

Fractales: la huella del caos

GUSTAVO N. RUBIANO

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

1. Justificación

La razón principal por la cual los fractales comenzaron a llamar la atención, radica en que se trata de un lenguaje nuevo usado para describir formas complejas encontradas en la naturaleza.

Los elementos básicos de la geometría euclídeana tradicional son formas integradas por líneas, círculos y esferas. Estas formas, sin embargo, raramente son encontradas en la naturaleza, y no describen, por ejemplo, la forma de las nubes, de las montañas en el horizonte, de las costas, de las fracturas en los metales, de las hojas de un helecho, etc.

Este nuevo lenguaje, la geometría fractal, tiene la bondad de ser, antes que la descripción de formas, algoritmos que pueden ser transformados con la ayuda del computador en formas o en estructuras. En otros términos, un fractal, como la hoja idealizada de un helecho, no es más que el resultado de visualizar, en la pantalla de un computador, un algoritmo que consiste de transformaciones afines del plano.

Los términos *fractal* y *caos* se han vuelto muy populares durante la última década y se habla de su penetración en todos los aspectos de la actividad humana, científica o nó. Esto ha llevado a una distorsión del significado de estos

términos y, más grave aún, a supuestas aplicaciones de los fractales donde no las hay. La publicación de textos, artículos y videos, únicamente con un propósito comercial, ha contribuido a esta distorsión.

Con esta nota pretendo introducir al lector en la génesis de los términos y, de manera informal pero no inexacta, llevar al no experto hasta la definición y explicación de los mismos.

Creo que el impacto de los fractales radica en los misterios que han rodeado la comprensión del infinito matemático, ya que en los procesos de construcción de los mismos siempre está latente el paso *al infinito*. El infinito matemático, tan antiguo como la matemática misma, ha retado la mente humana desde las aporías de Zenón de Elea hasta hace 120 años cuando George Cantor nos mostró como contarlos. Pero los primeros fractales aparecen con el descubrimiento de funciones continuas sin derivada en los trabajos analíticos de B. Riemann y K. Weierstrass en 1870 quienes crearon los “monstruos matemáticos” de la época. Los estudios de P. Fatou y G. Julia, cuarenta años después, fueron la inspiración para el trabajo desarrollado por B. Mandelbrot desde 1975 y para la mayoría de los investigadores contemporáneos que, con la ayuda del computador, lograron ver lo que los pioneros habían intuido y formalizado.

Creo que el éxito de los fractales está cimentado sobre una espectacularidad gráfica, lo cual ha desembocado en ingratitud hacia los pioneros, verdaderos creadores y humildes mortales sin PC. Casi todos los monstruos del ayer son hoy en día ejemplos de fractales simples.

2. La esencia de un fractal

¿Cómo reconocer si un objeto es un fractal? Esta es quizás la pregunta estrella. Pero la formulación a la pregunta sólo tiene sentido, si tenemos una definición de lo que es un fractal. Para nuestra sorpresa, actualmente hay en uso diferentes definiciones de fractal, pero cada una de estas tiene como base las nociones de *autosimilaridad y dimensión*. Ser *autosimilar* significa que, cuando examinamos pequeñas porciones del objeto, la imagen que vemos no es más que una copia del objeto inicial. Por ejemplo, la cabeza del coliflor está formada por trozos o gajos que, cuando los desprendemos y comparamos con todo el coliflor, son prácticamente iguales excepto por su tamaño. Sobre estos trozos más pequeños, de nuevo podemos desprender trozos con la característica de recordarnos a su antecesor y así sucesivamente hasta donde sea físicamente posible manejar los desprendimientos. En una situación matemática idealizada, este proceso debería continuar indefinidamente. Otro modelo en la naturaleza podría ser la hoja de un helecho con su respectiva descomposición.

El otro ingrediente en la definición de un fractal es la *dimensión fractal*, que analizaremos después de los siguientes ejemplos.

Conjunto de Cantor. Este fractal, creado por G. Cantor (1845-1918), se construye a partir de un segmento de recta mediante un *proceso iterativo infinito*. Es decir, el conjunto de Cantor es el objeto que está al final de dicho proceso. Los pasos básicos del proceso son los siguientes:

- i) Extraemos la tercera parte central del intervalo cerrado $[0, 1]$, es decir, el intervalo abierto $(1/3, 2/3)$. Este primer paso nos deja con dos segmentos de recta, cada uno en escala tres veces menor al inicial.
- ii) Tomamos los segmentos de recta obtenidos en el paso anterior, esto es, los segmentos $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$, y sobre cada uno de ellos efectuamos nuevamente el procedimiento indicado en (i).
- iii) Del paso anterior se obtienen cuatro intervalos sobre los cuales volvemos a efectuar el paso (i) para continuar indefinidamente.

Los puntos del intervalo inicial $[0, 1]$ que quedan al final de estas infinitas extracciones es el *conjunto \mathbf{C} de Cantor*.

Nótese que en cada paso de la construcción van quedando por lo menos los puntos extremos de los intervalos extraídos. Es decir, en el n -ésimo paso hay por lo menos 2^n puntos en \mathbf{C} , lo que garantiza que \mathbf{C} tiene infinitos puntos. Más aún, \mathbf{C} posee tantos puntos como el mismo intervalo $[0, 1]$. Al fin y al cabo, fue Cantor quien en una magistral demostración nos enseñó a contar los puntos de $[0, 1]$, que no son enumerables.

Conjunto de Cantor

Si sumamos las longitudes de los segmentos que hemos extraído del intervalo $[0, 1]$ obtenemos

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right),$$

suma que, aunque infinita, tan solo da 1. Podemos decir entonces, que la longitud de \mathbf{C} es cero a pesar de tener el mismo número de puntos que $[0, 1]$.

Para analizar la autosimilaridad de \mathbf{C} , basta con seguir gráficamente lo que nos dicen las instrucciones para su construcción. Obsérvese que la porción de \mathbf{C} que se encuentra en $[0, 1/3]$ es una réplica exacta de \mathbf{C} a escala 1:3. Es decir, si ampliamos dicha porción por un factor de 3, obtendremos el conjunto original \mathbf{C} . Este proceso se puede hacer en cada segmento de la forma $[0, 1/3^n]$ y multiplicando por el factor 3^n obtenemos \mathbf{C} , con lo cual la autosimilaridad se reproduce al infinito, puesto que $[0, 1/3^n]$ contendrá una copia de \mathbf{C} tan pequeña como queramos.

La autosimilaridad en el conjunto de Cantor

La curva de Koch. Este fractal data de 1904, cuando fue creado por H. von Kock (1870-1924). A diferencia del conjunto de Cantor, este fractal se genera por una sucesión infinita de adiciones de segmentos de recta a un segmento inicial, lo cual hace que al final obtengamos una curva y no una polvareda de puntos como en el conjunto de Cantor.

- i) Iniciamos el proceso con un segmento de recta de longitud 1; por supuesto la longitud en cualquier caso es irrelevante, tan solo es cuestión de comodidad al calcular. Este objeto inicial es conocido como el *iniciador*. El primer paso consiste en remover la tercera parte central, pero en esta ocasión la reemplazamos por un triángulo equilátero con lados de longitud $1/3$, al cual le hemos suprimido la base. Este proceso será el tema central de la construcción y es llamado el *generador*.
- ii) Por el paso anterior hemos obtenido cuatro segmentos, a cada uno de los cuales le aplicamos el proceso descrito en (i). Esto es, aplicamos el generador, teniendo en cuenta de hacerlo siempre por encima de la recta.

El proceso anterior se repite hasta el *infinito* (o hasta *donde haya resolución*

en la pantalla del computador). Nuevamente, lo que está al final del proceso será la curva \mathbf{K} de Koch.

Construcción de la curva de Koch

Para saber que tan larga es \mathbf{K} , vamos a sumar los segmentos de recta que hemos añadido. Después del primer paso tenemos una curva formada por cuatro segmentos de recta, cada uno de longitud $1/3$; luego le añadimos a cada segmento uno de longitud $(1/3)^2$ lo cual hace que la longitud anterior se incremente en $4(1/3)^2$ y al continuar añadiendo obtenemos la suma

$$1 + \frac{1}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \dots \right).$$

Esta es una cantidad infinita, ya que involucra una serie geométrica de razón mayor que 1. La curva de Koch es un ejemplo de una curva con longitud infinita pero que sin embargo cabe en la palma de la mano.

En la gráfica siguiente podemos notar la autosimilaridad de \mathbf{K} , donde el factor de escala es de 3. A propósito podemos observar que el patrón inicial en cada eslabón de la construcción se multiplica por 4. Estos números son los que intrínsecamente definen la *dimensión fractal*.

Autosimilaridad en la curva de Koch

Copo de nieve de Koch. Construyendo una curva de Koch en cada uno de los lados de un triángulo rectángulo se obtiene una curva cerrada que evoca un copo de nieve.

Copo de nieve de Koch

Es sorprendente darse cuenta que el área de la región encerrada por esta curva es $\frac{2}{5}\sqrt{3}$. Para ver cuál es el incremento de área en cada paso de la construcción, descompongamos el copo en las tres curvas de Koch que lo generan y veamos, con la ayuda de la siguiente figura, cual es el incremento de área en el caso particular de cada curva.

Incremento en el área del copo de nieve

El copo de Koch es un ejemplo interesante: *una curva de longitud infinita que sorprendentemente rodea tan solo una área finita, delicada y simétrica*. Aunque no se trata exactamente de un fractal, pues no es totalmente autosimilar, si está compuesta por tres partes idénticas, cada una de las cuales sí es autosimilar.

El triángulo de Sierpinski. El matemático polaco, W. Sierpinski (1882-1969) creó varios objetos fractales, entre ellos el conocido triángulo de Sierpinski. De manera análoga a la construcción del conjunto de Cantor, este fractal se obtiene por medio de una *sucesión infinita de extracciones*. La construcción es como sigue:

- i) El objeto iniciador es un triángulo rectángulo con lados de longitud 1. El proceso generador consiste en unir los puntos medios de cada lado y extraer el triángulo central interno para obtener tres triángulos equiláteros iguales con lados de longitud $1/2$.
- ii) Aplicamos el proceso generador a los tres triángulos del paso anterior para obtener 9 triángulos equiláteros con lados de longitud $(1/2)^2$.
- iii) Aplicamos el proceso generador a cada uno de los nuevos triángulos que se van generando hasta llegar al límite del proceso. La figura *última S* se conoce como el triángulo de Sierpinski.

Construcción del triángulo de Sierpinski

El área del triángulo que tomamos como base para la construcción de \mathbf{S} es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Nótese que el área del triángulo extraído es $1/4A$. En el segundo paso removemos $1/4$ del área de cada uno de los tres triángulos generados en el paso anterior, con lo que extraímos $3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$. En general, el área extraída al final del proceso es la suma infinita

$$A \left(\frac{1}{4} + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 3^2 \left(\frac{1}{4} \right)^3 + 3^3 \left(\frac{1}{4} \right)^4 + \dots \right) = A.$$

El área removida para obtener el triángulo de Sierpinski es exactamente el área inicial y sin embargo aún tenemos puntos. Los puntos que conforman a \mathbf{S} , no están agrupados formando alguna área, sino que están esparcidos formando una *polvareda*.

Las carpetas. Hay muchos fractales que se pueden construir siguiendo el patrón que generó al triángulo de Sierpinski, es decir, tocando *variaciones de un mismo tema*. Las carpetas son un ejemplo de estos fractales. Comencemos con un cuadrado, subdividámoslo en nueve pequeños subcuadrados y extraigamos el cuadrado central. Repitamos este proceso en cada uno de los ocho cuadrados restantes, etc. Al final obtenemos la llamada carpeta de Sierpinski. En el paso n -ésimo la escala es de $1/3^n$ en cada una de las longitudes y se generan 8^n cuadrados.

Autosimilaridad en el triángulo de Sierpinski

Construcción de la carpeta de Sierpinski

Después de haber visto los anteriores fractales, el concepto de *autosimilaridad* está completamente entendido. El triángulo de Sierpinski, el conjunto de Cantor, las carpetas, son autosimilares, pero también lo es un segmento de línea

recta, pues al subdividirlo en tres partes iguales y aumentar cada una de ellas en una escala de tres, regresamos de nuevo al objeto inicial. Claramente un segmento de recta no es un fractal, por lo que no basta la autosimilaridad para definir dicho concepto. Necesitaremos otro ingrediente: la *dimensión fractal*.

Mediante el concepto usual de dimensión asignamos dimensión cero a los puntos, dimensión uno a las rectas, dimensión dos a los planos, etc. En realidad, este concepto de dimensión corresponde al de dimensión topológica que sería un poco complicada de definir aquí. Solamente como información diremos que, por ejemplo, la dimensión topológica del conjunto de Cantor es 0, la de la curva de Koch es 1 y la de triángulo de Sierpinski es 1.

Cuando ilustramos el concepto de autosimilaridad usamos dos procedimientos: *fraccionamiento del objeto* y *ampliación de las partes*. Informalmente, la dimensión fractal es la potencia a la que hay que elevar el factor de ampliación para obtener el factor de fraccionamiento:

$$\text{número de partes} = (\text{factor de ampliación})^{\text{dimensión fractal del objeto}}$$

Para ilustrar esto dividamos, por ejemplo, un segmento en cuatro partes iguales. Si queremos obtener de nuevo el segmento original debemos ampliar por 4 cualquiera de las partes. Tenemos entonces que la dimensión fractal del segmento es 1 ya que $4 = 4^1$. Como otro ejemplo, dividamos un cuadrado en cuatro cuadrados iguales. Para obtener de nuevo el cuadrado original debemos ampliar por 2 cualquiera de las partes. Por lo tanto la dimensión fractal del cuadrado es 2 puesto que $4 = 2^2$.

Ahora resulta sencillo calcular las dimensiones fractales del conjunto de Cantor, del triángulo de Sierpinski y de la curva de Koch. Si dividimos en dos el conjunto \mathbf{C} de Cantor, debemos ampliar por tres cualquiera de las partes para obtener de nuevo a \mathbf{C} . Es decir, si d es la dimensión fractal de \mathbf{C} , $2 = 3^d$, de donde $d = \frac{\log 2}{\log 3}$. En el caso del triángulo de Sierpinski, es claro que $3 = 2^d$ y por lo tanto $d = \frac{\log 3}{\log 2}$. Dejamos al lector que calcule la dimensión fractal de la curva de Koch.

Por todo lo anterior estamos en capacidad de formular y entender la definición de fractal: *Un fractal es un subconjunto autosimilar del plano cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica.*(ver [3])

*Hoja de helecho generada en el computador, por la iteración de tres funciones.
Puede observarse en las ampliaciones la autosimilaridad.*

Para terminar esta sección presentaremos dos clases de fractales que, aunque no se ajustan exactamente a la definición anterior, son de mucho interés sobre todo desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Los conjuntos de Julia—Fatou y Mandelbrot. Inspirado en los trabajos de G. Julia (1883-1978) y de P. Fatou (1878-1929) sobre la iteración de funciones racionales en el plano complejo, B. Mandelbrot [4] calculó y vió por primera vez en 1980 lo que hoy se conoce como el conjunto **M** de Mandelbrot. Este conjunto es considerado por algunos matemáticos como el objeto más complicado de la matemática. Aquí debemos diferenciar entre el *concepto* del conjunto y el *objeto* que lo representa. Este último se podrá mejorar y detallar, pues no es más que el *output* de un cálculo.

Los conjuntos de Julia—Fatou aparecen al estudiar el comportamiento de aplicar repetidamente la función $f(z) = z^2 + c$ del plano complejo en el plano complejo, donde c es una constante compleja no nula. Más explícitamente, supongase que aplicamos f repetidamente a cada número complejo z . En este

proceso pueden suceder tres cosas cuando $n \rightarrow \infty$: $f^n(z) \rightarrow 0$, $f^n(z) \rightarrow \infty$, o ninguna de las anteriores. El conjunto de Julia—Fatou, para este valor de c , es el conjunto de los números complejos z que están en la tercera categoría. Estos conjuntos no son autosimilares en su totalidad y por ello no son fractales en el sentido estricto de nuestra definición, pero contiene partes que si lo son. Más precisamente, están formados por los puntos donde la función que los generan tiene *comportamiento caótico*. Por eso se dice a veces que los fractales son la huella del caos.

En la gráfica siguiente generada utilizando [4] reproducimos el conjunto de Julia—Fatou correspondiente a $c = 1$. Aunque el conjunto es tan sólo la frontera, hemos preferido negrear su interior para observarlo mejor.

Conjunto de Julia—Fatou para $f(z) = z^2 - 1$ y algunas ampliaciones

La forma de los conjuntos de Julia—Fatou depende evidentemente del valor de c . Si calculamos dichos conjuntos para todos los valores posibles de c , coloreamos c de negro cuando el conjunto resultante es conexo y coloreamos c de blanco cuando el conjunto no es conexo, obtenemos el conjunto de la siguiente figura, que no es otra cosa que el conjunto \mathbf{M} de Mandelbrot (ver [1] y [5]).

\mathbf{M} es, para algunos expertos, la figura más intrincada e interesante de los sistemas dinámicos. Consta de un cuerpo principal en forma de cardioide, el

cual tiene anexado una serie de bulbos con terminales en forma de antena y cada bulbo cuenta de cierta manera cómo fue la génesis de la obtención de \mathbf{M} .

Una de las razones por las cuales \mathbf{M} es el fractal que los aficionados a la *fractología* reproducen más, es, sin duda, su aparente sencillez. Aparente porque al mirar en detalle su borde, esto es, al ampliarlo suficientemente, vemos formas inesperadas. Estas a su vez están llenas de detalles sorprendentes y, si continuamos ampliando realizando un viaje al infinito reencontraremos a \mathbf{M} , hecho que reta la aporía de que *el todo es mayor que las partes*.

El conjunto de Mandelbrot

Ampliaciones sucesivas en el conjunto de Mandelbrot

3. El juego del caos

A primera vista parecería que el siguiente “juego” no tuviera conexión con el caos y con los fractales. Sin embargo veamos lo que sucede. Básicamente lo que haremos es seguir el camino dejado por un punto que camina al azar. Tomamos cualquier punto del plano, escogemos una dirección al azar, caminamos algunos pasos y paramos. Desde este nuevo punto escogemos otra dirección, caminamos, paramos y continuamos así sucesivamente por los siglos de los siglos. En el plano marcamos únicamente los puntos que vamos obteniendo. ¿Cuál será la

huella de la ruta seguida por el punto? ¿Cómo lucirá esta huella después de miles y miles de caminatas?

De cualquier manera, no pareciera que pudieramos esperar mucho de una caminata al azar. Sin embargo, le diremos al computador cómo es el juego y le pediremos que nos presente en la pantalla la huella del camino que deja el punto. Para esto, precisemos las reglas del juego.

- 1 Necesitamos de un dado cuyas seis caras tengan únicamente los números 1, 2, y 3. Para esto, en un dado ordinario identificamos el 6 con el 1, el 5 con el 2 y el 4 con el 3. Este dado será el encargado de generar al azar los números 1, 2, 3 cada uno de los cuales nos indicará a su vez, un camino a seguir.
- 2 El tablero donde jugaremos será una hoja de papel donde hemos marcado los tres vértices de un triángulo equilátero con v_1 , v_2 y v_3 respectivamente. Estos tres puntos los llamamos puntos bases.
- 3 Para iniciar el juego elegimos un punto x_0 de la hoja de papel. Esta elección la podemos hacer al azar para una mayor aleatoriedad en el experimento. A continuación tomamos el dado y lo lanzamos para obtener 1, 2, o 3, que equivale a haber elegido al azar uno de los vértices v_1 , v_2 o v_3 . Si el vértice señalado por el dado es v_2 , tomamos el punto medio entre x_0 y v_2 (si se trata de otro vértice entonces tomamos el punto medio entre x_0 y dicho vértice). Este punto medio será el punto x_1 .
- 4 A partir del paso anterior ya podemos inferir en que consiste el juego. Supongamos que ya hemos jugado n veces. Esto es, hemos obtenido los puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Tiramos el dado nuevamente y obtenemos un vértice, produciendo el punto x_{n+1} exactamente como punto medio entre x_n y ese vértice.

Al final del juego hemos generado una sucesión infinita $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ de puntos en la hoja. Presentamos a continuación el programa de computador, usando el paquete *Mathematica*, que permite realizar las gráficas para los primeros 50, 100, 200, 1.000, 2.000, 5.000, 10.000 puntos y más.

```

vertices = {{0,0}, {1,0}, {1/2, Sqrt[3]/2}}//N
inicio = Table [Random[], {2}]
verticeazar:= vertices [[Random [Integer, {1,3}]]]
siguiente [punto-] := (verticeazar + punto)/2;
ListPlot [NestList [siguiente, inicio, 1000],
  PlotRange-> {{0,1}, {0, Sqrt[3]/2}},

```

AspectRatio -> Sqrt[3]/2, Axes -> False];

Emerge una figura que no es otra cosa que el triángulo de Sierpinski, querámoslo o no.

Por supuesto este juego tiene muchas posibilidades de variación lo que permite generar diferentes clases de fractales. El lector interesado puede inventar y representar sus propios fractales.

Referencias

1. A. BARCELLOS, *The fractal geometry of Mandelbrot*, Coll. Math. J. **15** (1984), 98–119.
2. K. FALCONER, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
3. B. B. MANDELBROT, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Flammarion, 1975.

4. H. O. PEITGEN & P. H. RICHTER, *The beauty of fractals, images of complex dynamical systems*, software, Springer, 1986.
5. J. WALSH, *Fractals in Linear Algebra*, Coll. Math. J. **27** (1996), 298 – 304.
6. G. RUBIANO, *El conjunto de Mandelbrot*, Boletín de Matemáticas (Nueva serie) **3** no. 1 (1996), 25 – 36.

(Recibido en gosto de 1995; revisado en junio de 1997)

GUSTAVO N. RUBIANO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
COLOMBIA