Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 40 (2006), páginas 111–117

Una debilitación del axioma de elección para el árbol binario estándar

Johan Bogoya
Carlos Montenegro
Universidad de los Andes, Bogotá

Resumen. El axioma de elección dice que para cada colección de conjuntos (es decir conjunto de conjuntos) X, existe una función f tal que $f(x) \in x$ para todos los $x \in X$ no vacíos, es decir, la función f selecciona un elemento de cada conjunto de la colección X; a dicha función la llamamos función electora. Se acostumbra debilitar dicho axioma imponiendo condiciones sobre el conjunto X como por ejemplo: "X es una colección de n-conjuntos, es decir que los elementos de X son conjuntos finitos de tamaño n" o debilitando la función electora f al cambiar la condición $f(x) \in x$ por $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$, en este último caso decimos que f es una función selectora. Decimos que el criterio S_n es válido en un modelo $\mathcal{M}$ si todas las colecciones de n-conjuntos X en $\mathcal{M}$, tienen una función selectora. En el presente trabajo se exhibe un modelo de permutación de soporte finito [2, capítulo 4] donde el criterio S_n es falso para todos los enteros n de la forma 2^k, con k natural y es válido para el resto de los naturales.

Keywords and phrases. Logic, models, axiom of choice.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 03C50. Secondary: 03E25.

Abstract. The axiom of choice says that for any collection of sets (or for any set of sets) X, exists a function f such that $f(x) \in x$ for all non empty $x \in X$, i.e. f takes an element in each set of the collection X, such function is called a *choice function*, it is customary to weak the axiom of choice by putting some extra condition for the set X such that: "X is a n-set collection, meaning that the elements of X are finite sets of size n" or in the other hand, weakening the choice function f by changing the condition $f(x) \in x$ by the simpler one $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$, in this last case we say that f is a *sellector function.* We say that the S_n criterion is true in a model $\mathcal{M}$ if all the possible collections of n-sets X in $\mathcal{M}$, have a sellector function. In the present work we exhibit a permutation model of finite support [2, chapter 4] where the S_n criterion fails for all the naturals n of the form 2^k with k natural, and works for the rest of the naturals.

1. Preliminares

El criterio $\mathbf{S_n}$. Un n-conjunto, para $n > 0$, es un conjunto finito de tamaño n, por ejemplo los elementos de $\mathbb{R}^2$ son 2-conjuntos, nótese que $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. El criterio S_n dice que para toda colección de n-conjuntos X, existe una función f tal que $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$ para todo $x \in X$. Se dice que f es una función selectora.

Modelos de permutación de soporte finito. Trabajaremos con las teorías ZF y ZFA, como referencia principal ofrecemos el libro de Jech [2]. ZF es la teoría de Zermelo Fraenkel y ZFA es ZF admitiendo la existencia de átomos: objetos sin elementos que son distinguibles entre sí. Los resultados de consistencia logrados en este trabajo son obtenidos con modelos de permutación [2, capítulo 4], que en principio son válidos para ZFA y con la ayuda del Teorema de Jech-Sochor [3] también lo son para ZF.

La construcción de los modelos de permutación comienza con un conjunto enumerable infinito de átomos A y un grupo G que actúa sobre A preservando su estructura. El modelo de permutación queda entonces definido (como en [2, capítulo 4]) por el conjunto A, el grupo G y el filtro normal correspondiente a los soportes finitos.

Primero, constrúyase un universo de conjuntos $V(A)$ donde el nivel 0 sea el conjunto de átomos A, el nivel 1 la colección de todos los posibles conjuntos de átomos y en general el nivel α se construye tomando todos los conjuntos cuyos elementos estén en niveles inferiores, α toma todos los valores ordinales aunque para el presente trabajo tan solo se consideran los primeros ω niveles de $V(A)$; el axioma de elección y la teoría ZFA son válidos en $V(A)$ debido a que dicho universo contiene todos los posibles conjuntos.

Para cada $\pi \in G$ extendemos su acción sobre A a todo $V(A)$ de la siguiente manera:

$$\pi(x) := \{\pi(y) \mid y \in x\}.$$

Un conjunto o un átomo x se dice *simétrico* si existe un conjunto finito de átomos E tal que para todos los $\pi \in G$ que fijen al conjunto E puntualmente, vale que $\pi(x) = x$. Entonces E es llamado *soporte de* x (en particular, cada átomo es simétrico por ser soportado por todos los subconjuntos finitos de A que lo contienen). El modelo de permutación $\mathcal{M}$ determinado por A y su estructura, consiste de los átomos A y de todos aquellos conjuntos que son *hereditariamente simétricos*, es decir, x es simétrico y también lo son sus elementos y los elementos de sus elementos y así sucesivamente. Es un hecho conocido [véase 2] que $\mathcal{M}$ es un modelo de ZFA; más aún cada elemento de G es un automorfismo de A que al ser extendido, resulta ser automorfismo de $\mathcal{M}$, es decir, preserva la relación de pertenencia y por lo tanto preserva todo lo definible por la teoría de conjuntos en $\mathcal{M}$.

Para cada $x \in \mathcal{M}$ el *simetrizador* de x se define como el subgrupo de G dado por

$$sim(x) := \{\pi \in G | \pi(x) = x\}.$$

Sea H un subgrupo de G. El *fijador* de x en H se define como el subgrupo de G dado por

$$fix_H(x) := \{\pi \in H \mid \forall(y \in x)(\pi(y) = y)\}.$$

Claramente $fix_G(x) \leq sim(x)$. Sea $y \in x$ y $N \leq sim(x)$, la órbita de y bajo N es el subconjunto de x dado por $orb_N(y) := \{\pi(y) \mid \pi \in N\}$.

Árboles binarios. El árbol binario estándar es el conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos. Para una sucesión s de ceros y unos, denotamos por $long(s)$ al número de dígitos de s y decimos que la sucesión s *vive o habita* en el nivel $long(s)$. Por ejemplo, la sucesión vacía $\langle\rangle$ tiene longitud 0 y habita el nivel 0; la sucesión $\langle 0,1\rangle$ tiene longitud 2 y habita en el nivel 2 y así sucesivamente. El esquema siguiente muestra los primeros niveles del árbol binario estándar:

nivel 0			$\langle\rangle$			
nivel 1		$\langle 0\rangle$		$\langle 1\rangle$		
nivel 2	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$		$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	

Para simplificar la notación llamaremos 01 a la sucesión $\langle 0,1\rangle$, 011 a la sucesión $\langle 0,1,1\rangle$ y así sucesivamente.

2. Construcción del modelo

Teorema 2.1. *Considere el conjunto P de todas las potencias de* $2:$

$$P = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$$

y el conjunto R del resto de naturales, $R = \mathbb{N} - P$; entonces es consistente que S_p sea falso para cada $p \in P$ y al mismo tiempo S_r sea verdadero para cada $r \in R$.

La afirmación "es consistente que $\phi \wedge \neg\varphi$" significa que existe un modelo de la teoría de Zermelo-Fraenkel donde ϕ es cierto y φ es falso. Se construirá un modelo de permutación de soporte finito $\mathcal{M}$ donde el conjunto A de átomos está completamente determinado por el árbol binario estándar.

Tome A como un conjunto que está en correspondencia 1 a 1 con el árbol binario estándar; al átomo correspondiente a la sucesión s se lo denota $a(s)$, aunque para simplificar la notación llamaremos s al átomo $a(s)$ sin más detalles.

Considere el grupo G que actúa sobre A, generado por $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i, \ldots$ donde la acción de π_i es intercambiar 0 y 1 en la i-ésima posición de un átomo s, si s tiene menos de i posiciones $\pi_i(s) = s$. Sea e_G la identidad de G. Los elementos de G están determinados por las finitas posiciones donde intercambian ceros y unos. Naturalmente $\pi_i(\pi_j(s)) = \pi_i \circ \pi_j(s)$, G es abeliano pues $\pi_i \circ \pi_j = \pi_j \circ \pi_i$ y A es un G-conjunto, es decir, G actúa en A.

A continuación se describen algunas propiedades y definiciones de la acción del grupo G sobre el conjunto A.

1. Los elementos de G conservan la longitud de las sucesiones, en otras palabras, los elementos de G mueven los átomos dentro de sus mismos niveles debido a que tan solo pueden intercambiar ceros y unos en finitas posiciones y esta acción no altera la longitud de una sucesión.
2. Se dice que los átomos d y e son hermanos si existe un átomo s tal que $s \frown 0 = d$ y $s \frown 1 = e$, es decir que d y e tienen un padre común.
3. Veremos que si d y e son hermanos y $\pi \in G$ entonces $\pi(d)$ y $\pi(e)$ también son hermanos.
   Sean d, e, s y π como en el numeral 2, $l = long(d) = long(e)$, luego existen naturales $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tales que $\pi = \pi_{n_1} \circ \pi_{n_2} \circ \ldots \circ \pi_{n_k}$.
   Si $l = n_i$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces $\pi(d) = \pi(s \frown 0) = \pi_{n_1} \circ \pi_{n_2} \circ \ldots \circ \pi_{n_{i-1}}(s) \frown 1 = \pi(s) \frown 1$ y $\pi(e) = \pi(s \frown 1) = \pi_{n_1} \circ \pi_{n_2} \circ \ldots \circ \pi_{n_{i-1}}(s) \frown 0 = \pi(s) \frown 0$.
   Si $l \neq n_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$ entonces $\pi(d) = \pi(s \frown 0) = \pi(s) \frown 0$ y $\pi(e) = \pi(s \frown 1) = \pi(s) \frown 1$.
   En cualquier caso $\pi(d)$ y $\pi(e)$ son hermanos.
4. Sean c, d y e átomos tales que $d \frown c = e$ y $m = long(c)$, se dice entonces que d es m-padre de e o que e es m-hijo de d. Por ejemplo si $d \frown 01 = e$ decimos que d es 2-padre de e o que e es 2-hijo de d.
   Si $\pi \in G$ y d es m-padre de e entonces con un argumento similar al utilizado en el numeral 3 es fácil ver que $\pi(d)$ es m-padre de $\pi(e)$.

Sea $\mathcal{M}$ el modelo de permutación de soporte finito dado por el conjunto de átomos A y el grupo G.

Lema 2.1. *Para todo entero $n \in P$, vale que $\mathcal{M} \nvDash S_n$.*

Demostración. Para cada valor natural de k, se construirá una familia de 2^k-conjuntos $X \in \mathcal{M}$ sin función selectora. Por claridad se prueba el caso $k = 1$ y luego se da la prueba general.

Sea X la colección de todas las parejas de hermanos de los niveles impares, por ejemplo del nivel 1 se toma $\{1, 0\}$, del nivel 3 $\{111, 110\}$, $\{101, 100\}$, $\{010, 011\}$ y $\{001, 000\}$, de manera que:

$$X = \{\{1, 0\}, \{111, 110\}, \{101, 100\}, \{010, 011\}, \{001, 000\}, \{11110, 11111\} \ldots\}$$

Suponga que existe una función selectora f para X y que $E \subset A$ es su soporte finito. Además, sea m el mínimo natural tal que E está contenido en los primeros m niveles de A.

Sea $p = \{p_1, p_2\} \in X$, tal que $long(p_1) = j > m$. La permutación π_j fija puntualmente a E y por lo tanto a la función f (i.e. $\pi_j(f) = f$), sin pérdida de generalidad supongamos que $f(p) = p_1$. Se tiene entonces:

$$(p, p_1) = (p, f(p)) \in f$$
$$\pi_j(p_1) = p_2, \pi_j(p_2) = p_1$$

$$\pi_j(p) = \pi_j(\{p_1, p_2\}) = \{\pi_j(p_1), \pi_j(p_2)\} = \{p_2, p_1\} = p$$
$$\pi_j(p, f(p)) = (\pi_j(p), \pi_j(f(p))) = (\pi_j(p), \pi_j(p_1)) = (p, p_2) \notin f.$$

Como $(p, p_2) \neq (p, p_1)$, se tiene que $(p, p_2) \notin f$ y por lo tanto f no puede seleccionar un subconjunto propio no trivial de p o E no es finito, en cualquier caso $f \notin \mathcal{M}$.

Para k arbitrario: Tómese X como la colección de todos los 2^k k-hijos de los átomos que viven en niveles múltiplos de k; la colección X pertenece a $\mathcal{M}$ pues es invariante bajo todo el grupo G (i.e. para todo $p \in X$ y todo $g \in G$ se tiene que $g(p) = p$) y por lo tanto es soportado por $\emptyset$. Sea f una función selectora sobre X con soporte finito E y sea m el mínimo natural tal que E está contenido en los primeros m niveles de A. Se mostrará que la función f no pertenece al modelo $\mathcal{M}$.

Sea $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_{2^k}\} \in X$ tal que $long(p_1) = j > m+k$, se mostrará que para todo par de naturales t y s menores que 2^k existe un elemento de G que permuta p_t y p_s, y fija al conjunto E puntualmente.

Sea $g \in G$ dado por

$$g = \prod_{i \in I} \pi_i,$$

donde I es el conjunto de todos los naturales i tales que $p_t(i) \neq p_s(i)$, (donde $p_t(i)$ es la posición i-ésima de la sucesión p_t). Nótese que todos los elementos de I son menores que j y mayores que $j - k$, pues tanto p_t como p_s son k-hijos de un átomo que vive en el nivel $j - k$. Es decir que g no actúa sobre niveles inferiores al $j - k > m$ fijando entonces a E y por lo tanto a f, (i.e. $g \in fix(f) \subset sim(f)$).

Ahora bien g intercambia 0 y 1 en las posiciones donde p_t es diferente de p_s, así que $g(p_t) = p_s$ y $g(p_s) = p_t$. Supongamos que

$$\emptyset \neq f(p) \subsetneq p,$$

de manera que existen $t, s < 2^k$ tal que $p_t \notin f(p)$ y $p_s \in f(p)$, sabemos que existe $g \in sim(f)$ tal que $g(p_t) = p_s$ y $g(p_s) = p_t$, haciendo que $g(f(p)) \neq f(p)$. Luego $g((p, f(p))) = (g(p), g(f(p))) = (p, g(f(p))) \notin f$, de manera que los únicos subconjuntos de p invariantes bajo $sim(f)$ son $\{\emptyset\}$ y todo p, luego f no puede seleccionar un subconjunto propio no trivial de p o E no es finito. En cualquier caso que $f \notin \mathcal{M}$. ☑

Lema 2.2. *Para todo natural $n \in R$ vale que $M \models S_n$.*

Demostración. Sea X una colección arbitraria de n-conjuntos en $\mathcal{M}$. Se construirá una función selectora para la colección X.

Sea $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X$ y E su soporte finito en A. Para cada $x_i \in \mathbf{x}$ sea E_i su soporte finito en A. Sea además m el mínimo entero tal que tanto E como todos los E_i están contenidos en los primeros m niveles del árbol A.

Sea H el grupo finito generado por $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$. Nótese que para cada $h \in H$ se tiene que h^2 es la identidad, así que H es un 2-grupo finito y por lo tanto $|H| = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Considérese la acción de $sim(\mathbf{x})$ sobre x_i, los elementos de $sim(\mathbf{x})$ que pueden no fijar a x_i son aquellos que no fijan a E_i,sea $N := sim(\mathbf{x}) \cap H$. $N \leq H$ y $|N|$ divide a $|H|$ es decir que $|N| = 2^s$ para algún natural $s \leq k$.

A continuación se mostrará que, debido a que $N \leq sim(\mathbf{x})$,

$$orb_N(x_i) = orb_{sim(\mathbf{x})}(x_i),$$
$$orb_N(x_i) \subseteq orb_{sim(\mathbf{x})}(x_i).$$

Sea $y \in orb_{sim(\mathbf{x})}(x_i)$ entonces existe un $\alpha \in sim(\mathbf{x})$ tal que $\alpha(x_i) = y$ y como $\alpha \in G$, existen índices $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$ tales que $\alpha = \pi_{i_1} \circ \pi_{i_2} \circ \ldots \circ \pi_{i_l}$. Nótese que si $\pi_{i_k}(x_i) \neq x_i$ entonces $i_k \leq m$ pues el soporte de x_i está contenido en los primeros m niveles de A.

Sea k el mayor entero tal que $\pi_{i_k}(x_i) \neq x_i$, de manera que $\pi_{i_t}(x_i) = x_i$ siempre que $t > k$. Sean $\beta = \pi_{i_1} \circ \ldots \circ \pi_{i_k}$ y $\gamma = \pi_{i_{k+1}} \circ \ldots \circ \pi_{i_l}$. Luego $y = \alpha(x_i) = \beta \circ \gamma(x_i) = \beta(x_i) = \beta \circ \gamma \circ \gamma(x_i) = \alpha \circ \gamma(x_i)$.

Ahora bien $\alpha \circ \gamma \in N$ debido a que $\alpha \circ \gamma = \beta \in H$, $\alpha \in sim(\mathbf{x})$ por definición, $\gamma \in sim(\mathbf{x})$ por ser $i_{k+1} > m$ y por lo tanto $\alpha \circ \gamma \in sim(\mathbf{x})$. Así que $\alpha \circ \gamma \in H \cap\ sim(\mathbf{x}) = N$ haciendo que $y \in orb_N(x_i)$.

De la teoría elemental de acciones [1, p. 159] se tiene que $|orb_N(x_i)| = (N : Fix_N(x_i)) = |N|/|Fix_N(x_i)|$ y por lo tanto $|orb_N(x_i)|$ divide a $|N|$ es decir que $|orb_N(x_i)| = 2^l$ para algún natural $l \leq s$. Pero debido a que $|\mathbf{x}| = n = 2^a(2b+1)$ con $a \geq 0$ y $b \geq 1$, se tiene que el conjunto $orb_N(x_i)$ no puede ser todo $\mathbf{x}$ y tampoco puede ser vacío pues contiene a x_i, así que $orb_N(x_i)$ es un subconjunto propio no trivial de $\mathbf{x}$.

Considérese la siguiente relación de equivalencia sobre X:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \leftrightarrow (\exists \pi \in sim(X))(\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}),$$

y la partición de X inducida por dicha relación $X/\sim$.

Para cada $Q \in X/\sim$, escójase un n-conjunto $\mathbf{x}_Q \in Q$ y un x_i elemento de $\mathbf{x}_Q$. Considérese la siguiente función selectora f sobre X: para cada $Q \in X/\sim$, tómese $f(\mathbf{x}_Q)$ como el subconjunto propio no trivial de $\mathbf{x}_Q$ dado por $orb_{sim_{\mathbf{x}_Q}}(x_i)$. Para $\mathbf{x} \in Q$ diferente de $\mathbf{x}_Q$ existe $\pi \in sim(X)$ tal que $\pi(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{x}$, luego tómese $f(\mathbf{x})$ como el subconjunto propio no trivial de $\mathbf{x}$ dado por $\pi(f(\mathbf{x}_Q))$.

Veamos que f está bien definida: sean Q, $\mathbf{x}_Q$ y $\mathbf{x}$ como antes. Suponga que para $\pi, \rho \in sim(X)$ se tiene que $\mathbf{x} = \pi(\mathbf{x}_Q) = \rho(\mathbf{x}_Q)$. Se requiere que $\pi(f(\mathbf{x}_Q)) = \rho(f(\mathbf{x}_Q))$. Debido a que $\pi^{-1} \circ \rho(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{x}_Q$, se tiene que $\pi^{-1} \circ \rho \in sim(\mathbf{x}_Q)$. Luego $orb_{sim_{\mathbf{x}_Q}}(x_i) = \pi^{-1} \circ \rho(orb_{sim_{\mathbf{x}_Q}}(x_i))$ y, por lo tanto, $\pi(orb_{sim_{\mathbf{x}_Q}}(x_i)) = \rho(orb_{sim_{\mathbf{x}_Q}}(x_i))$ como se quería.

La función f queda entonces definida sobre toda la colección X y es invariante bajo $sim(X)$ luego f tiene el mismo soporte que X y por lo tanto $f \in \mathcal{M}$. Así que $\mathcal{M} \models S_n$. ☑

Referencias

[1] J. Fraleigh, *Abstract Algebra*, Wilmington Delaware E.U.A., 1987.

[2] T. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.

[3] T. Jech & A. Sochor, Applications of the Θ-model, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **14** (1966), 351–355.

(Recibido en abril de 2006. Aceptado en noviembre de 2006)

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

e-mail: mbogoya@math.cinvestav.mx
e-mail: cmontene@uniandes.edu.co