Lecturas Matemáticas
Volumen **43** (1) (2022), páginas 25-34
ISSN 0120-1980

Representación en fracciones continuas irregulares de $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$ y $\zeta(5)$

Irregular continuous fraction representation of $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$ and $\zeta(5)$

Carlos Felipe Gómez Jiménez[1] y José Miguel Méndez Velásquez[2]

[1]Ministerio de Educación de la República Dominicana, República Dominicana
[2]Liceo Salomé Ureña, República Dominicana

Resumen. Las fracciones continuas juegan un rol fundamental en varios resultados vinculados con la teoría de funciones especiales y la teoría de números, entre otras ramas de las matemáticas. En este artículo, se presenta un relato histórico acerca de los desarrollos en fracciones continuas de los primeros valores de la función zeta de Riemman en argumentos enteros, propuestos por varios autores.

***Palabras clave*:** Fracciones continuas, relación de recurrencia, función zeta de Riemman.

Abstract. Continued fractions play a fundamental role in several results related to special function theory and number theory, among other branches of mathematics. In this article, we present a historical report on the continued fraction expansions of the first values of the Riemman zeta function in integer arguments, proposed by several authors.

***Key words*:** Continued fractions, recurrence relation, Riemann zeta function.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 11A55, 11J70, 40A15; Secondary 33E30, 39A05, 65Q30; Third 11M41, 11R42, 11S40.

1. Introducción

La teoría de las fracciones continuas se ha convertido por más de cinco siglos, en uno de los temas más interesantes de las matemáticas, particularmente, en teoría de números [8] y funciones especiales [3, 7]. Sus orígenes datan del siglo XVI y tuvieron lugar en Italia, donde para 1579, Rafael Bombelli, en su libro *L'Algebra Opera*, asocia las fracciones continuas con su método de extracción de raíces cuadradas [11]. Años más tarde, a principios del siglo XVII, fue Pietro Cataldi quién utilizó la primera notación para las fracciones continuas. Sin embargo, fue John Wallis en 1695 fue quién introduce por primera vez el término de fracción continua [11] en su libro *Opera Mathematica*.

Luego, para finales de la primera mitad del siglo XVIII, Leonhard Paul Euler prueba en su libro *Introductio in analysin infinitorum*, la equivalencia entre las fracciones continuas y las series infinitas generalizadas. Mientras que, en 1780, el célebre matemático Joseph Louis Lagrange aplica las fracciones continuas, de una manera similar al procedimiento presentado por Bombelli, con el fin de dar solución a la ecuación de Pell, [11].

Posteriormente, a principios del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss en su libro *Werke*, presentó un método para calcular una fracción continua con valor complejo vía series hipergeométricas, [11]. Este resultado, juntamente con el logrado por Joseph Louis Lagrange impulsó la aplicación de las fracciones continuas a numerosas ramas de las matemáticas. Ya para finales del siglo XX y principios del siglo XXI fueron apareciendo una serie de trabajos donde se relacionan las fracciones continuas con los números irracionales [5, 6, 12, 13].

En este artículo se presentarán los diferentes desarrollos en fracciones continuas, de los primeros valores de la función zeta de Riemman en argumentos enteros, propuestos por varios autores.

2. Fracciones continuas

Definición 2.1. *Una fracción continua simple finita* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ *es un cociente*

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{[a_2; a_3, \ldots, a_n]}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}\end{aligned}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ *y* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ *son los términos de la fracción continua, [9].*

Definición 2.2. *Una fracción continua simple infinita* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *es un cociente*

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

Definición 2.3. *Sea $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Sean $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{Z}^*$ con MCM$(p_n; q_n) = 1$ tales que*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], \quad n \geq 0.$$

A esta fracción se le llama el n-ésimo convergente de la fracción continua de x.

Existen diferentes generalizaciones de las fracciones continuas clásicas. Una de las más naturales, la cual admite un sinnúmero de aplicaciones, no sólo dentro de la teoría de números sino también dentro del análisis matemático, son las usualmente denominadas fracciones continuas irregulares, definidas a continuación.

Definición 2.4. *Se dice que el número α se puede escribir como un desarrollo en fracción continua irregular infinita, si admite la siguiente representación [2]*

$$\alpha = a_0 + \frac{b_1 \mid}{\mid a_1} + \frac{b_2 \mid}{\mid a_2} + \cdots + \frac{b_n \mid}{\mid a_n} + \cdots = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots \, a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n + \ddots}}}}$$

Teorema 2.1. *Sean $(p_n)_{n \geq -1}$ y $(q_n)_{n \geq -1}$ dos sucesiones de números, tales que $q_{-1} = 0$, $p_{-1} = q_0 = 1$ y $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \neq 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces existe una única fracción continua irregular [2]*

$$a_0 + \frac{b_1 \mid}{\mid a_1} + \frac{b_2 \mid}{\mid a_2} + \frac{b_3 \mid}{\mid a_3} + \cdots + \frac{b_n \mid}{\mid a_n} + \cdots,$$

cuyo n-ésimo numerador es p_n y cuyo n-ésimo denominador es q_n, para cada $n \geq 0$. Más precisamente

$$a_0 = p_0, \quad a_1 = q_1, \quad b_1 = p_1 - p_0 q_1,$$

$$a_n = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}}, \quad b_n = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Teorema 2.2. *Dos fracciones continuas irregulares [2]*

$$a_0 + \frac{b_1 \mid}{\mid a_1} + \frac{b_2 \mid}{\mid a_2} + \frac{b_3 \mid}{\mid a_3} + \cdots + \frac{b_n \mid}{\mid a_n} + \cdots, \qquad a_0' + \frac{b_1' \mid}{\mid a_1'} + \frac{b_2' \mid}{\mid a_2'} + \frac{b_3' \mid}{\mid a_3'} + \cdots + \frac{b_n' \mid}{\mid a_n'} + \cdots,$$

son equivalentes, si y sólo si existe una sucesión de números $(c_n)_{n \geq 0}$ distinta de cero, con $c_0 = 1$ de manera que

$$a_n' = c_n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n' = c_n c_{n-1} b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

3. Los primeros cinco valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros

En esta sección, se presentará un recorrido histórico de los desarrollos en fracciones continuas de los valores de la función zeta de Riemman

$$\zeta(k) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{\log^{k-1} x}{1-x}\, dx,$$

para $k = 2, 3, 4, 5$.

3.1. Desarrollo en fracciones continuas irregulares de $\zeta(2)$

Hoy en día es conocido por la comunidad matemática que fue el prestigioso matemático suizo, Leonhard Paul Euler, quien logró probar para 1755, en su famoso Tratado de Cálculo Diferencial, la siguiente expresión [4]:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2\,(2k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

donde B_{2k} son los conocidos números de Bernoulli, con $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Años más tarde, en 1979, Roger Apéry, teniendo en cuenta la relación de recurrencia

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (11n^2 + 11n + 3)u_n - n^2 u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

con condiciones iniciales

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 5,$$

dedujo para el caso particular $k = 1$ de (1), que

$$\zeta(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n},$$

lo que le permitió arribar al siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares

$$\zeta(2) = \frac{5\,|}{|\,3} + \frac{1\,|}{|\,25} + \frac{16\,|}{|\,69} + \cdots + \frac{n^4\,|}{|\,11n^2 + 11n + 3} + \cdots$$

3.2. Desarrollo en fracciones continuas irregulares de $\zeta(3)$

Similarmente, para este mismo año, Apéry probó la irracionalidad de $\zeta(3)$ considerando la relación de recurrencia

$$(n+2)^3 u_{n+2} - (2n+3)(17n^2 + 51n + 39)u_{n+1} + (n+1)^3 u_n = 0, \quad n \geq 0,$$

la cual se satisface simultáneamente tanto por los numeradores p_n como por los denominadores q_n de

$$\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n},$$

donde p_n y q_n están dados explícitamente mediante

$$q_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \quad \text{y} \quad p_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k},$$

con

$$\gamma_{n,k} = \sum_{1\le j\le n} \frac{1}{j^3} + \sum_{1\le j\le k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1}.$$

Dicho resultados le permitieron a Apéry deducir el siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares

$$\zeta(3) = \frac{6\,|}{|\,5} - \frac{1\,|}{|\,117} - \frac{64\,|}{|\,535} - \cdots - \frac{n^6 \qquad |}{|\,(2n+1)\left(17n^2+17n+5\right)} - \cdots$$

Luego, en 1996 Nesterenko probó en [10] la validez del siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,4} + \frac{1\,|}{|\,3} + \frac{4\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,4} + \frac{6\,|}{|\,6} + \frac{4\,|}{|\,5} + \cdots,$$

donde los numeradores a_n, $n \ge 1$, y los denominadores b_n, $n \ge 2$, están definidos mediante

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k+2, \quad a_{4k+1} = k\,(k+1)\,, \quad b_{4k+2} = 2k+4, \\ a_{4k+2} &= (k+1)\,(k+2)\,, \quad b_{4k+3} = 2k+3, \\ a_{4k+3} &= (k+1)^2\,, \quad b_{4k} = 2k, \quad a_{4k} = (k+1)^2\,. \end{aligned}$$

Más tarde, para la segunda década del siglo XXI, a partir de una modificación de la función racional

$$R_n(z) = \frac{(-z)_n^2}{(z+1)_{n+1}^2}, \quad (z)_n = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1}(z+j), & n \ge 1, \\ 1 & n = 0, \end{cases}$$

propuesta por Nesterenko en [10], Soria-Lorente en [14], dedujo la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &(n+2)^4(24n^3+30n^2+16n+3)u_{n+2} \\ &\quad - 4(n+1)(204n^6+1173n^5+2668n^4+3065n^3+1905n^2+634n+86)u_{n+1} \\ &\qquad + n^4(24n^3+102n^2+148n+73)u_n = 0, \quad n \ge 1, \end{aligned} \tag{2}$$

la cual es satisfecha por los numeradores $\hat{p}_n$ y denominadores $\hat{q}_n$ de las aproximantes racionales a $\zeta\,(3)$ dados mediante

$$\hat{q}_n = \sum_{0\le k\le n} d_k^{(n)} \quad \text{y} \quad \hat{p}_n = \sum_{1\le k\le n} d_k^{(n)} H_k^{(3)} + 2^{-1} \sum_{1\le k\le n} c_k^{(n)} H_k^{(2)}, \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} d_k^{(n)} &= n^{-1}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n}{k}^2 + n^{-1}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}, \\ c_k^{(n)} &= 2d_k^{(n)}\left[2H_k - H_{n+k-1} - H_{n-k} - 2^{-1}(n+k)^{-1}\right], \quad k = 0,\dots,n, \end{aligned}$$

y $H_k^{(r)}$ denota el número armónico k de orden r definido por

$$H_k^{(r)} = \sum_{1\le j\le k} \frac{1}{j^r}.$$

De esta manera, en virtud de (2) y (3), así como de los Teoremas 2.1 y 2.2, Soria-Lorente en [14] propuso el siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares

$$\zeta(3) = \frac{7\,|}{|\,6} + \frac{-146\,|}{|\,\ 827} + \frac{-38864\,|}{|\quad \mathcal{Q}_3} + \frac{\mathcal{P}_4\,|}{|\,\mathcal{Q}_4} + \cdots + \frac{\mathcal{P}_n\,|}{|\,\mathcal{Q}_n} + \cdots,$$

donde

$$\mathcal{P}_n = -(n-2)^4(n-1)^4(24n^3 - 186n^2 + 484n - 423)(24n^3 - 42n^2 + 28n - 7),$$

y

$$\mathcal{Q}_n = 4(n-1)(204n^6 - 1275n^5 + 3178n^4 - 3999n^3 + 2667n^2 - 910n + 126).$$

Transcurridos cinco años, los autores Arvesú y Soria-Lorente en [1] construyeron infinitos aproximantes racionales a $\zeta(3)$ y obtuvieron el siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares para un caso en particular

$$\zeta(3) = \frac{9\,|}{|\,8} + \frac{-184\,|}{|\,\ 359} + \frac{-30672\,|}{|\quad \mathcal{Q}_3} + \frac{\mathcal{P}_4\,|}{|\,\mathcal{Q}_4} + \cdots + \frac{\mathcal{P}_n\,|}{|\,\mathcal{Q}_n} + \cdots,$$

donde

$$\mathcal{P}_n = -9(n-2)^3(n-1)^3(28n^3 - 213n^2 + 543n - 464)(28n^3 - 45n^2 + 27n - 6),$$

y

$$\mathcal{Q}_n = 4(n-1)(204n^6 - 1275n^5 + 3178n^4 - 3999n^3 + 2667n^2 - 910n + 126),$$

Luego, un año después, Soria-Lorente y Berres en [16] consiguieron la siguientes relación de recurrencia paramétrica

$$(n+2)^4\Phi_n^{(\rho)}u_{n+2} + \beta_n^{(\rho)}u_{n+1} + n^4\Phi_{n+1}^{(\rho)}u_n = 0, \quad n \ge 1, \quad \rho \in \mathbb{N},$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(\rho)} = 24n^5\rho^2 - 12n^5 + 54n^4\rho^2 + 39n^4\rho - 33n^4 + 46n^3\rho^2 + 70n^3\rho + 19n^2\rho^2 \\ + 56n^2\rho + 33n^2 + 3n\rho^2 + 21n\rho + 24n + 3\rho + 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_n^{(\rho)} = &-2(n+1)(408n^8\rho^2 - 204n^8 + 3162n^7\rho^2 + 663n^7\rho - 1683n^7 + 10028n^6\rho^2 \\ &+ 4433n^6\rho - 4899n^6 + 16802n^5\rho^2 + 12409n^5\rho - 5487n^5 + 16070n^4\rho^2 \\ &+ 18955n^4\rho + 735n^4 + 8888n^3\rho^2 + 17212n^3\rho + 7366n^3 + 2708n^2\rho^2 \\ &+ 9340n^2\rho + 6870n^2 + 344n\rho^2 + 2776n\rho + 2748n + 344\rho + 412).\end{aligned}$$

Y de esta manera, arribaron al siguiente resultado

$$\begin{aligned}\zeta(3) = &\frac{7\rho+12 \mid}{\mid 6\rho+10} + \frac{2(146\rho^2+189\rho+17) \mid}{\mid \quad 1654\rho+1981} \\ &+ \frac{-16(7\rho+12)(2082\rho^2+1453\rho-727) \mid}{\mid \quad \mathcal{Q}_3^{(\rho)}} + \frac{\mathcal{P}_4^{(\rho)} \mid}{\mid \mathcal{Q}_4^{(\rho)}} + \cdots + \frac{\mathcal{P}_n^{(\rho)} \mid}{\mid \mathcal{Q}_n^{(\rho)}} + \cdots,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n^{(\rho)} = &-(n-2)^4(n-1)^4(24n^5\rho^2 - 12n^5 - 306n^4\rho^2 + 39n^4\rho + 147n^4 \\ &+ 1558n^3\rho^2 - 398n^3\rho - 684n^3 - 3959n^2\rho^2 + 1532n^2\rho \\ &+ 1491n^2 + 5019n\rho^2 - 2637n\rho - 1470n - 2538\rho^2 + 1713\rho \\ &+ 473)(24n^5\rho^2 - 12n^5 - 66n^4\rho^2 + 39n^4\rho + 27n^4 + 70n^3\rho^2 \\ &- 86n^3\rho + 12n^3 - 35n^2\rho^2 + 80n^2\rho - 45n^2 + 7n\rho^2 \\ &- 37n\rho + 30n + 7\rho - 7),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n^{(\rho)} = &\,2(n-1)(408n^8\rho^2 - 204n^8 - 3366n^7\rho^2 + 663n^7\rho + 1581n^7 \\ &+ 11456n^6\rho^2 - 4849n^6\rho - 4185n^6 - 20710n^5\rho^2 + 14905n^5\rho \\ &+ 3321n^5 + 21330n^4\rho^2 - 24795n^4\rho + 4425n^4 - 12488n^3\rho^2 \\ &+ 23932n^3\rho - 11066n^3 + 3892n^2\rho^2 - 13348n^2\rho + 8922n^2 \\ &- 504n\rho^2 + 4008n\rho - 3300n - 504\rho + 476).\end{aligned}$$

3.3. Desarrollo en fracciones continuas irregulares de $\zeta(4)$

En cuanto a $\zeta(4)$, el prestigioso matemático ruso Wadim Zudilin en [17] dedujo la siguiente relación de recurrencia

$$(n+1)^5u_{n+1} - 3(2n+1)(3n^2+3n+1)(15n^2+15n+4)u_n - 3n^3(9n^2-1)u_{n-1} = 0, n \geq 1,$$

con condiciones iniciales

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 12, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 13,$$

lo que le permitió conseguir el siguiente resultado

$$\zeta(4) = \frac{13 \mid}{\mid 12} + \frac{1^7\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \mid}{\mid \quad \Xi_1} + \frac{2^7\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \mid}{\mid \quad \Xi_2} + \cdots + \frac{n^7(3n-1)(3n)(3n+1) \mid}{\mid \quad \Xi_n} + \cdots,$$

donde

$$\Xi_n = 3(2n+1)(3n^2+3n+1)(15n^2+15n+4).$$

3.4. Desarrollo en fracciones continuas irregulares de $\zeta(5)$

Dentro de esta lista de resultados también aparece el alcanzado por Soria-Lorente en [15], donde a partir de las siguientes sucesiones

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{n,1} = (-1)^n \, n!^4 \sum_{k \geq 1} (2k+n+2) \, \frac{(-k)_n \, (k+n+2)_n}{(k+1)_{n+1}^6} = \\
\frac{n!^{11} \, (3n+2)!}{(2n+1)!^7} \, {}_9F_8 \left(\left. \begin{array}{c} 3n+2, \frac{3n}{2}+2, n+1, \ldots, n+1 \\ \\ \frac{3n}{2}+1, 2n+2, \ldots, 2n+2 \end{array} \right| 1 \right),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{n,2} = (-1)^n \, n!^4 \sum_{k \geq 1} (2k+n+2) \, \frac{(1-k)_{n-1} \, (k+n+3)_{n-1}}{(k+1)_{n+1}^6} = \\
-\frac{(n-1)! \, (3n+2)! n!^{10}}{(2n+2)! \, (2n+1)!^6} \, {}_9F_8 \left(\left. \begin{array}{c} 3n+2, \frac{3n}{2}+2, n, n+1, \ldots, n+1 \\ \\ \frac{3n}{2}+1, 2n+3, 2n+2, \ldots, 2n+2 \end{array} \right| 1 \right),
\end{aligned}
$$

dedujo ciertos aproximantes racionales a $\zeta(5)$ que juntamente con los teoremas 2.1 y 2.2, le permitieron arribar a lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\zeta(5) = \frac{797 \,|}{|\, 768} + \frac{-37597440 \,|}{|\, -60957410} + \frac{4963010140935 \,|}{|\, -699335469} \\
+ \frac{15299843303372544 \,|}{|\, -160388693712} + \frac{44206592449755780000 0\,|}{|\, -19820970745081} \\
+ \frac{2826977104806064592400532800 \,|}{|\, -1015388502751019592} \\
+ \frac{16119370501603406587406914044535 5480 \,|}{|\, -1124616677901200855445} + \cdots
\end{aligned}
$$

Es intención de los autores, que este artículo contribuya al estudio de nuevas investigaciones relacionadas con el desarrollo en fracciones continuas irregulares del resto de los valores de la función zeta de Riemman, así como al estudio del carácter aritmético de dichos valores, aún desconocido por la comunidad científica matemática.

Agradecimientos

Los autores del presente artículo agradecen a los árbitros por sus valiosas sugerencias además de sus comentarios, los que fueron útiles para lograr la versión final del mismo.

Referencias

[1] Arvesú, J. and Soria-Lorente, A., *On Infinitely Many Rational Approximants to* $\zeta(3)$, Mathematics, Vol. 7, no. 12, pp. 1-16, 2019.

[2] Borwein, J., van der Poorten, A., Shallit, J. and Zudilin, W., *Neverending fractions: an introduction to continued fractions*, no. 23, Cambridge University Press, 2014.

[3] Cuyt, A., Petersen, V., Verdonk, B., Waadeland, H. and Jones, W., *Handbook of continued fractions for special functions*, Springer Science & Business Media, 2008.

[4] Gutiérrez, S., *Euler: el maestro de todos los matemáticos*, Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, no. 54, pp. 79-84, 2007.

[5] Hančl, J., Leinonen, M., Leppäläl, K. and Matala-aho, T., *Explicit irrationality measures for continued fractions*, Journal of Number Theory, Vol. 132, no. 8, pp. 1758-1769, 2012.

[6] Hone, A. and Varona, J., *Continued fractions and irrationality exponents for modified Engel and Pierce series*, Monatshefte für Mathematik, Vol. 190, no. 3, pp. 501-516, 2019.

[7] Jones, W., *Orthogonal Functions: Moment Theory and Continued Fractions*, CRC Press, 2020.

[8] Miller, S. and Takloo-Bighash, R., *An invitation to modern number theory*, Princeton University Press, 2021.

[9] Murillo, M., *Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades*, Revista Digital Matemática, Vol. 15, no. 2, pp. 1-26, 2015.

[10] Nesterenko, Y., *A few remarks on* $\zeta(3)$, Mathematical Notes, Vol. 49, no. 6, pp. 625-636, 1996.

[11] Parra, E., *Fracciones continuadas: Un recorrido histórico*, Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, Vol. 11, no. 1, pp. 1-20, 2010.

[12] Shallit, J., *Simple continued fractions for some irrational numbers*, Journal of Number Theory, Vol. 11, no. 2, pp. 209-217, 1979.

[13] Shallit, J., *Simple continued fractions for some irrational numbers, II*, Journal of Number Theory, Vol. 14, no. 2, pp. 228-231, 1982.

[14] Soria-Lorente, A., *Nesterenko-like rational function, useful to prove the Apéry's theorem*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 20, no. 2, pp. 79-91, 2014.

[15] Soria-Lorente, A., *On Zudilin-like rational approximations to* $\zeta(5)$, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 24, no. 2, pp. 104-116, 2018.

[16] Soria-Lorente, A. and Berres, S., *A single parameter Hermite-Padé series representation for Apéry's constant*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 26, no. 3, pp. 107-134, 2020.

[17] Zudilin, W., *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, Vol. 15, no. 2, pp. 593-626, 2003.

Recibido en septiembre de 2021. Aceptado para publicación en julio de 2022.

Carlos Felipe Gómez Jiménez
Ministerio de Educación de la República Dominicana
Distrito 13-02 de Guayubin R. D.n
Santo Domingo, República Dominicana
e-mail: cafe20001@gmail.com

José Miguel Méndez Velásquez
Liceo Salomé Ureña
San Francisco de Macorís, República Dominicana
e-mail: velasjose38@gmail.com