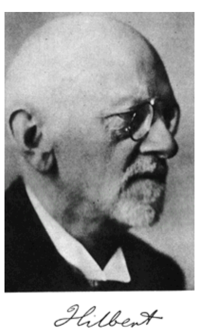
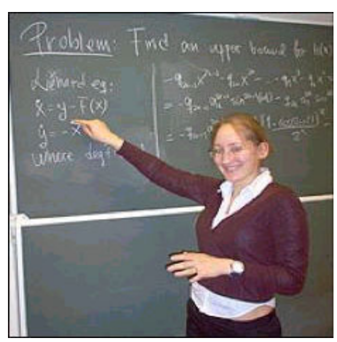
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 119–125*

Noticias

El décimosexto Problema de Hilbert ha sido parcialmente resuelto

El denominado *problema 16 de Hilbert*[1], un acertijo que ha desvelado a los matemáticos por más de un siglo fue resuelto parcialmente por una joven estudiante sueca de 22 años “casi sin pensarlo”. En pocas horas de inspiración, ELIN OXENHIELM, de tan solo 22 años, pudo ver la luz que se le escapó por más de un siglo a cientos de matemáticos.





E. OXENHIELM

[1] Véase la versión facsimilar adjunta, en alemán, tomada del *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaten zu Göttingen*, Math.–Phys. Klasse, 1900, fascículo 3, 215–237. Existe traducción castellana de todos los problemas propuestos por HILBERT en *Lecturas Matemáticas*, **2** (1981), 23–55, 171–198.

La solución del problema tendrá repercusiones prácticas en el campo de las simulaciones computarizadas de fenómenos en el ámbito científico y económico.

La solución de OXENHIELM se aplica a la segunda parte del problema, denominado “ciclos límites de ecuaciones diferenciales polinomias”.

En declaraciones a la BBC de Londres la joven admitió que le tomó “un par meses pensar en el problema y un par de horas solucionarlo”.

La solución de parte del problema llega un siglo después de que fuera planteado por el matemático prusiano DAVID HILBERT. En 1900, HILBERT expuso en París 23 problemas matemáticos para el siglo XX. Más de 100 años después, tres de éstos misterios permanecen sin resolver: el 6, el 8 y el 16.

El problema 8 es la famosa *hipótesis de Riemann* que involucra números primos, considerado por muchos como el mayor problema matemático de todos. Recientemente, los problemas 8 y 16 han sido ubicados, por el *Clay Institute of Mathematics* en la lista de los 18 desafíos más importantes para los matemáticos del siglo XXI.

Las conclusiones de OXENHIELM serán publicadas próximamente en la revista *Nonlinear Analysis*, bajo el título: *On the second part of Hilbert's 16th problem.* El resumen que aparecerá allí es el siguiente:

> ABSTRACT. Let k be an integer such that k is larger than or equal to zero, and let H be the Hilbert number. In this paper, we use the method of describing functions to prove that in the Liénard equation, the upper bound for $H(2k+1)$ is k. By applying this method to any planar polynomial vector field, it is possible to completely solve the second part of Hilbert's 16th problem.
>
> AUTHOR KEYWORDS: Second part of Hilbert's 16th problem; Hilbert number; Liénard equation; Describing function; Limit cycle; Polynomial vector field.

von jener Gestalt für irgend einen Exponenten h ganz und rational darstellbar ist.

Aus den Grenzgebieten zwischen Algebra und Geometrie möchte ich zwei Probleme nennen: das eine betrifft den geometrischen Abzählungskalkül und das zweite die Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.

Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert*[1]) *auf Grund des sogenannten Prinzips der speziellen Lage oder der Erhaltung der Anzahl mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat.* Wenn auch die heutige Algebra die Durchführbarkeit der Eliminationsprozesse im Prinzip gewährleistet, so ist zum Beweise der Sätze der abzählenden Geometrie erheblich mehr erforderlich, nämlich die Durchführung der Elimination bei besonders geformten Gleichungen in der Weise, daſs der Grad der Endgleichungen und die Vielfachheit ihrer Lösungen sich voraussehen läſst.

16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Kurve $n$ter Ordnung haben kann, ist von Harnack[2]) bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Kurvenzüge in der Ebene. Was die Kurven 6ter Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, daſs die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich auſserhalb von einander verlaufen dürfen, sondern daſs ein Zug existieren muſs, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Äuſserem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. *Eine gründliche Untersuchung der gegenseitigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zu sein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume* — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieviel Mäntel eine Fläche 4ter Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich besitzt.[3])

1) Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.

2) Mathematische Annalen 10.

3) Vgl. Rohn: Flächen vierter Ordnung, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886.

Im Anschlufs an dieses rein algebraische Problem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittelst der nämlichen Methode der kontinuierlichen Koeffizientenänderung in Angriff nehmen läfst, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgleichungen definierten Kurvenscharen von entsprechender Bedeutung ist — nämlich die Frage nach *der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzcyklen (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades* von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

wo X, Y ganze rationale Funktionen $n$ten Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z ganze rationale homogene Funktionen $n$ten Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Definit heifst eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Koeffizienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Operationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen wird — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe[1]), nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahendem Sinne entschieden habe[2]) —, *ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.* Zugleich ist es für gewisse Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Koeffizienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenommen werden dürfen, der durch die Koeffizienten der dargestellten Form gegeben ist.[3])

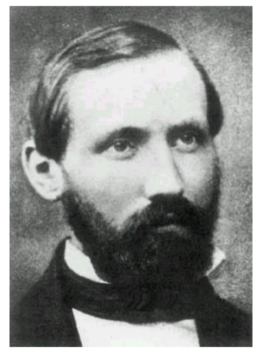
1) Mathematische Annalen 32.

2) Acta mathematica 17.

3) Vgl. Hilbert: Grundlage der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, insbesondere § 38.

150 años de *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* de G. F. B. Riemann (1826-1866)

Este trabajo, cuyo tema fue escogido por Gauss para la *Habilitation* de Riemann, fue leído el 14 de junio de 1854, y se ha convertido en uno de las grandes clásicos de la matemática. En la primera parte del trabajo, Riemann dio la definición de lo que llamamos hoy un espacio riemanniano y su definición de tensor de curvatura. En la segunda parte, hizo profundas preguntas sobre la relación existente entre la geometría y el mundo en que vivimos. Su influencia en el desarrollo posterior de la geometría diferencial, la teoría de la relatividad y la cosmología es inconmensurable.



B. Riemann

Sesquicentenario del nacimiento de H. Poincaré y Centenario de la *Conjetura de Poincaré*

Newton est le prophète de l'ordre
Poincaré est celui du chaos

Este año se celebran los 150 años del nacimiento de Jules Henri Poincaré. La influencia de su pensamiento matemático y filosófico aún perdura. Se le considera el creador de la *topología algebraica moderna* y de *las bases de la teoría del caos*. La demostración de la llamada *conjetura de Poincaré* es uno de los grandes retos del nuevo milenio (véase John Milnor: *Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of* $3-$*Manifolds*, Notices of the AMS **50** (2003), 1226-1223). En su forma original, esta conjetura establece que toda $3-$variedad simplemente conexa y cerrada es homeomorfa a una $3-$esfera, donde una $3-$esfera es sencillamente la generalización de la esfera usual en tres dimensiones (la $2-$esfera) a cuatro dimensiones.

Jules Henri Poincaré
1854 - 1912

Dicho de otra manera, la conjetura dice que la $3-$esfera es el único tipo de espacio acotado de dimensión tres que no tiene huecos. La conjetura la propuso POINCARÉ en 1904, y fue generalizada a la siguiente: toda $n-$variedad compacta es homotópicamente equivalente a la $n-$esfera si, y sólo si, es homeomorfa a la $n-$esfera. Los casos $n = 1, 2$ son resultados clásicos válidos. El caso $n = 4$ fue resuelto por FREEDMAN (1982), el caso $n = 5$ por ZEEMAN (1961), el caso $n = 6$ por STALLINGS (1962). Finalemente, SMALE la demostró para $n > 3$, quedando tan solo sin demostración el caso $n = 3$. De este caso, incluyendo al mismo POINCARÉ, varios matemáticos han dado demostraciones defectuosas. Las últimas se deben a M. J. DUNWOODY (2002) y PERELMAN (2002, 2003), aunque esta última tiene algunas probabilidades de conducirnos en el camino correcto.

Encuentro de Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria y Aplicaciones (Altencoa) 2004

Este Encuentro, organizado por la Escuela regional de Matemáticas (ERM), el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales y la Sociedad Colombiana de matemáticas, se celebrará del 19 al 23 de julio de 2004, en las instalaciones del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, Medellín.

Se espera contar con la presencia de personas como los doctores JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA (México), NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH (Argentina), HÉCTOR MERKLEN (Brasil), MARIO ESTRADA (Cuba), CARLOS MONTENEGRO, VÍCTOR ALBIS, ALEXANDER ZAVADSKIJ, ÁLVARO GARZÓN, JULIO CÉSAR LÓPEZ, , JUAN DIEGO VÉLEZ, CARLOS MARIO PARRA, MARGARITA TORO, HERNÁN GIRALDO & CARLOS TRUJILLO (Colombia).

Para mayores informes escribir a: GILBERTO GARCÍA PULGARÍN, gigarcia@matematicas.udea.edu.co, Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Tel. 57-4-2105640, 5670, Fax 57-4-2105666, Apartado 122, Medellín, Colombia.

XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética

El *Encuentro de geometría* es un evento académico que se realiza en el mes de junio de cada año, de manera ininterrumpida, desde 1990 teniendo como sede la Universidad Pedagógica Nacional; desde el año 2002, además, se lleva a cabo, de manera simultánea con éste, el *Encuentro de aritmética*.

En los anteriores eventos se ha contado con la participación de profesores de reconocida trayectoria investigativa y académica en las diversas áreas de la Matemática y la Educación Matemática, del ámbito nacional e internacional. Dentro de los ponentes internacionales invitados contaremos con la presencia de ÁNGEL GUTIERREZ, profesor de la Universidad de Valencia, y de JOAQUÍN JIMÉNEZ, profesor de la Universidad de Zaragoza, ambos integrantes del grupo liderado por el profesor MIGUEL DE GUZMÁN.

En cada evento ha habido un tema central, en el cual se enfatiza; ejemplos de ellos son: *El arte y la geometría, Relaciones entre el álgebra y la geometría, La topología en la física* y *Aspectos históricos de la geometría y la aritmética*. En esta ocasión, tendremos como tema principal *La didáctica de la geometría* y *La didáctica de la aritmética* para cada uno de los eventos. Para esta versión se presentarán 16 cursillos de cuatro horas y media, 50 conferencias de una hora y 10 comunicaciones de 20 minutos sobre tópicos de Geometría, Aritmética, Topología, Álgebra, Lógica, sus didácticas y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

Las entidades organizadoras del *XV Encuentro de geometría y sus aplicaciones* y el *III Encuentro de aritmética* invitan a todos los profesores, investigadores y estudiantes para que se hagan partícipes en estos eventos, durante los días 24, 25 y 26 de junio de 2004 entre las 7:00 a.m. y las 5:30 p.m. en las instalaciones de la Universidad Pedagógica Nacional y solicitan su colaboración en la promoción de esta actividad académica entre los miembros de su institución.