

Construcción de 3-variedades y cubiertas ramificadas

DÉBORA MARÍA TEJADA

Universidad Nacional de Colombia, Medellín

ABSTRACT. In this expository paper we present in a “natural” way the J. M. Montesinos method for constructing 3-manifolds. We start by considering some examples in dimension 2 in order to understand how it works in dimension 3. We also show the important role played by the monodromy and the path lifting theorems in the construction of manifolds.

Key words and phrases. Fundamental group, covering, branched covering, knot, knot group, cellular complex.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 57M12. Secondary 57N80, 55Q52, 55R10.

RESUMEN. El objetivo principal de este artículo divulgativo es el de presentar de forma “natural” el método desarrollado por J. M. Montesinos para la construcción de 3-variedades. Mostraremos primero, mediante ejemplos, como funciona el método en el caso más sencillo de dimensión 2 (superficies), posibilitando así un mejor entendimiento de lo que ocurre en dimensión 3. Resaltaremos la importancia del teorema de levantamiento de lazos en la construcción de variedades, como también el papel que desempeña la monodromía en tales construcciones.

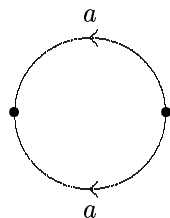
El autor ha sido parcialmente patrocinado por COLCIENCIAS-BID contratos 086-95 y 453-96 .

1. Superficies

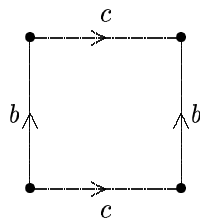
1.1. Clasificación de superficies. Es bien conocido que una variedad conexa, compacta y sin frontera de dimensión 2, es decir, una **superficie cerrada**, es una esfera, una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos (ver [15] y [9]). En la literatura se pueden encontrar diferentes demostraciones de este resultado, siendo una de las más conocidas la que aparece en Massey [9] (ver también [3]). El esquema de tal demostración, consiste en establecer que toda superficie cerrada se puede construir identificando (o “pegando”) por parejas los lados de un polígono con un número par de lados.

Los polígonos de la Figura 1.1 representan distintas superficies. Las flechas y letras que aparecen sobre los lados de los polígonos indican cómo se identifican los lados.

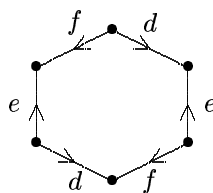
Obsérvese que las Figuras 1.1 (b) y 1.1 (c) muestran que una misma superficie puede obtenerse de distintas maneras.



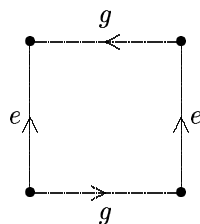
(a) Esfera



(b) Toro



(c) Toro



(d) Botella de Klein

Figura 1.1

Como consecuencia de la demostración resulta también que si se tiene un

número cualquiera de polígonos con un número total de lados par, y si sus lados se identifican por parejas, se obtiene una superficie cuyas componentes conexas son cerradas. La Figura 1.2 muestra que un toro también puede obtenerse identificando convenientemente los lados de tres cuadriláteros. Observamos que al hacer la identificación, los 12 vértices originales se convierten en sólo tres.

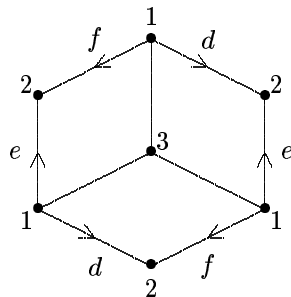


Figura 1.2

1.2. Construcción de un toro a partir de una esfera. A continuación consideraremos la construcción del toro representada en la Figura 1.2 desde un punto de vista diferente. Tomemos una esfera S^2 y sean x_1, x_2, x_3 tres puntos diferentes en S^2 . Sean a_j ($j = 1, 2$) trayectorias disjuntas en la esfera tales que a_j tenga punto inicial x_j y punto final x_{j+1} . Obtenemos una “línea quebrada” Q con vértices en los puntos dados. Cortemos ahora la esfera a lo largo de Q . En este sentido se dice que Q es el “complejo de fractura”. De esta manera se obtiene un espacio S homeomorfo a un cuadrilátero, cuya frontera es la duplicación de todos los puntos del complejo de fractura Q excepto sus extremos x_1 y x_3 .

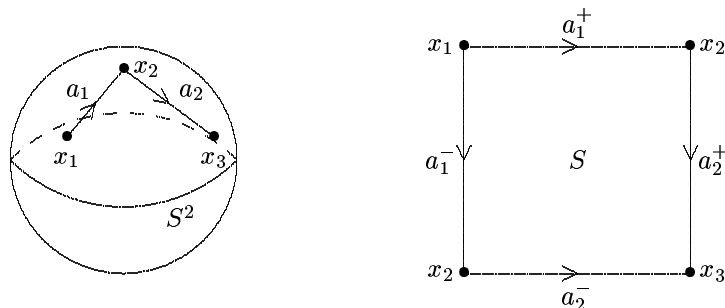


Figura 1.3

En la Figura 1.3 podemos visualizar el cuadrilátero S . Las flechas de los tramos indican el sentido original del corte. Como los tramos a_j aparecen duplicados en S , denotamos con a_j^+ (resp. a_j^-) al tramo que, al ser recorrido en el sentido de la flecha de corte, el interior del cuadrilátero S se encuentra al lado derecho (resp. al lado izquierdo).

Tomemos ahora tres réplicas S_1, S_2 y S_3 del cuadrilátero S . Con el fin de distinguir los lados les colocaremos un segundo subíndice.

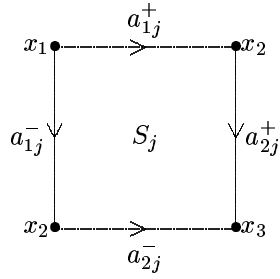


Figura 1.4

Si ahora pegamos los lados de estos cuadriláteros siguiendo la regla

$$\begin{aligned}
 a_{11}^+ &\cong a_{12}^-, & a_{21}^+ &\cong a_{23}^-, \\
 a_{12}^+ &\cong a_{13}^-, & a_{22}^+ &\cong a_{21}^-, \\
 a_{13}^+ &\cong a_{11}^-, & a_{23}^+ &\cong a_{22}^-,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde \cong significa “se pega a”, obtenemos un toro T . Es decir, $T = (\cup_{r=1}^3 S_r) / \cong$. Este toro lo visualizamos en la Figura 1.5. Salvo por los nombres de las aristas, las Figuras 1.5 y 1.2 son las mismas.

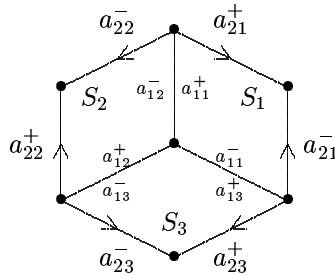


Figura 1.5

1.3. Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías. Nuestro objetivo inmediato es el de encontrar una relación entre la regla de pegamiento (1.1) y el grupo fundamental de $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$. Con este fin, haremos un paréntesis para recordar el concepto de cubierta y el teorema de levantamiento de trayectorias.

Sean \tilde{X}, X espacios topológicos arcoconexos y localmente arcoconexos, $f : \tilde{X} \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva tal que para todo $x \in X$ exista una vecindad abierta U de x tal que $f^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$, donde las V_i son las componentes (abiertas) arco conexas de $f^{-1}(U)$ y $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo. La función f se denomina una **cubierta sobre X** . Algunas veces se dice también que \tilde{X} es una **cubierta** de X .

Intuitivamente, \tilde{X} es una cubierta de X si para todo $x \in X$, una vecindad suficientemente pequeña de x se repite en el espacio \tilde{X} tantas veces como el cardinal de la preimagen de x .

Ejemplo 1.3.1. Si en la construcción del toro que hicimos a partir de la esfera en la Sección 1.2 consideramos la función cociente $f_r : S_r \rightarrow S^2 = (S/\cong)$ ($r = 1, 2, 3$) inducida por la composición del homeomorfismo natural entre S_r y S con la función cociente $S \rightarrow S^2 = (S/\cong)$, podemos definir de manera natural una función $f : T \rightarrow S^2$, donde $T := (\cup_{r=1}^3 S_r/\cong)$ y $f := \cup_{r=1}^3 (f_r/\cong)$, de tal manera que la restricción de f al conjunto $T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ sea una cubierta sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

Uno de los teoremas básicos ([9], pp. 151-52) de la teoría de cubiertas suministra importante información acerca de las preimágenes en \tilde{X} de trayectorias en X .

1.3.2. Teorema de Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías. Sean $f : \tilde{X} \rightarrow X$ una cubierta, $x \in X$ y $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$. Si $\alpha : I \rightarrow X$, $I = [0, 1]$, es una trayectoria de X con origen en $\alpha(0) = x$, existe una única trayectoria $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ y tal que $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ (se dice que $\tilde{\alpha}$ es el **levantamiento de α con origen en \tilde{x}**). Además, si α' es otra trayectoria de X homótopa a α (homotopía relativa a los extremos), los levantamientos de α' y de α que comiencen en un mismo punto \tilde{x} son también homótopos.

Intuitivamente, el teorema dice que si estamos parados en \tilde{x} , el cual es preimagen de un elemento $x = \alpha(0)$, hay una sola manera continua de desplazarse en \tilde{X} de tal manera que en todo instante $t \in [0, 1]$ la posición que se ocupe en \tilde{X} sea preimagen del punto $\alpha(t)$.

Como un corolario de este teorema se obtiene que el número de preimágenes de un punto cualquiera es constante para todo $x \in X$. Basta conectar dos puntos cualesquiera por una trayectoria, levantar ésta, y observar que se in-

duce una biyección entre los conjuntos de preimágenes de los extremos de la trayectoria. Este número se denomina **grado de la cubierta**. En el Ejemplo 1.3.1, el grado de la cubierta es 3.

En particular, al levantar un lazo basado en un punto $*$ de X se induce una permutación en el conjunto $f^{-1}(*)$, preimagen de $*$. Además, dos lazos homótopos inducen la misma permutación. En efecto, si $\alpha : I \rightarrow X$ es un lazo basado en $*$, y $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ es un levantamiento de α con origen en $\tilde{\alpha}(0) \in f^{-1}(*)$, entonces $\tilde{\alpha}(1) \in f^{-1}(*)$ ($\tilde{\alpha}$ no tiene porqué ser un lazo!). En otras palabras, dado un lazo α basado en $*$ en X , existe una función $p_\alpha : f^{-1}(*) \rightarrow f^{-1}(*)$ tal que, para todo $\tilde{x} \in f^{-1}(*)$, $p_\alpha(\tilde{x})$ es el punto de llegada del levantamiento de α que comienza en \tilde{x} . Esta función es biyectiva, ya que su inversa es $p_{\alpha^{-1}}$, donde α^{-1} es el lazo inverso del lazo α .

Como lazos homótopos inducen la misma permutación, denotaremos con la misma letra un lazo y su clase de homotopía.

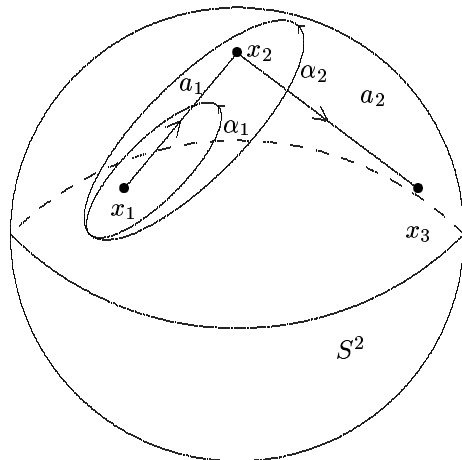


Figura 1.6

No es difícil probar que si $\alpha\beta$ es el producto de las curvas α y β entonces $p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta := p_\beta \circ p_\alpha$. Es decir, la función $p : \pi_1(X, *) \rightarrow \Sigma_{f^{-1}(*)}$, definida por $\alpha \mapsto p_\alpha$, es una representación (i.e., un homomorfismo) natural del grupo fundamental $\pi_1(X, *)$ de X en el grupo $\Sigma_{f^{-1}(*)}$ de las permutaciones de $f^{-1}(*)$. La representación $p : \pi_1(X, *) \rightarrow \Sigma_{f^{-1}(*)}$ es la llamada **monodromía de la cubierta f** (ver [15], p. 258). La existencia de esta representación tiene implicaciones inmediatas de orden práctico cuando se quiere construir superficies. En efecto, esta representación relaciona la regla de pegamiento (1.1) con el grupo fundamental de la esfera perforada en los puntos $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Sean α_1, α_2 dos lazos en S^2 basados en un punto $*$ en $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ y sea \mathcal{Q} como en la Sección 1.2. Supongamos que α_1, α_2 están dispuestos de tal modo que α_1 le dé una vuelta al punto x_1 (en sentido contrario a las manecillas del reloj) cortando una única vez a \mathcal{Q} sobre a_1 , y que α_2 dé una vuelta (en sentido contrario a las manecillas del reloj) simultáneamente a x_1 y a x_2 , cortando una sola vez a \mathcal{Q} sobre a_2 (ver Figura 1.6). Es entonces claro que α_1 y α_2 generan libremente al grupo fundamental de $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ y que están en correspondencia biunívoca con los lados a_1 y a_2 del complejo de fractura \mathcal{Q} .

Volvamos ahora a la regla de pegamiento (1.1). Si observamos los segundos subíndices, vemos que al lado a_1 (o a su lazo asociado α_1) le corresponde la permutación (123) y al lado a_2 (o a α_2), la (132). Esto define una representación $p : \pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}, *) \rightarrow \Sigma_3$ tal que $p_{\alpha_1} = (123)$ y $p_{\alpha_2} = (132)$, y ésta es justamente la monodromía de la cubierta del Ejemplo 1.3.1.

Recíprocamente, una representación cualquiera $\alpha \mapsto p_\alpha$ del grupo fundamental de la esfera perforada $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ en el grupo simétrico Σ_3 define una regla de pegamiento del siguiente modo: si p_{α_j} es la permutación asignada al lazo α_j , el lado a_{ji}^+ perteneciente a la copia S_i se pegará al lado $a_{jp_{\alpha_j}(i)}^-$ de la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$. Al aplicar esta regla a los lados de las copias S_r ($r = 1, 2, 3$) del cuadrilátero S se obtiene una nueva superficie, la cual es cerrada y orientable por la forma en que pegamos los lados: ¡nunca estamos pegando lados con el mismo signo! Además, esta superficie es conexa si y sólo si la representación $\alpha \mapsto p_\alpha$ es transitiva.

En la tabla siguiente se reúnen superficies obtenidas con diferentes representaciones del grupo $\pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\})$ en el grupo simétrico Σ_3 .

Representación	Superficie
$\alpha_1 \mapsto (1)(2)(3); \alpha_2 \mapsto (123)$	Esfera
$\alpha_1 \mapsto (123); \alpha_2 \mapsto (12)(3)$	Esfera
$\alpha_1 \mapsto (123); \alpha_2 \mapsto (132)$	Toro
$\alpha_1 \mapsto (1)(2)(3); \alpha_2 \mapsto (12)(3)$	2 Esferas disjuntas
$\alpha_1 \mapsto (1)(2)(3); \alpha_2 \mapsto (1)(2)(3)$	3 Esferas disjuntas

Tabla 1

Describimos a continuación la generalización de la construcción hecha en la

Sección 1.2., la cual no es más que el método de Montesinos para construir cubiertas, visualizado en dimensión 2. Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, k puntos sobre la esfera S^2 . Trazando trayectorias disjuntas a_j , $j = 1, \dots, k-1$, tales que a_j comience en x_j y termine en x_{j+1} , obtenemos una “línea quebrada” \mathcal{Q} . Cortando la esfera a lo largo del complejo de fractura \mathcal{Q} , se obtiene un espacio homeomorfo a un polígono con un número $2(k-1)$ de lados, que denotamos con S . Sean S_1, S_2, \dots, S_n , n copias de S . Denotamos con $f_r : S_r \rightarrow (S/\cong)$, ($r = 1, \dots, n$) las funciones cocientes naturales que surgen de la replicación de S y del corte de S^2 . Sea $*$ un punto en S^2 diferente de los k puntos seleccionados. Definimos el lazo α_j ($j = 1, \dots, k-1$), basado en $*$, como aquel que rodea simultáneamente los puntos x_1, \dots, x_j en sentido contrario a las manecillas del reloj y atraviesa una sola vez el complejo de fractura \mathcal{Q} en a_j (Figura 1.7). Así pues, el conjunto $A := \{\alpha_j/j = 1, \dots, k-1\}$ genera libremente al grupo fundamental $\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_k\})$.

Ahora, cualquier función del conjunto A de generadores (libres) en el grupo simétrico Σ_n induce una representación ($\alpha \mapsto p_\alpha$) del grupo $\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_k\})$ en el grupo Σ_n de las permutaciones de n elementos. Teniendo en cuenta esta representación, podemos proceder a pegar los lados de los polígonos S_r siguiendo la regla siguiente: el lado a_{ji}^+ situado en la copia S_i se pega con el lado $a_{jp_{\alpha_j}(i)}^-$ situado en la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$ ($j = 1, \dots, k-1$ e $i = 1, \dots, n$). Además, estos pegamientos se hacen teniendo el cuidado de identificar puntos que eran correspondientes en S antes del corte. Esta forma de pegar los lados garantiza que la superficie obtenida es cerrada y orientable.

De esta manera, si $\tilde{X} = (\cup_r S_r/\cong)$ es el espacio obtenido al hacer estos pegamientos y $S^2 = (S/\cong)$ es la esfera antes del corte, entonces la función $f : \tilde{X} \rightarrow S^2$ definida por $f(\tilde{x}) = f_r(\tilde{x})$ (para $\tilde{x} \in S_r$), al restringirla a $\tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\})$, es una cubierta sobre la esfera $S^2 - \{x_1, \dots, x_k\}$ de grado n . Recordamos además que los lazos α_j ($i = 1, \dots, k-1$) atraviesan el complejo de fractura \mathcal{Q} una sola vez. Esta condición garantiza que la monodromía de la cubierta,

$$f|_{(\tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\}))} : \tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\}) \rightarrow S^2 - \{x_1, \dots, x_k\},$$

es justamente la representación $\alpha \mapsto p_\alpha$.

Es natural preguntarnos aquí: *¿Qué información guardan las permutaciones asociadas a los lazos α_j que nos permite dar una regla de pegamiento?*

Es aquí donde el teorema de levantamiento de lazos juega su papel práctico. En efecto, si levantamos α_j , para que el levantamiento tenga su punto inicial en la copia S_i , el punto donde termina deberá estar situado en la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$, y como este levantamiento corta un único lado una sola vez (ya que α_j corta