y $M_2(x, p)$ son analíticas en una banda que contiene al eje real, y podemos cambiar el contorno de integración en las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_2^{\sigma}(x, p) \frac{A(p)}{L(p)} dp, \quad \sigma = \emptyset, 0, 1,$$

al mostrado en la Fig. 2, (con una $a > 0$ apropiada tal que en el disco $|p| < a$ no hay ceros de $L(p)$ diferentes de p_{\pm}).

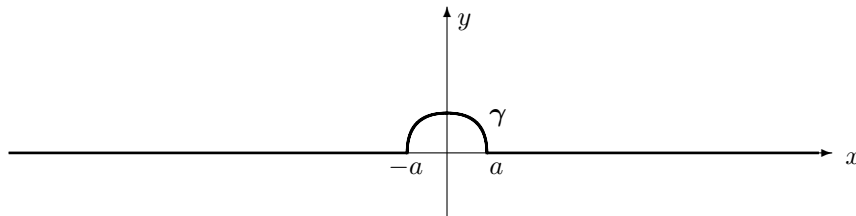


Fig. 2

Tenemos, por el teorema de los residuos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_2^\sigma(x, p) \frac{A(p)}{L(p)} dp = \int_{\gamma} M_2^\sigma(x, p) \frac{A(p)}{L(p)} dp + 2\pi i \frac{M_2^\sigma(x, p_+) A(p_+)}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}}, \quad \sigma = \emptyset, 0, 1. \quad (4.7)$$

Así (4.2) se transforma en

$$A(p) = [\hat{M}_\gamma A](p) + A(p_+)g(p), \quad (4.8)$$

donde

$$g(p) = [\hat{M}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{M}_3^n f(x)](p) + [\hat{M}_1^1 f^0(x)](p) + [\hat{M}_1 f^1(x)](p),$$

$$f^\sigma(x) = 2\pi i \frac{M_2^\sigma(x, p_+)}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}}, \quad \sigma = \emptyset, 0, 1,$$

y \hat{M}_γ es el mismo operador que \hat{M} con la única diferencia de que la actuación de $\hat{M}_2^{\emptyset, 0, 1}$ está definida como la integral a lo largo del contorno γ en lugar de \mathbf{R} .

Observe ahora que el operador \hat{M}_γ es pequeño en ε dado que $|L(p)| \geq \text{const } k^{-2}$ a lo largo de γ y $M_2(x, p)$ es exponencialmente pequeño. En efecto, en el arco tenemos hasta $O(k^{-\infty})$

$$|L(p)| = \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2/k^2}} \right| = \frac{a^2}{2k^2} + O(k^{-4}),$$

y en la parte del contorno que está en el eje real el mínimo de $|L(p)|$ se obtiene en los puntos $p = \pm a$, por lo tanto, la desigualdad arriba también se cumple. Reescribiendo (4.8) como

$$(1 - \hat{M}_\gamma)A(p) = A(p_+)g(p), \quad (4.9)$$

vemos que $(1 - \hat{M}_\gamma)$ tiene inversa y $A(p) = A(p_+)(1 - \hat{M}_\gamma)^{-1}g(p)$. Colocando $p = p_+$ en la última igualdad y dividiendo por $A(p_+)$, obtenemos la ecuación para β :

$$1 = (1 - \hat{M}_\gamma)^{-1}g(p)|_{p=p_+}. \quad (4.10)$$

Una aplicación estándar del método de Laplace de la evaluación asintótica de las integrales al término principal en (4.10) da la fórmula (2.5).

5. Cilindro sumergido

En este caso la geometría del problema es como sigue:

Suponemos que $\Gamma_B = \{x = x(t), y = y(t), t \in [-\pi, \pi]\}$ con $x(t)$ y $y(t)$ suaves, $x'^2 + y'^2 \neq 0$, y que $\max y(t) = y(0)$, $y''(0) < 0$, $x'(0) > 0$. La única diferencia con lo de arriba es que, en este caso las integrales en (3.4) y (3.5), que contienen $\theta(x)$, están ahora a lo largo del intervalo $[-\pi, \pi]$.

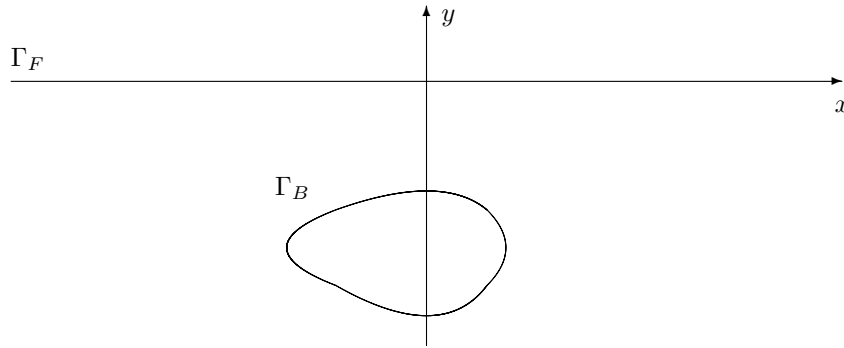


Fig. 3

Un análogo del Teorema 2.1 ahora se lee como sigue: el valor propio λ del problema consiste en (2.1), la ecuación (2.2) en el dominio exterior a Γ_B e inferior a Γ_F y la condición de Neumann en Γ_B tiene la forma

$$\lambda = k - \beta^2,$$

donde

$$\beta = k \sqrt{\frac{2\pi}{|y''(0)|}} e^{-2|y(0)|k} x'(0) (1 + O(k^{-1})).$$

No damos una demostración detallada dado que esta esencialmente repite la del Teorema 2.1.

Agradecimientos: Los autores expresan su inmensa gratitud al CONACYT, CIC-UMSNH y a la Universidad de Cartagena por su apoyo financiero.

Bibliografía

- [1] F. URSELL, *Trapping modes in the theory of surface waves*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **47** (1951), 347–358.
- [2] M. A. LAVRENTIEV & B. V. CHABAT, *Effets hidrodinamiques et modeles mathematiques*, Editions MIR, 1980, 270–289.
- [3] A. S. BONNET-BEN DHIA & P. JOLY, *Mathematical analysis of guided water waves*, SIAM J. Appl. Math., **53** (1993), 1507–1550.
- [4] A. MERZON & P. ZHEVANDROV, *High-Frequency Asymptotics of edge waves on a beach of nonconstant slope*, SIAM J. Appl. Math., **59** (1998), 529–546.
- [5] P. ZHEVANDROV & A. MERZON, *Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems*, Amer. Math. Soc. Translations (2) **208** (2003), 235–284.
- [6] L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics*, Pergamon, London, 1958.

- [7] B. SIMON, *The bound state of weakly coupled Schrödinger operator in one and two dimensions*. Ann. Phys. (NY), **97** (1976), 279–288.
- [8] R. D. GADYL'SHIN, *Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis*, Theor. Math. Phys., **132** (2002), 976–982.
- [9] D. S. KUZNETSOV, *A spectrum perturbation problem and its applications to waves above an underwater ridge*, Siberian Math. J., **42** (2001), 668–694.
- [10] A. M. MARÍN, R. D. ORTIZ & P. ZHEVANDROV, *High-frequency asymptotics of waves trapped by underwater ridges and submerged cylinders*, J. Comp. Appl. Math., en prensa, publicado electrónicamente 7 de julio de 2006, doi:10.1016/j.cam.2006.01.043 (<http://www.sciencedirect.com/science/journal/03770427>).
- [11] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publ., Inc., New York, 1970.
- [12] P. HALMOS & V. SUNDER, *Bounded integral operators on L_2 space*, Springer-Verlag, New York, 1979.

(Recibido en Marzo de 2006. Aceptado para publicación en agosto de 2006)

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
CARTAGENA, COLOMBIA

e-mail: amarinr@unicartagena.edu.co

e-mail: rortizo@unicartagena.edu.co

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD MICHOACANA
MORELIA, MÉXICO

e-mail: pzhevand@zeus.umich.mx