

## Sobre el comportamiento asintótico de algunas sucesiones de polinomios generadas por fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden

YU TAKEUCHI

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. The asymptotic behavior of systems of polynomials defined by linear second order recurrence relations of the form

$$S_{n+1}(z) - (a_n \cdot z + b_n) \cdot S_n(z) + c_n \cdot S_{n-1}(z) = 0,$$

where  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,  $c_n \rightarrow 1$ , is studied. As an application of the results, the domains of convergence of polynomial series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n S_n(z), \quad p_n \in \mathbb{C},$$

with  $\limsup \sqrt{|p_n|} = \frac{1}{\rho} < 1$  are determined, and the well known Abel's lemma for power series is extended to such series under appropriate assumptions. The latter problem had been previously addressed by professor Miguel Dumett in [3] from a different point of view.

*Key words and phrases.* Linear second order recurrence relations, independent solutions, asymptotic behavior of solutions, bounded and uniformly bounded variation, Chebyshev, Legendre, Gegenbauer and Jacobi polynomials, Abel-Picard convergence.

*1991 Mathematics Subject Classification.* Primary 42C05. Secondary 42C10, 42C15.

RESUMEN. En el presente trabajo se estudia el comportamiento asintótico de sucesiones de polinómios generadas por fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden de la forma

$$S_{n+1}(z) - (a_n \cdot z + b_n) \cdot S_n(z) + c_n \cdot S_{n-1}(z) = 0,$$

donde  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,  $c_n \rightarrow 1$ . Como aplicación de los resultados se investiga el dominio de convergencia de las series de polinomios

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n S_n(z), \quad p_n \in \mathbb{C},$$

cuando  $\limsup \sqrt[n]{|p_n|} = \frac{1}{\rho} < 1$ , y se discute la validez para estas series de un análogo del teorema del límite de Abel-Picard, válido para las series de potencias. Este último problema fue considerado previamente por el profesor Miguel Dumett en [3] desde un punto de vista diferente.

## Introducción

Así como muchas funciones clásicas de la matemática, las hipergeométricas entre ellas, están relacionadas con las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, especialmente con aquellas que definen relaciones de ortogonalidad (la de Bessel, por ejemplo), muchas otras funciones igualmente importantes, entre otras los sistemas clásicos de polinomios ortogonales (Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, etc.), están relacionados con fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden. Y así como los desarrollos en funciones ortogonales (Bessel, por ejemplo) juegan papeles fundamentales en la teoría general de las ecuaciones diferenciales y en sus aplicaciones, lo mismo es cierto de estas últimas funciones, especialmente en áreas como el análisis numérico y la teoría de la aproximación.

Aunque la determinación explícita de las soluciones de una relación de recurrencia no es en general una tarea fácil, investigaciones relativamente recientes han mostrado que muchas propiedades de éstas pueden obtenerse directamente a partir del exámen de los coeficientes de dicha relación. Esto es particularmente cierto del comportamiento asintótico de las soluciones. Conocer el comportamiento asintótico de éstas es especialmente útil para establecer las propiedades de convergencia de los desarrollos en series de dichas soluciones. Curiosamente, aun si las soluciones explícitas son conocidas, el comportamiento asintótico de las mismas puede todavía suministrar valiosa información. El objeto de este trabajo es mostrar cómo este análisis puede realizarse en algunos casos típicos, que incluyen los polinomios de Chebyshev y Legendre, y mostrar cómo tal información puede usarse para examinar la convergencia de los desarrollos propios correspondientes, especialmente en lo relacionado con las propiedades de tales desarrollos en puntos de la frontera de sus dominios de convergencia.

## 1. Fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden

### 1.1. Transformación de los coeficientes.

La fórmula lineal de recurrencia de segundo orden tiene la forma general

$$\widehat{X}_{n+1} - \widehat{a}_n \cdot \widehat{X}_n + \widehat{c}_n \cdot \widehat{X}_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.0)$$

Nosotros examinaremos (1.0) bajo hipótesis que cobijan muchos de los casos más significativos:

$$\widehat{a}_n \rightarrow a \neq 0, \quad \widehat{c}_n \rightarrow c. \quad (1.1)$$

Mediante el cambio de variables

$$\widehat{X}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\widehat{a}_k}{a} \cdot X_n, \quad n \geq 2, \quad \widehat{X}_1 = X_1, \quad \widehat{X}_0 = X_0,$$

(1.0) se transforma en

$$X_{n+1} - a \cdot X_n + c_{n-1} \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

donde

$$c_1 = \frac{a}{\widehat{a}_1} \cdot \widehat{c}_1, \quad c_n = \frac{a^2}{\widehat{a}_{n-1}\widehat{a}_n} \cdot \widehat{c}_n \rightarrow c. \quad (1.3)$$

En esta sección estudiaremos (1.0) en la presentación (1.2).

### 1.2. Comportamiento asintótico de las soluciones.

Dividiendo (1.2) por  $X_n$  y haciendo  $T_n = X_n/X_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , se obtiene la siguiente fórmula fraccionaria de recurrencia de primer orden para  $(T_n)$ :

$$T_{n+1} = a - \frac{c_n}{T_n}, \quad c_n \rightarrow c, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

Supongamos que  $a^2 - 4c > 0$ . Entonces, la ecuación cuadrática  $t^2 - at + c = 0$ , llamada la ecuación característica de la fórmula de recurrencia (1.2), posee dos raíces diferentes  $\lambda, \mu$  ( $|\lambda| < |\mu|$ ). Sabemos de [10], [12] que existe  $p$  tal que

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{X_n}{X_{n-1}} \rightarrow \mu \quad \text{si y sólo si} \quad T_1 = \frac{X_1}{X_0} \neq p, \\ T_n &= \frac{X_n}{X_{n-1}} \rightarrow \lambda \quad \text{si y sólo si} \quad T_1 = \frac{X_1}{X_0} = p \end{aligned} \quad (1.5)$$

Del segundo teorema de Cauchy (veáanse [2], [8]) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|X_n|} &= |\mu| \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{X_1}{X_0} \neq p, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|X_n|} &= |\lambda| \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{X_1}{X_0} = p. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Esto conduce a dos tipos diferentes de soluciones de la fórmula de recurrencia (1.2). En el primer caso diremos que  $(X_n)$  es la solución del tipo  $(\mu^n)$ ; en el segundo, que  $(X_n)$  es del tipo  $(\lambda^n)$ . Denotaremos esta última solución con  $(Y_n)$ . Estas soluciones tienen respectivamente las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha_n \cdot \mu^n, & \text{con} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1, \\ Y_n &= \beta_n \cdot \lambda^n, & \text{con} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta_n|} = 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Usando la notación “ $\sim$ ” para denotar la igualdad asintótica, podemos escribir

$$X_n \sim \alpha_n \cdot \mu^n, \quad Y_n \sim \beta_n \cdot \lambda^n, \quad \text{con} \quad \sqrt[n]{|\alpha_n|} \sim 1, \quad \sqrt[n]{|\beta_n|} \sim 1. \quad (1.8)$$

Se ve inmediatamente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n/X_n = 0$ . Si  $(Y_n), (\tilde{Y}_n)$  son ambas soluciones del tipo  $(\lambda^n)$ , entonces  $Y_1/Y_0 = \tilde{Y}_1/\tilde{Y}_0 = p$ . Por lo tanto, las soluciones del tipo  $(\lambda^n)$  son linealmente dependientes y forman un espacio lineal de dimensión 1 (véase [6]). Por otra parte, si  $(X_n)$  y  $(\tilde{X}_n)$  son soluciones de tipo  $(\mu^n)$ , existe una constante  $A \neq 0$  tal que  $\tilde{X}_n \sim A \cdot X_n$ . En efecto,  $(\tilde{X}_n)$  es una combinación lineal de  $(X_n)$  y  $(Y_n)$  donde  $(Y_n)$  es solución de (1.3) del tipo  $(\lambda^n)$ , y existen entonces constantes  $A$  y  $B$ ,  $A \neq 0$ , tales que

$$(\tilde{X}_n) = A \cdot (X_n) + B \cdot (Y_n).$$

Entonces

$$\frac{\tilde{X}_n}{X_n} = A + B \cdot \frac{Y_n}{X_n} \longrightarrow A, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Teorema 1.1** (Criterio de comparación). *Considérense las fórmulas lineales de recurrencia*

$$\begin{aligned} X_{n+1} - a \cdot X_n + c_n \cdot X_{n-1} &= 0, \\ \tilde{X}_{n+1} - a \cdot \tilde{X}_n + \tilde{c}_n \cdot \tilde{X}_{n-1} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde

$$c_n \rightarrow c, \quad \tilde{c}_n \rightarrow c. \quad (1.10)$$

Supóngase además que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \tilde{c}_n| < +\infty. \quad (1.11)$$

Entonces

- (i) Si  $(X_n), (\tilde{X}_n)$  son soluciones respectivas de las dos fórmulas (1.9), y son ambas del mismo tipo  $(\mu^n)$ , existe una constante  $C \neq 0$  tal que  $\tilde{X}_n \sim C \cdot X_n$ ; esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}_n}{X_n} = C. \quad (1.12)$$

- (ii) Si  $(Y_n), (\tilde{Y}_n)$  son soluciones respectivas de las dos fórmulas (1.9), y son ambas del mismo tipo  $(\lambda^n)$ , existe una constante  $D \neq 0$  tal que  $\tilde{Y}_n \sim D \cdot Y_n$ ; esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_n}{Y_n} = D. \quad (1.13)$$

*Demostración.* (i) Sean

$$\mu_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}, \quad \tilde{\mu}_n = \frac{\tilde{X}_n}{\tilde{X}_{n-1}}$$

Entonces  $(\mu_n), (\tilde{\mu}_n)$  satisfacen

$$\mu_{n+1} = a - \frac{c_n}{\mu_n}, \quad \tilde{\mu}_{n+1} = a - \frac{\tilde{c}_n}{\tilde{\mu}_n}, \quad \mu_n \rightarrow \mu, \quad \tilde{\mu}_n \rightarrow \mu, \quad (1.14)$$

y de (1.14) se obtiene inmediatamente que

$$(\tilde{\mu}_{n+1} - \mu_{n+1}) = \frac{\tilde{c}_n}{\mu_n \tilde{\mu}_n} \cdot (\tilde{\mu}_n - \mu_n) + \frac{c_n - \tilde{c}_n}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

la cual es una fórmula lineal de recurrencia del primer orden para la sucesión  $(\tilde{\mu}_n - \mu_n)$ . Por la hipótesis (1.11) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_n - \tilde{c}_n}{\mu_n} \right| < +\infty.$$

Además,

$$\frac{\tilde{c}_n}{\mu_n \tilde{\mu}_n} \rightarrow \frac{c}{\mu^2} = \frac{\lambda \cdot \mu}{\mu^2} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| < 1.$$

Por lo tanto (véase el Apendice A),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{\mu}_n - \mu_n| < +\infty, \quad (1.15)$$

y como

$$X_n = X_0 \cdot \prod_{k=1}^n \frac{X_k}{X_{k-1}} = X_0 \cdot \prod_{k=1}^n \mu_k, \quad \tilde{X}_n = \tilde{X}_0 \cdot \prod_{k=1}^n \tilde{\mu}_k,$$

entonces

$$\frac{\tilde{X}_n}{X_n} = \frac{\tilde{X}_0}{X_0} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\tilde{\mu}_k}{\mu_k} = \frac{\tilde{X}_0}{X_0} \cdot \prod_{k=1}^n \left[ 1 + \frac{\tilde{\mu}_k - \mu_k}{\mu_k} \right], \quad (1.16)$$

siendo el producto convergente en virtud de (1.15). Se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}_n}{X_n}$$

existe y es no nulo.

(ii) La demostración de (ii) es similar a la de (i).  $\checkmark$

Comparando la fórmula (1.2) con la fórmula lineal de recurrencia

$$X_{n+1} - a \cdot X_n + c \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.17)$$

la cual tiene coeficientes constantes, y teniendo en cuenta que las progresiones geométricas  $(\mu^n; n = 0, 1, 2, \dots)$  y  $(\lambda^n; n = 0, 1, 2, \dots)$  son ambas soluciones de (1.17), se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.** Si en la fórmula lineal de recurrencia (1.2) suponemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c| < +\infty, \quad (1.18)$$

y si  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$  son soluciones de los tipos  $(\mu^n)$  y  $(\lambda^n)$ , respectivamente, entonces existen constantes  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$  tales que  $X_n \sim \alpha \cdot \mu^n$ ,  $Y_n \sim \beta \cdot \lambda^n$ .

Como cualquier solución de la fórmula lineal de recurrencia (1.2) es una combinación lineal de las dos soluciones  $(X_n)$  y  $(Y_n)$  mencionadas en el corolario anterior, se obtiene también el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.** Si  $(X_n)$  es una solución no trivial de la fórmula de recurrencia (1.2), entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n / \mu^n$  existe. Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n / \mu^n = 0$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n / \lambda^n$  existe y es no nulo.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos la fórmula lineal de recurrencia

$$X_{n+1} - 3 \cdot X_n + \frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

así que

$$a = 3, \quad c_n = \frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow c = 2, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2.$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 2.$$

Según el Corolario 1.1, existen entonces soluciones  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$  de tal fórmula de recurrencia tales que  $X_n \sim 2^n$ ,  $Y_n \sim 1$ . En efecto, un cálculo directo muestra que la sucesión  $(X_n) = 2^n \cdot (n-1)/(n+1)$  es una solución. Una segunda solución  $(Y_n)$  está dada por

$$Y_n = X_n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_1 c_2 \dots c_{k-1}}{X_{k-1} X_k} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{2^n}{3} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{(k-2)(k-1)2^k} \sim \frac{1}{3},$$

como resulta de la Regla de L'Hôpital en [8].

Si la hipótesis (1.18) no se satisface, el siguiente teorema da aún el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.2). Usaremos las siguientes notaciones:

$$\sigma = 1 \quad \text{ó} \quad \sigma = -1; \quad \varepsilon_n = c_n - c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Teorema 1.2.** *En la fórmula de recurrencia (1.2), supóngase que*

1. *La sucesión  $(\sigma^n \cdot \varepsilon_n; n = 1, 2, 3, \dots)$  es de variación acotada; esto es, supóngase que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_{n+1} - \sigma \cdot \varepsilon_n| < +\infty.$$

2. *También,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c|^2 < +\infty.$$

Entonces

- (i) *Si  $(X_n)$  es una solución de (1.2) del tipo  $(\mu^n)$ , existe una constante  $C \neq 0$  tal que*

$$X_n \sim C \cdot \mu^n \cdot \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{\mu(\lambda - \sigma\mu)} \cdot \varepsilon_k \right).$$

- (ii) *Si  $(Y_n)$  es una solución de (1.2) del tipo  $(\lambda^n)$ , existe una constante  $D \neq 0$  tal que*

$$Y_n \sim D \cdot \lambda^n \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{\lambda(\mu - \sigma\lambda)} \cdot \varepsilon_k \right).$$

*Demostración.* (i) Sea  $(\tilde{X}_n)$  dada por

$$\tilde{X}_n = \mu^n \cdot \prod_{k=1}^n (1 + t \cdot \varepsilon_k), \quad t = \frac{1}{\mu(\lambda - \sigma\mu)}.$$

Un cálculo directo muestra que  $(\tilde{X}_n)$  satisface la fórmula lineal de recurrencia

$$\tilde{X}_{n+1} - a \cdot \tilde{X}_n + \tilde{c}_n \cdot \tilde{X}_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= c + \lambda\mu \cdot t \cdot \varepsilon_n - \mu^2 t \cdot (1 + t \cdot \varepsilon_n) \cdot \varepsilon_{n+1} \\ &= c + t \cdot \mu(\lambda - \sigma\mu) \cdot \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) + O(\Delta_n) \\ &= c + \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) + O(\Delta_n). \end{aligned}$$

y  $\Delta_n = \varepsilon_{n+1} - \sigma \cdot \varepsilon_n$ .

De las hipótesis 1 y 2 se obtiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{c}_n - c_n| < +\infty$ , y la igualdad asintótica para la solución  $(X_n)$  resulta entonces del Teorema 1.1.

(ii) La demostración de (ii) es similar a la de (i).  $\square$

**Ejemplo 1.2.** Considérese la fórmula lineal de recurrencia

$$X_{n+1} - 3 \cdot X_n + \frac{2n}{n+1} \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

así que

$$a = 3, \quad c_n = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}, \quad \varepsilon_n = -\frac{2}{n+1}, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2.$$

Claramente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} < +\infty \quad (\sigma = 1).$$

En virtud del Teorema 1.2, existen entonces soluciones  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$  tales que

$$X_n \sim 2^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n+2}{2} \cdot 2^n, \quad Y_n \sim \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) = \frac{2}{n(n+1)}.$$

**Ejemplo 1.3.** Considérese la fórmula lineal de recurrencia

$$X_{n+1} - 3 \cdot X_n + \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

en la cual

$$a = 3, \quad c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2.$$



Se observa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty.$$

(En este caso  $\sigma = -1$ ). El Teorema 1.2 asegura entonces la existencia de soluciones  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$  tales que

$$X_n \sim 2^n \cdot \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{(-1)^k}{6k} \right), \quad Y_n \sim \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{(-1)^k}{3k} \right).$$

Como los productos infinitos convergen (véase [11]), se concluye que  $X_n \sim C \cdot 2^n$ ,  $Y_n \sim D$ , donde  $C$  y  $D$  son constantes no nulas.

### 1.3. Una aplicación del método de variación de parámetros.

Si  $\lambda$ ,  $\mu$  ( $|\lambda| \leq |\mu|$ ) son las raíces de la ecuación característica de la fórmula de recurrencia (1.2), tenemos el siguiente teorema (la restricción  $a^2 - 4c > 0$  impuesta en el párrafo anterior no es necesaria).

**Teorema 1.3** Si  $(X_n)$  es cualquier solución de la fórmula (1.2), entonces

$$\limsup \sqrt[n]{|X_n|} \leq |\mu|. \tag{1.18}$$

*Demostración.* Escribiendo (1.2) en la forma

$$X_{n+1} - a \cdot X_n + c \cdot X_{n-1} = \varepsilon_n \cdot X_{n-1}, \tag{1.19}$$

donde  $\varepsilon_n = c - c_n$ , y aplicando el “método de variación de parámetros” (Apéndice B) a la fórmula (1.19), se obtiene que:

(i) Cuando  $\lambda \neq \mu$  (esto es, cuando  $a^2 - 4c \neq 0$ ),

$$X_n = A \cdot \mu^n + B \cdot \lambda^n + \frac{1}{\mu - \lambda} \cdot \sum_{k=1}^n (\mu^{n-k} - \lambda^{n-k}) \cdot \varepsilon_k \cdot X_{k-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1.20}$$

donde

$$A = \frac{X_1 - \lambda X_0}{\mu - \lambda}, \quad B = \frac{-X_1 + \mu X_0}{\mu - \lambda}.$$

Dividiendo (1.20) por  $\mu^n$ , teniendo en cuenta que  $|\mu^{n-k} - \lambda^{n-k}| \leq 2 \cdot |\mu^{n-k}|$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_n}{\mu^n} \right| &\leq |A| + |B| + \frac{2}{|\mu(\mu - \lambda)|} \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k| \left| \frac{X_{k-1}}{\mu^{k-1}} \right| \\ &< M + \sum_{k=1}^n d_k \cdot \left| \frac{X_{k-1}}{\mu^{k-1}} \right|, \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde

$$M = |A| + |B| \geq |A + B| = |X_0|, \quad d_k = \frac{2}{|\mu(\mu - \lambda)|} \cdot |\varepsilon_k|,$$

y de (1.21) (Apéndice C),

$$\left| \frac{X_n}{\mu^n} \right| \leq M \cdot \prod_{k=1}^n (1 + d_k). \quad (1.22)$$

Como  $d_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , (1.22) implica (1.18)

(ii) Cuando  $\lambda = \mu$  (esto, es cuando  $a^2 - 4c = 0$ ),

$$X_n = \mu^{n-1} (nX_1 - (n-1)\mu X_0) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \mu^{n-k-1} \cdot \varepsilon_k X_{k-1}, \quad (1.23)$$

y si  $r > |\mu|$  es arbitrario, dividiendo (1.23) por  $r^n$  se concluye que

$$\left| \frac{X_n}{r^n} \right| \leq \left( \frac{|\mu|}{r} \right)^n \left| \frac{nX_1 - (n-1)\mu X_0}{\mu} \right| + \sum_{k=1}^n \left( \frac{|\mu|}{r} \right)^{n-k} \cdot \frac{n-k}{|\mu| \cdot r} \cdot |\varepsilon_k| \left| \frac{X_{k-1}}{r^{k-1}} \right|.$$

Como  $|\mu|/r < 1$ , existirá entonces  $M_0 > 0$  tal que

$$\left( \frac{|\mu|}{r} \right)^n \cdot \left| \frac{nX_1 - (n-1)\mu X_0}{\mu} \right| \leq M_0, \quad \left( \frac{|\mu|}{r} \right)^n \cdot \frac{n}{|\mu| \cdot r} \leq M_0$$

para todo  $n$ . Razonando en forma análoga al caso (i) se obtiene entonces, en lugar de (1.22), que

$$\left| \frac{X_n}{r^n} \right| \leq M_0 \cdot \prod_{k=1}^n (1 + M_0 |\varepsilon_k|).$$

Por lo tanto,  $\limsup \sqrt[n]{|X_n|} \leq r$ . Como  $r > |\mu|$  es arbitrario, la relación anterior implica (1.18)  $\checkmark$

**Nota 1.1.** Si en el caso  $a^2 - 4c \neq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$ , entonces  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + d_k)$  converge absolutamente. En consecuencia,  $M \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 + d_k)$  es una cota superior de la sucesión  $(|X_n/\mu^n|; n = 0, 1, 2, \dots)$ .

## 2. Sucesiones de polinomios

### 2.1. Los polinomios de Chebyshev $T_n(z)$ , $n = 0, 1, 2, \dots$

La sucesión  $(T_n(z); n = 0, 1, 2, \dots)$  es la solución de la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden

$$T_{n+1}(z) - 2z \cdot T_n(z) + T_{n-1}(z) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.0)$$

que satisface las condiciones iniciales

$$T_0(z) = 1, \quad T_1(z) = z. \tag{2.1}$$

Evidentemente  $T_n(z)$  es un polinomio de grado  $n$  en la variable  $z$ , que suponemos que toma valores complejos.

Como la fórmula de recurrencia (2.0) es lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, su solución general se puede encontrar inmediatamente. Sean  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  las raíces de su ecuación característica  $t^2 - 2z \cdot t + 1 = 0$ . Entonces

$$\lambda(z), \quad \mu(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 1}. \tag{2.2}$$

Teniendo ahora en cuenta que las progresiones geométricas  $(\lambda(z)^n; n = 0, 1, 2 \dots)$ ,  $(\mu(z)^n; n = 0, 1, 2 \dots)$  son soluciones linealmente independientes de (2.0), consideraremos separadamente tres casos:

(i)  $z = x$  (real),  $-1 < x < 1$ . Entonces

$$\lambda(x), \quad \mu(x) = x \pm i \cdot \sqrt{1 - x^2} = e^{\pm i\theta}, \quad x = \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \tag{2.3}$$

así que  $|\lambda(z)| = |\mu(z)| = 1$  y  $T_n(x) = \cos n\theta$ . Evidentemente la sucesión  $T_n(x)/T_{n-1}(x) = \cos n\theta / \cos(n-1)\theta$  diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, se tiene (Teorema 1.3) que

$$\limsup \sqrt[n]{|T_n(x)|} = \limsup \sqrt[n]{|\cos n\theta|} \leq 1, \quad -1 < x < 1.$$

Nótese que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|T_n(x)|}$  no siempre existe y que el conjunto

$$\left\{ x \in (-1, 1) : \liminf \sqrt[n]{|T_n(x)|} = 0 \right\}$$

es no vacío y de medida de Lebesgue nula (véase [7]).

(ii)  $x = \pm 1$ . En este caso  $\lambda = \mu = x = \pm 1$ ,  $|\lambda(\pm 1)| = |\mu(\pm 1)| = 1$ . Tenemos además que  $T_n(x) = x^n$  y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{T_{n-1}(x)} = x = \pm 1.$$

En consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|T_n(x)|} = 1$ .

(iii)  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Como  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ , (si + corresponde a  $\lambda(z)$ , lo hará a  $\mu(z)$ , y recíprocamente), un cálculo elemental muestra que  $|\lambda(z)| \neq |\mu(z)|$  para todo  $z$  en la región  $\Omega$ . Para  $z \in \Omega$  se escogen ahora  $\lambda(z), \mu(z)$  de tal manera que

$$|\lambda(z)| < |\mu(z)|. \tag{2.4}$$

Nótese que  $|\lambda(z)| < 1 < |\mu(z)|$  (puesto que  $|\lambda(z)| \cdot |\mu(z)| = 1$ ).

Cuando  $z = x$  real,  $|x| > 1$ , teniendo en cuenta que  $\sqrt{\quad}$  representa el valor positivo de la raíz, la escogencia anterior implica que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \lambda(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{para } x > 1, \\ \mu(x) &= x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad \lambda(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{para } x < -1.\end{aligned}$$

Es bien conocido que  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ , definidas por (2.2) y (2.4), son funciones analíticas en  $\Omega$  con  $\lambda'(z) \neq 0$ ,  $\mu'(z) \neq 0$ ,  $z \in \Omega$ .

Ahora,  $T_n(z)$  es una combinación lineal de  $\lambda(z)^n$ ,  $\mu(z)^n$ ; esto es,

$$T_n(z) = A \cdot \lambda(z)^n + B \cdot \mu(z)^n,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Como además  $T_0(z) = 1$  y  $T_1(z) = z$ , entonces  $A = B = \frac{1}{2}$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned}T_n(z) &= \frac{1}{2} \cdot (\lambda(z)^n + \mu(z)^n) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( (z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n \right).\end{aligned}\tag{2.5}$$

De (2.5) se obtiene entonces, para  $z \in \Omega$ , la expresión asintótica

$$T_n(z) = \frac{\mu(z)^n}{2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \right)^n \right) \sim \frac{1}{2} \cdot \mu(z)^n, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z)/T_{n-1}(z) = \mu(z)$  y, en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|T_n(z)|} = |\mu(z)|, \quad z \in \Omega.\tag{2.6}$$

## 2.2. Series de polinomios de Chebyshev.

Como es claro, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot T_n(z), \quad p_n \in \mathbb{C},\tag{2.7}$$

converge si  $\limsup \sqrt[n]{|p_n \cdot T_n(z)|} < 1$  y diverge si  $\limsup \sqrt[n]{|p_n \cdot T_n(z)|} > 1$ . Para  $z \in \Omega$ , (2.6) implica que

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{|p_n \cdot T_n(z)|} &= \limsup \sqrt[n]{|p_n|} \cdot \lim \sqrt[n]{|T_n(z)|} \\ &= |\mu(z)| \cdot \limsup \sqrt[n]{|p_n|}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que  $|\mu(z)| > 1$ , si  $\limsup \sqrt[n]{|p_n|} \geq 1$  entonces  $\limsup \sqrt[n]{|p_n \cdot T_n(z)|} > 1$  para todo  $z \in \Omega$ . Por esta razón supondremos,

de ahora en adelante, que

$$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|p_n|} < 1. \tag{2.8}$$

En tal caso, la serie (2.7) converge absolutamente cuando  $|\mu(z)| < \rho$  y diverge cuando  $|\mu(z)| > \rho$ . Nótese que (2.7) converge para  $z \in [-1, 1]$ .

Con el fin de investigar para qué valores de  $z \in \mathbb{C}$  la serie (2.7) converge es conveniente hacer uso de coordenadas elípticas en el plano. Denotándolas con  $(s, t)$ , éstas están relacionadas con las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  por las ecuaciones

$$x = \cos s \cdot \cosh t, \quad y = \operatorname{sen} s \cdot \sinh t; \quad s \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.9}$$

Se observa que para  $t$  fijo, el punto  $z = x + iy$  describe la elipse

$$\frac{x^2}{\cosh^2 t} + \frac{y^2}{\sinh^2 t} = 1. \tag{2.10}$$

A su vez, para  $s$  fijo,  $z = x + iy$  describe la hipérbola

$$\frac{x^2}{\cos^2 s} - \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 s} = 1. \tag{2.11}$$

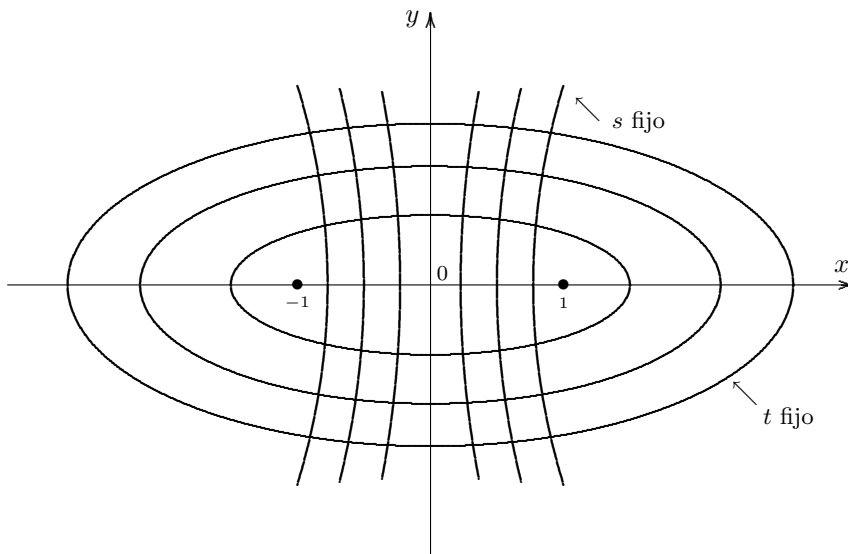


FIGURA 1

Estas curvas se intersectan ortogonalmente y los focos de ambas están localizados en los puntos  $-1, 1$  (Figura 1).

De (2.9) obtenemos también que

$$z = x + iy = \cos s \cdot \cosh t + i \cdot \operatorname{sen} s \cdot \operatorname{senht} = \cos (s - it),$$

así que

$$\sqrt{z^2 - 1} = i \cdot \sqrt{1 - z^2} = i \cdot \sqrt{1 - \cos^2 (s - it)} = \pm i \operatorname{sen} (s - it).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda(z), \mu(z) &= z \pm \sqrt{z^2 - 1} = \cos(s - it) \pm i \operatorname{sen}(s - it) \\ &= e^t \cdot e^{is}, \quad \text{ó} \quad e^{-t} \cdot e^{-is} \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que  $|\lambda(z)| < 1 < |\mu(z)|$ , y  $t \geq 0$ , se concluye que

$$\lambda(z) = e^{-t} \cdot e^{-is}, \quad \mu(z) = e^t \cdot e^{is}, \quad z \in \Omega. \quad (2.12)$$

Si  $z$  satisface a la ecuación  $|\mu(z)| = \rho$  entonces  $t = \log \rho$ . En este caso el punto  $z = x + iy$  describe la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.13)$$

donde

$$a = \cosh(\log \rho) = \frac{1}{2} \cdot \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b = \sinh(\log \rho) = \frac{1}{2} \cdot \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Evidentemente  $|\mu(z)| < \rho$  si y sólo si  $z$  está en el interior de la elipse (2.13), y  $|\mu(z)| > \rho$  si y sólo si  $z$  está en el exterior de la misma. Por lo tanto, *si  $z$  está en el interior de la elipse (2.13), la serie (2.7) converge absolutamente, mientras que si  $z$  está en el exterior de dicha elipse, la serie diverge.*

En otras palabras, la elipse (2.13) es “*la elipse de convergencia*” de la serie (2.7) de polinomios de Chebyshev.

**Teorema 2.1.** (*Teorema del límite de Abel para las series de polinomios de Chebyshev*). Sea  $z_0$  un punto sobre la elipse de convergencia (2.13), esto es,  $|\mu(z_0)| = \rho$ . Si la serie (2.7) converge en  $z_0$ , entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot T_k(z) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot T_k(z_0) \quad (2.14)$$

cuando  $z$ , con  $|\mu(z)| < \rho$ , tiende a  $z_0$  sobre cualquier curva regular que corte a la elipse (2.13) en  $z_0$  y forme con ésta un ángulo de corte  $\varphi$  no nulo.

*Demostración.* Considérese la representación conforme  $w = \mu(z)$ , con  $\mu(z)$  dada por (2.3) y (2.4) (Figura 2).

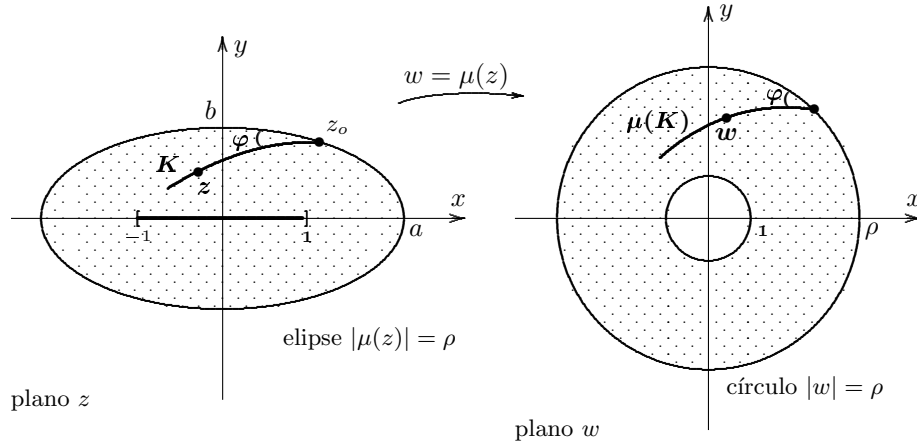


FIGURA 2

Mediante esta representación, la región  $\{z : |\mu(z)| < \rho, z \notin [-1, 1]\}$  del plano  $z$  se transforma en el anillo  $\{w : 1 < |w| < \rho\}$  del plano  $w$ . Si  $K$  es una curva regular que corta a la elipse en  $z_0$  con un ángulo  $\alpha \neq 0$ ,  $\mu(K)$  es también una curva regular que corta al círculo  $|w| = \rho$  en  $w_0 = \mu(z_0)$ , con el mismo ángulo  $\alpha$ . Aplicando el teorema de Abel-Picard (véanse [2] y el Apéndice G) se tiene entonces que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \mu(z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot w^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot w_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \mu(z_0)^k. \quad (2.15)$$

cuando  $w \rightarrow w_0$ . Por otra parte, como la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \lambda(z)^k$  converge uniformemente en  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \lambda(z)^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \lambda(z_0)^k, \quad (2.16)$$

cuando  $z \rightarrow z_0$ , y (2.14) se obtiene inmediatamente de (2.5), (2.15) y (2.16). ✓

**Nota 2.1.** Para información adicional sobre las representaciones conformes, el lector puede consultar [4].

### 2.3. Otras sucesiones de polinomios generadas por fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden.

Considérese la fórmula de recurrencia

$$S_{n+1} - (a_n \cdot z + b_n) \cdot S_n + c_n \cdot S_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

donde

$$a_n \rightarrow a \neq 0, \quad b_n \rightarrow b, \quad c_n \rightarrow c.$$

Mediante el cambio de variables

$$S_n = (\sqrt{c})^n \cdot \tilde{S}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

la fórmula (2.17) se transforma en

$$\tilde{S}_{n+1} - \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot a_n \cdot z + \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot b_n \right) \cdot \tilde{S}_n + \frac{c_n}{c} \cdot \tilde{S}_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot a_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot a, \quad \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot b_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot b, \quad \frac{c_n}{c} \rightarrow 1.$$

Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que  $c = 1$ .

A su vez, mediante el cambio de parámetro

$$z = \left( \frac{2}{a} \right) \cdot z' - \frac{b}{a},$$

(2.17) se transforma en

$$S_{n+1} - \left( \frac{2a_n}{a} \cdot z' + b_n - \frac{a_n \cdot b}{a} \right) \cdot S_n + c_n \cdot S_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde

$$\frac{2a_n}{a} \rightarrow 2, \quad b_n - \frac{a_n b}{a} \rightarrow 0.$$

Por esta razón podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,  $c_n \rightarrow 1$ .

**Nota 2.2.** En la fórmula de recurrencia (2.17), la variable independiente es “ $n$ ”, la variable dependiente es “ $S_n$ ” y  $z$  es un “parámetro”; esto es, para cada valor de  $z$  tenemos una fórmula de recurrencia diferente.

Examinaremos ahora algunas propiedades básicas de la sucesión  $(S_n(z))$  definida por (2.17). Para cada valor del parámetro  $z$ , consideremos nuevamente la fórmula de recurrencia

$$S_{n+1}(z) - (a_n \cdot z + b_n) \cdot S_n(z) + c_n \cdot S_{n-1}(z) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



donde ahora suponemos que  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,  $c_n \rightarrow 1$ . Supondremos además que  $a_n, b_n, c_n$  son reales y que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a_n > |b_n|, \quad c_n > 0, \quad n \geq 1 \tag{2.18}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot a_{n-1} - 4 \cdot c_n| < +\infty. \tag{2.19}$$

Si la sucesión  $(S_n(z))$  satisface las condiciones iniciales  $S_0(z) = 1$ ,  $S_1(z) = z$ , entonces:

- (i)  $S_n(z)$  es un polinomio de grado  $n$  en el parámetro  $z$ . Esto es evidente.
- (ii) Existe  $M \geq 1$  tal que para  $x$  real,  $x > M$ , la sucesión  $(S_n(x))$  es creciente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$  (exponencialmente).

En efecto, existe  $M \geq 1$  tal que  $a_n \cdot M > |b_n| + c_n + 2$  para todo  $n$ . Supóngase ahora, inductivamente, que  $0 < S_0(x) < S_1(x) < \dots < S_n(x)$  para  $x > M$ . Entonces,

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) &> (a_n M + b_n) \cdot S_n(x) - c_n \cdot S_{n-1}(x) \\ &> (c_n + 2) \cdot S_n(x) - c_n \cdot S_{n-1}(x) \\ &> 2 \cdot S_n(x) + c_n \cdot (S_n(x) - S_{n-1}(x)) \\ &> 2 \cdot S_n(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_{n+1}(x) > S_n(x) \text{ y } S_n(x) > 2^n \cdot S_0(x), \quad n \geq 0.$$

Esto demuestra que  $(S_n(x))$  es creciente y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$  (exponencialmente) para  $x > M$ .

- (iii) Para  $x$  real,  $x < -M$ , la sucesión  $((-1)^n \cdot S_n(x); n = 0, 1, 2, \dots)$  es creciente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot S_n(x) = +\infty$  (exponencialmente).

En efecto, mediante el cambio de variables  $S_n(x) = (-1)^n \cdot \tilde{S}_n(x)$ , la fórmula de recurrencia (2.17) se transforma en

$$\tilde{S}_{n+1}(x) - (a_n \cdot (-x) - b_n) \cdot \tilde{S}_n(x) + c_n \cdot \tilde{S}_{n-1}(x) = 0,$$

y basta utilizar el mismo argumento que en (ii).

- (iv) Los ceros del polinomio  $S_n(x)$  son todos reales y están en el intervalo  $(-M, M)$ .

En efecto, utilizando la fórmula de recurrencia (2.17), las propiedades (ii) y (iii), y el teorema del valor intermedio, se puede demostrar, por inducción, que siempre existe un cero de  $S_n(x)$  entre dos ceros consecutivos de  $S_{n-1}(x)$ ,

que existe un cero de  $S_n(x)$  entre  $-M$  y el primer cero de  $S_{n-1}(x)$ , y que hay también un cero de  $S_n(x)$  entre el último cero de  $S_{n-1}(x)$  y  $M$ .

Examinemos ahora el comportamiento asintótico de  $(S_n(x))$  para  $z \in \Omega$ . Efectuando el cambio de variables

$$S_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k z + b_k}{2z} \cdot X_n(z), \quad n \geq 2, \quad S_0(z) = X_0(z), \quad S_1(z) = X_1(z), \quad (2.20)$$

la fórmula de recurrencia (2.17) toma la forma

$$X_{n+1}(z) - 2z \cdot X_n(z) + \tilde{c}_n(z) \cdot X_{n-1}(z) = 0, \quad X_0(z) = 1, \quad X_1(z) = z, \quad (2.21)$$

donde

$$\tilde{c}_n(z) = c_n \cdot \frac{4z^2}{(a_n z + b_n)(a_{n-1} z + b_{n-1})}, \quad \tilde{c}_1(z) = c_1 \cdot \frac{2z}{a_1 z + b_1}. \quad (2.22)$$

De esto se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

(v)  $\tilde{c}_n(z)$  es una función analítica de  $z$  en la región  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Además,  $(\tilde{c}_n(z)) \rightarrow 1$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ .

(vi)  $X_n(z)$  es una función analítica de  $z$  en la región  $\Omega$ .

(vii) La sucesión  $(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k z + b_k|}{2|z|}; n = 2, 3, 4, \dots)$  es moderada para  $z \in \Omega$ . Esto es (véase [7]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k z + b_k|}{2|z|}} = 1.$$

(viii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{c}_n(z) - 1| < +\infty. \quad (2.23)$$

En efecto,

$$|\tilde{c}_n(z) - 1| = \frac{|(a_n \cdot a_{n-1} - 4c_n) \cdot z^2 + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n) \cdot z + b_n \cdot b_{n-1}|}{|a_n z + b_n| \cdot |a_{n-1} z + b_{n-1}|},$$

y por la hipótesis (2.19), la serie (2.23) converge. Nótese que la suma de la serie (2.23) es uniformemente acotada sobre cualquier subconjunto compacto de  $\Omega$ .

Sea  $\alpha_n(z)$  definida por

$$\alpha_n(z) = \frac{X_n(z)}{\mu(z)^n}, \quad n \geq 1.$$

Entonces  $\alpha_n(z)$  es, para todo  $n$ , analítica en la región  $\Omega$ . Ahora, por el Corolario 1.2, la sucesión  $(\alpha_n(z); n = 0, 1, 2, \dots)$  converge para todo  $z \in \Omega$ , y por (1.22), la sucesión  $(\alpha_n(z))$  es *uniformemente acotada* en cualquier subconjunto compacto de  $\Omega$ . Por lo tanto, la sucesión  $(\alpha_n(z))$  converge *uniformemente en compactos* de  $\Omega$  (véase [5]).

Sea

$$\alpha(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(z), \quad z \in \Omega.$$

Entonces  $\alpha(z)$  es analítica en  $\Omega$ . Como para todo  $n$ ,  $\alpha_n(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus [-M, M] \subseteq \Omega$  (Propiedad (iv)), entonces  $\alpha(z)$  no tiene ningún cero en  $\mathbb{C} \setminus [-M, M]$ , o  $\alpha(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]$  (Teorema de Hurwitz, véase [4] p. 247). Supóngase que fuera  $\alpha(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]$ . Por el Teorema de coincidencia de las funciones analíticas ([4], p. 226), se tendría que  $\alpha(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$  y, por el Corolario 1.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z)/\lambda(z)^n$  existiría para todo  $z \in \Omega$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(z)}{\lambda(z)^n} \cdot \lambda(z)^n = 0, \quad z \in \Omega.$$

Esto contradice la propiedad (ii). Entonces

(ix)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(z)}{\mu(z)^n} = \alpha(z)$$

*uniformemente en compactos de  $\Omega$ , donde  $\alpha(z)$  es analítica en  $\Omega$  y  $\alpha(z) \neq 0$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C} \setminus [-M, M] \subseteq \Omega$ .*

De (2.20) se obtiene entonces que  $(S_n(z))$  se comporta asintóticamente en la forma

$$S_n(z) \sim \alpha(z) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k z + b_k}{2z} \cdot \mu(z)^n, \quad (2.25)$$

de lo cual

(x)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(z)}{S_{n-1}(z)} = \mu(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [M, M]. \quad (2.26)$$

Nótese que la función analítica  $\alpha(z)$  puede anularse en puntos del intervalo  $[-M, M]$  (véase el siguiente ejemplo), y si  $\alpha(x_0) = 0$  entonces, por el Corolario 1.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x_0)}{S_{n-1}(x_0)} = \lambda(x_0)$$

de lo cual,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S_n(x_0)|} = |\lambda(x_0)|$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $(S_n(x); n = 0, 1, 2, \dots)$  la solución de la fórmula lineal de recurrencia

$$\begin{aligned} S_2(z) - (z-1) \cdot S_1(z) + S_0(z) &= 0, \\ S_{n+1}(z) - 2z \cdot S_n(z) + S_{n-1}(z) &= 0, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

sujeta a las condiciones iniciales  $S_0(z) = 1$ ,  $S_1(z) = z$ .

Entonces,

$$S_2(z) = z^2 - z - 1; \quad S_n(z) = A(z) \cdot \mu(z)^n + B(z) \cdot \lambda(z)^n, \quad n \geq 1,$$

y  $A(z), B(z)$  pueden determinarse a partir de las condiciones  $S_1(z) = z$ ,  $S_2(z) = z^2 - z - 1$ ; o sea,

$$A(z) \cdot \mu(z) + B(z) \cdot \lambda(z) = z, \quad A(z) \cdot \mu(z)^2 + B(z) \cdot \lambda(z)^2 = z^2 - z - 1.$$

Entonces,

$$A(z) = \frac{z^2 - z - 1 - z \cdot \lambda(z)}{\mu(z) \cdot (\mu(z) - \lambda(z))}, \quad B(z) = \frac{z \cdot \mu(z) - z^2 + z + 1}{\lambda(z) \cdot (\mu(z) - \lambda(z))}.$$

Como además  $S_n(z)/\mu(z)^n \sim A(z)$  y

$$\frac{S_n(z)}{\mu(z)^n} = \frac{z-1}{2z} \cdot \alpha_n(z) \sim \frac{z-1}{2z} \cdot \alpha(z)$$

entonces  $\alpha(z) = 2z/(z-1) \cdot A(z)$  para  $z \in \Omega$ . Como  $\lambda(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  para  $x < -1$ , se ve inmediatamente que  $\alpha(x)$  no tiene ceros en  $(-\infty, -1)$ . Por otra parte,  $\lambda(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}, x > 1$ , y  $\alpha(x) = 0$  si y sólo si  $x^2 - x - 1 - x \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ ; o sea, cuando  $x > 1$ ,  $\alpha(x) = 0$  si y sólo si  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ . Ahora, la ecuación cúbica  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  tiene la única raíz real  $q = 1.8393\dots > 1$ .

Por lo tanto,

$$S_n(z) \sim \frac{z-1}{2z} \cdot \alpha(z) \cdot \mu(z)^n, \quad z \in \Omega,$$

donde  $\alpha(z)$  es analítica en  $\Omega, \alpha(z) \neq 0$  para  $z \neq q$  y  $\alpha(q) = 0$ . Además, existe una constante real  $C \neq 0$  tal que  $S_n(q) \sim C \cdot \lambda(q)^n$ . En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(q)}{S_{n-1}(q)} = \lambda(q).$$

**Nota 2.3.** Sea  $Z$  el conjunto de los ceros de todos los polinomios  $S_n(x), n = 1, 2, 3, \dots$ . Es decir,

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : S_n(x) = 0\}. \quad (2.27)$$

Si  $x_0 \notin [-1, 1]$  es un punto de acumulación del conjunto  $Z$  entonces  $\alpha(x_0) = 0$ , ya que  $(\alpha_n(x); n = 0, 1, 2, \dots)$  converge a  $\alpha(x)$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ .

(xi) La sucesión de funciones  $(\alpha_n(z); n = 0, 1, 2, \dots)$  es de variación uniformemente acotada en cualquier subconjunto compacto de  $\Omega$  (Apéndice E).

En efecto, reemplazando  $X_n(z) = \alpha_n(z) \cdot \mu(z)^n$  en (2.21) se obtiene la fórmula de recurrencia

$$\alpha_{n+1}(z) - \frac{2z}{\mu(z)} \cdot \alpha_n(z) + \frac{\tilde{c}_n(z)}{\mu(z)^2} \cdot \alpha_{n-1}(z) = 0.$$

Teniendo entonces en cuenta que  $2z = \lambda(z) + \mu(z)$  y  $1 = \lambda(z) \cdot \mu(z)$ , la fórmula anterior puede escribirse en la forma

$$\alpha_{n+1}(z) - \left(1 + \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}\right) \cdot \alpha_n(z) + \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \cdot \tilde{c}_n(z) \cdot \alpha_{n-1}(z) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

o sea, en la forma

$$\alpha_{n+1}(z) - \alpha_n(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \cdot (\alpha_n(z) - \alpha_{n-1}(z)) + \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \cdot (1 - \tilde{c}_n(z)) \cdot \alpha_{n-1}(z). \quad (2.28)$$

Si  $D$  es un subconjunto compacto  $\Omega$ , existen  $0 < r < 1$  y  $M > 0$  tales que, para todo  $z \in D$  y todo  $n \geq 1$ ,

$$\left| \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \right| < r, \quad |\alpha_{n-1}(z)| < \frac{M}{r}$$

En efecto,  $\left| \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \right| < 1$  para todo  $z \in D$ , y la sucesión  $(\alpha_{n-1}(z))$  es uniformemente acotada en  $D$ . De (2.28) se obtiene además la desigualdad

$$|\alpha_{n+1}(z) - \alpha_n(z)| \leq r \cdot |\alpha_n(z) - \alpha_{n-1}(z)| + M \cdot |1 - \tilde{c}_n(z)|,$$

así que sumando con respecto a  $n$ , desde  $n = 1$  hasta  $n = N$ ,

$$(1 - r) \cdot \sum_{n=2}^N |\alpha_n(z) - \alpha_{n-1}(z)| \leq r \cdot |\alpha_1(z) - \alpha_0(z)| + M \cdot \sum_{n=1}^N |1 - \tilde{c}_n(z)|, \quad (2.29)$$

y (2.29) implica que la sucesión  $(\alpha_n(z))$  es de variación uniformemente acotada en  $D$ .

(xii) Se tiene que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k z + b_k}{2z} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right),$$

y la sucesión  $\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right)\right)$  es de variación uniformemente acotada en cualquier subconjunto compacto  $\Omega$ .

En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right) - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_n}{a_n z} \right| \cdot \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right) \right|,$$

y, por (2.19)  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ . Entonces, la serie anterior converge, y su suma total, es acotada en cualquier subconjunto compacto de  $\Omega$ .

Consideremos ahora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z), \quad \limsup \sqrt[n]{|p_n|} = \frac{1}{\rho} < 1. \quad (2.30)$$

Esta serie converge en el interior de la elipse en (2.13). En caso de que la función analítica  $\alpha(z)$  tenga un cero  $x_0$  en el exterior de tal elipse, la serie converge en  $x_0$ , pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S_n(x_0)|} = |\lambda(x_0)| < 1$ . Con la posible excepción en los ceros de  $\alpha(z)$ , la serie diverge en el exterior de la elipse (2.13). Si todos los ceros de los polinomios  $S_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  están en el intervalo  $(-1, 1)$  entonces  $\alpha(z) \neq 0$  en la región  $\Omega$ , y en tal caso la serie (2.30) diverge sin excepciones en el exterior de la elipse (2.13).

**Teorema 2.2.** (Teorema del límite de Abel-Picard). *Sea  $z_0$  un punto sobre la elipse (2.13), así que  $(|\mu(z_0)|) = \rho$ . Si  $\alpha(z_0) \neq 0$  y la serie (2.30) converge en  $z_0$ , entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z_0) \quad (2.31)$$

cuando  $z$ , con  $|\mu(z)| < \rho$ , tiende a  $z_0$  sobre cualquier curva regular que corte a la elipse (2.13) en  $z_0$ , y que forme con ésta un ángulo de corte no nulo.

*Demostración.* Sea  $D$  un disco cerrado de  $\Omega$ , con centro en  $z_0$  (Figura 3).

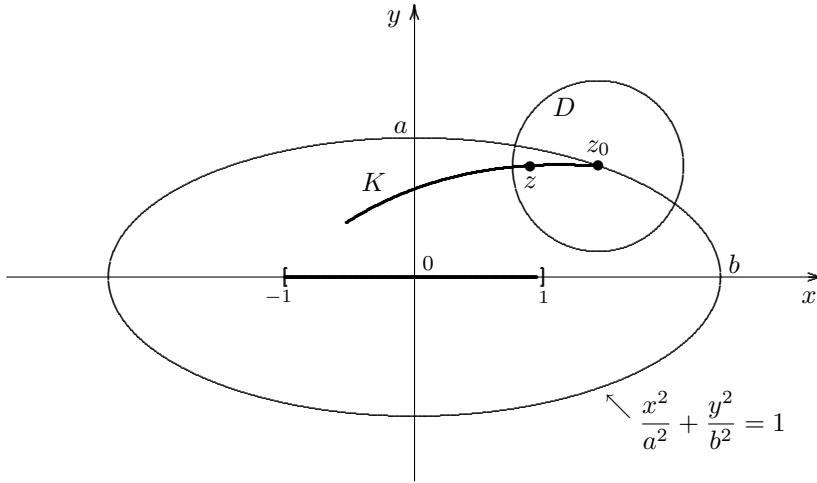


FIGURA 3

Teniendo en cuenta que

$$\frac{S_n(z)}{\mu(z)^n} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right) \cdot \alpha_n(z),$$

la sucesión

$$\left( \frac{S_n(z)}{S_n(z_0)} \left( \frac{\mu(z_0)}{\mu(z)} \right)^n ; n = 2, 3, \dots \right) = \left( \frac{\alpha_n(z) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z}\right)}{\alpha_n(z_0) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k z_0}\right)} ; n = 2, 3, \dots \right)$$

resulta ser de variación uniformemente acotada en  $D$ , pues las sucesiones  $(\alpha_n(z))$  y  $\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{b_k}{a_k \cdot z}\right)\right)$  son de variación uniformemente acotada en  $D$  y están separadas de cero. Por el lema de Abel ([2] y Apéndice F), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( p_n \cdot \frac{S_n(z)}{\mu(z)^n} \right) \cdot \mu(z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z_0) \cdot \frac{S_n(z)}{S_n(z_0)} \cdot \left( \frac{\mu(z_0)}{\mu(z)} \right)^n$$

converge uniformemente en  $D$ , pues la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z_0)$ , siendo independiente de  $z$ , converge uniformemente en  $D$ . Por medio de la misma representación conforme  $w = \mu(z)$  utilizada anteriormente, y de la generalización del

teorema del límite de Abel-Picard (Apéndice G), se obtiene entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z) &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \frac{S_n(z)}{\mu(z)^n} \cdot \mu(z)^n &\xrightarrow{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \frac{S_n(z_0)}{\mu(z_0)^n} \cdot \mu(z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot S_n(z_0), \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

**Nota 2.4.** Si  $\alpha(z_0) = 0$ , la serie (2.30) converge en  $z_0$ , pero en este caso no es válido el teorema de Abel.

Examinaremos finalmente el comportamiento de la serie (2.30) en ciertos casos particulares especialmente notables, relacionados con los denominados *polinomios ortogonales clásicos*.

Como en la fórmula de recurrencia (2.17) hemos supuesto que  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,  $c_n \rightarrow 1$ , los casos más simples corresponden a

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & b_n &= \frac{A'}{n} + \frac{B}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ c_n &= 1 + \frac{C}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$a_n \cdot a_{n-1} - 4 \cdot c_n = \frac{4(A-C)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Por lo tanto, (2.18) y (2.19) se satisfacen si y sólo si  $A' = 0$ ,  $A = C$ ; esto es,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & b_n &= \frac{B}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ c_n &= 1 + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Distinguiremos cuatro casos:

1.  $A = B = 0$ . Entonces  $a_n = 2$ ,  $b_n = 0$ ,  $c_n = 1$ . Se obtiene así la fórmula de recurrencia de los polinomios de Chebyshev ( $T_n(z)$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$T_{n+1}(z) - 2z \cdot T_n(z) + T_{n-1}(z) = 0, \quad n \geq 1.$$



2.  $A = -1, B = 0$ . Corriendo el subíndice  $n$  en 1 se obtiene que

$$a_n = 2 - \frac{1}{n+1}, \quad b_n = 0, \quad c_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

En este caso la fórmula de recurrencia (2.17) genera (véase [4]) los polinomios de Legendre ( $P_n(z); n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$P_{n+1}(z) - \frac{2n+1}{n+1} \cdot z \cdot P_n(z) + \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(z) = 0, \quad n \geq 1.$$

3.  $B = 0, A = 2(\nu - 1)$ . Reemplazando  $n$  por  $n+1$  se obtiene que

$$a_n = 2 + \frac{2(\nu-1)}{n+1} = \frac{2n+2\nu}{n+1}, \quad b_n = 0,$$

$$c_n = 1 + \frac{2(\nu-1)}{n+1} = \frac{n+2\nu-1}{n+1},$$

lo cual reduce (2.17) a la fórmula de recurrencia (véase [4]) de los polinomios de Gegenbauer ( $G_n^\nu(z), n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$G_{n+1}^\nu(z) - \frac{2n+2\nu}{n+1} \cdot z \cdot G_n^\nu(z) + \frac{n+2\nu-1}{n+1} \cdot G_{n-1}^\nu(z) = 0, \quad n \geq 1.$$

4.  $A = -1, B \neq 0$ . Sean, por ejemplo,

$$a_n = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)} \rightarrow 2,$$

$$b_n = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n+1)(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + n + 1)} \rightarrow 0, \quad (2.33)$$

$$c_n = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)} \rightarrow 1,$$

Donde  $\alpha, \beta$  son constantes,  $\alpha > -1, \beta > -1$ .

La fórmula de recurrencia (2.17) genera en este caso los denominados polinomios de Jacobi ( $J_n(\alpha, \beta; z); n = 0, 1, 2, \dots$ ) (véase [4]). Se observa inmediatamente que

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$c_n = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

así que los coeficientes  $a_n, b_n, c_n$  en (2.33) satisfacen (2.32) con

$$A = -1, \quad B = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}.$$

Los polinomios de los cuatro casos anteriores se conocen como los polinomios "ortogonales" clásicos. Los ceros de todos estos polinomios están en  $(-1, 1)$ .

Por lo tanto, son válidos para ellos todos los resultados obtenidos en el presente parágrafo: en particular, el teorema del límite de Abel, sin puntos excepcionales.

## Apéndices

### A. Relaciones de recurrencia de primer orden.

Sea  $(X_n)$  una solución de la fórmula lineal de recurrencia de primer orden

$$X_{n+1} = A_n \cdot X_n + B_n, \quad A_n \rightarrow A, \quad |A| < 1.$$

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < +\infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$  (véase [12]). En efecto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe  $r < 1$  tal que  $|A_n| < r$  para todo  $n$ . Entonces

$$|X_{n+1}| < r \cdot |X_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sumando la desigualdad anterior desde  $n = 1$  hasta  $n = N$  se obtiene que

$$\sum_{n=2}^{N+1} |X_n| \leq r \cdot \sum_{n=1}^N |X_n| + \sum_{n=1}^N |B_n|,$$

o sea, que

$$(1 - r) \cdot \sum_{n=2}^N |X_n| \leq |X_1| + \sum_{n=1}^N |B_n|.$$

Esto implica que  $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$ .

Un argumento similar demuestra que si  $(X_n)$  es la solución "convergente" de la fórmula anterior cuando  $A_n \rightarrow A, |A| > 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty$  implica que  $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$  (véase [12]).

### B. El método de variación de parámetros.

Es bien conocido que la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden con coeficientes constantes,

$$X_{n+1} - a \cdot X_n + c \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

tiene dos soluciones  $(\lambda^n; n = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $(\mu^n; n = 0, 1, 2, \dots)$ , donde  $\lambda, \mu$  son las raíces de la ecuación cuadrática  $t^2 - a \cdot t + c = 0$ . Consideremos ahora la fórmula de recurrencia no-homogénea

$$X_{n+1} - a \cdot X_n + c \cdot X_{n-1} = e_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Como  $\lambda + \mu = a$ ,  $\lambda \cdot \mu = c$ , la fórmula (1) puede escribirse en la forma

$$(X_{n+1} - \lambda X_n) = \mu \cdot (X_n - \lambda X_{n-1}) + e_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Esta es una fórmula lineal de recurrencia de primer orden para la sucesión  $(X_n - \lambda X_{n-1})$ . Su solución general es (véase [6]).

$$(X_{n+1} - \lambda X_n) = \mu^n \cdot \left[ (X_1 - \lambda X_0) + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\mu^k} \right], \quad n \geq 1.$$

Intercambiando  $\lambda$  y  $\mu$  se obtiene que

$$(X_{n+1} - \mu X_n) = \lambda^n \left[ (X_1 - \mu X_0) + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\lambda^k} \right].$$

Sustrayendo una de otra las igualdades anteriores, se obtiene que la solución general  $(X_n)$  de (1) está dada por

$$X_n = \frac{\mu^n - \lambda^n}{\mu - \lambda} X_1 - \frac{\lambda \mu (\mu^{n-1} - \lambda^{n-1})}{\mu - \lambda} X_0 + \frac{1}{\mu - \lambda} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (\mu^{n-k} - \lambda^{n-k}) \cdot e_k. \quad (2)$$

En forma similar se obtiene que la solución general de la fórmula (1) cuando  $\lambda = \mu$  ( $a^2 - 4c = 0$ ) es

$$X_n = \mu^{n-1} \cdot [nX_1 - (n-1)\mu \cdot X_0] + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \mu^{n-k-1} \cdot e_k. \quad (3)$$

**C. Acotación de las soluciones.**

Supóngase que la sucesión  $(X_n)$  satisface para todo  $n \geq 1$  la desigualdad (véase [12])

$$|X_n| \leq M + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \cdot |X_k|$$

donde  $d_k \geq 0$  para todo  $k \geq 0$  y  $|X_0| \leq M$ . Entonces,

$$|X_n| \leq M \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 + d_k), \quad (4)$$

para todo  $n \geq 1$ .

En efecto, razonando por inducción se tiene en primer lugar que

$$X_1 \leq M + d_0 \cdot |X_0| \leq M \cdot (1 + d_0).$$

Supóngase ahora que (4) vale para  $n$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 |X_{n+1}| &\leq M + d_0 |X_0| + \sum_{k=1}^n d_k \cdot M \cdot (1 + d_0)(1 + d_1) \cdots (1 + d_{k-1}) \\
 &= M + M \cdot d_0 + M \cdot \sum_{k=1}^n [(1 + d_0) \cdots (1 + d_k) - (1 + d_0) \cdots (1 + d_{k-1})] \\
 &= M + M \cdot d_0 + M \cdot [(1 + d_0) \cdots (1 + d_n) - (1 + d_0)] \\
 &= M \cdot \prod_{k=0}^n (1 + d_k),
 \end{aligned}$$

lo cual demuestra la afirmación.

#### D. Sucesiones de variación acotada.

Se dice que una sucesión  $(B_k; k = 0, 1, 2, \dots)$  es de *variación acotada*, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |B_k - B_{k+1}| < +\infty.$$

Toda sucesión de variación acotada converge (véanse [2], [12]).

#### E. Sucesiones de variación uniformemente acotada.

Se dice que una sucesión  $(B_k(t); k = 0, 1, 2, \dots)$  de funciones definidas en un dominio  $T$  es de *variación uniformemente acotada en  $T$  si es uniformemente acotada en  $T$  y existe una constante  $M > 0$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} |B_k(t) - B_{k+1}(t)| \leq M$  para todo  $t \in T$  (véase [2]).*

#### F. Un lema de Abel.

El siguiente resultado de Abel es importante para nuestros propósitos.

Sea  $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)$  una serie de funciones uniformemente convergente en  $T$ . Si la sucesión de funciones  $(A_k(t); k = 0, 1, 2, \dots)$  es de *variación uniformemente acotada en  $T$* , entonces la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cdot B_k(t)$  converge uniformemente en  $T$ .

La demostración resulta inmediatamente de la condición de convergencia uniforme de Cauchy.

#### G. Un teorema de Abel-Picard.

La siguiente es la forma del teorema de Abel-Picard a la que recurriremos.

Sea  $(A_n(z); n = 0, 1, 2, \dots)$  una sucesión de funciones continuas tal que

$$\limsup \sqrt[n]{|A_n(z)|} = \frac{1}{\rho}$$

independientemente de  $z$ . Entonces,  $|z| = \rho$  es el círculo de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot z^n$ , y si  $z_0$  es un punto sobre el círculo de convergencia y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot z_0^n$  converge uniformemente en una vecindad de  $z_0$ , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot z^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z_0) \cdot z_0^n, \tag{5}$$

cuando  $z$  (con  $|z| < \rho$ ) tiende a  $z_0$  a lo largo de cualquier curva regular que corte al círculo  $|z| = \rho$  en  $z_0$  formando con éste un ángulo no nulo.

*Demostración.* Sea  $K$  una curva regular que corta el círculo  $|z| = \rho$  en  $z_0$ , formando con éste un ángulo  $\varphi$  no nulo (Figura 4).

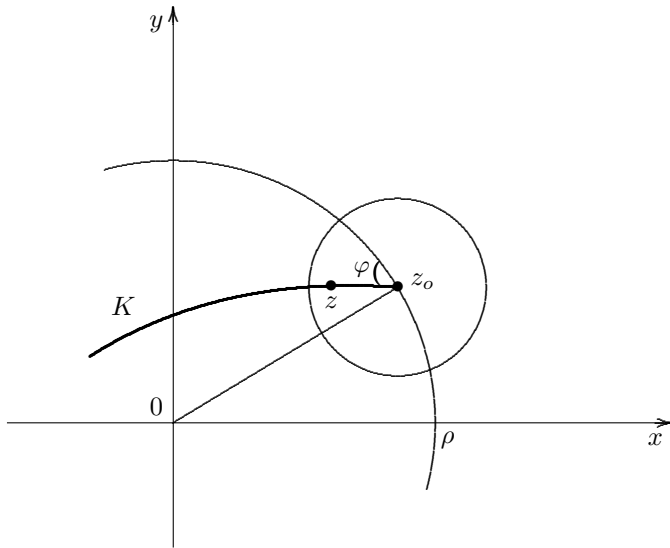


FIGURA 4

Teniendo en cuenta que la sucesión  $\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^n; n = 0, 1, 2, \dots\right)$  es de variación acotada uniformemente en  $K$  (véase [2]), el lema de Abel en el Apéndice F asegura que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot z_0^n \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$  converge uniformemente en una vecindad de  $z_0$  en  $K$ . Esto implica la validez de (5).

Como un caso particular de lo anterior, si  $A_n(z) = A_n$  es independiente de  $z$ , se obtiene el teorema usual de Abel-Picard, el cual, si la curva  $K$  es el radio que toca  $z_0$ , se conoce simplemente como *el teorema del límite de Abel* (véase [1]).

**Agradecimientos.** El autor agradece al revisor del artículo su valiosa ayuda en la preparación de la versión final.

## Referencias

- [1] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1963.
- [2] Bromwich, T. J., *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillan, 1926.
- [3] Dumett, M., *Productos de Hadamard de series de polinomios ortogonales clásicos*, Lect. Mat., **16** no. 1 (1995), 37–62.
- [4] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol.II, Cap.X, Mc Graw-Hill, 1953.
- [5] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, Mc-Graw Hill, 1966.
- [6] Takeuchi, Y., *Estudio sistemático de algunas sucesiones*, Mat. Ens. Univ., **20** (1981), 3–74.
- [7] Takeuchi, Y., *Sucesiones moderadas*, Bol. Mat. (Nueva serie) **1** no. 1 (1994), 17–34.
- [8] Takeuchi, Y., *Regla de L'Hospital para series*, Bol. Mat. (Nueva serie), **1** no. 2 (1994), 25–38.
- [9] Takeuchi, Y., *Convergencia de sucesiones dadas por fórmulas de recurrencia de primer orden*, Rev. Colombiana Mat. **27** (1993), 111–125.
- [10] Takeuchi, Y., *Conjunto de convergencia y conjunto ternario de Cantor*, Bol. Mat. (Nueva serie), **2** (1995), 141–165.
- [11] Takeuchi, Y., *Algunas observaciones sobre la convergencia de los productos infinitos*, próximo a publicarse en Lect. Mat.
- [12] Takeuchi Y., *Notas del Seminario de Sucesiones y Fórmulas de Recurrencia*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

(Recibido en junio de 1998; revisado por el autor en noviembre de 1998)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
BOGOTÁ, COLOMBIA