Lecturas Matemáticas
Volumen **44** (2) (2023), páginas 125-126
ISSN 0120-1980

Algunos problemas interesantes

Oscar Bernal

¡Vuelven a Lecturas Matemáticas los problemas para pensar un poco! Cada número propondremos algunos problemas de diferentes niveles de dificultad y contenidos matemáticos diversos, que esperamos sean un reto interesante para nuestros lectores.

Nos gustaría mucho saber cómo han resuelto estos problemas, así que las soluciones son bienvenidas al correo electrónico `cedm@scm.org.co` en un mensaje con el sujeto *Soluciones Lecturas* e indicando el número de la revista en la que apareció el problema; en el número siguiente presentaremos las soluciones y créditos a quienes nos escriban.

También son bienvenidas las propuestas de problemas, para lo que también está disponible el correo electrónico `cedm@scm.org.co` al que pueden proponer sus problemas, originales y con solución completa, en un mensaje con el sujeto *Problemas Lecturas*.

1. Problema 1

En un tetraedro, el pie de la altura desde cada vértice a su correspondiente cara opuesta es exactamente el punto de intersección de las medianas de dicha cara. Demuestre que el tetraedro es regular.

2. Problema 2

Sean u, v, w números reales diferentes de 0. Se consideran las seis ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ que se obtienen al usar u, v, w en algún orden en las posiciones a, b, c.

1. Demuestre que si u, v, w son todos positivos, no es posible que las seis ecuaciones mencionadas tengan todas soluciones reales.

2. ¿Existen valores u, v, w para los que las soluciones de las seis ecuaciones cuadráticas son racionales?

3. Problema 3

Dada una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, se define (cuando sea posible) la función $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(m) = \int_0^1 (f(x))^m \, dx.$$

Para cada entero positivo m construya una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que permita la construcción de sus correspondientes $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ y tal que esas funciones g cumplan

$$g(1) > g(2) > \cdots > g(m-1) > g(m) < g(m+1) < g(m+2) < \cdots$$

OSCAR BERNAL
COMISIÓN DE EDUCACIÓN Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: cedm@scm.org.co

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: os-berna@uniandes.edu.co