

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Partially ordered sets and lattices

Jhon Bladimir Caicedo y Rafael S. González D'León

Universidad Sergio Arboleda, Colombia

RESUMEN. Notas de clase del minicurso de introducción a los conjuntos parcialmente ordenados y retículos. La mayor parte de estas notas está basada en la obra y notas de clase de Richard Stanley [5, Capítulo 3] y en el artículo de Federico Ardila [1, Sección 4] para la parte de conjuntos parcialmente ordenados; y en las notas de clase de Michelle Wachs [8] para la parte de topología de conjuntos parcialmente ordenados.

Palabras clave: Conjuntos parcialmente ordenados, posets, retículos, álgebra de incidencia, función de Möbius, complejos simpliciales.

ABSTRACT. Lecture notes of the minicourse “Introduction to partially ordered sets and lattices”. A great part of these notes is based on the work and lecture notes by Richard Stanley [5, Capítulo 3] and Federico Ardila [1, Sección 4] for the part on partially ordered sets, and on the lecture notes of Michelle Wachs [8] for the poset topology part.

Key words: Partially ordered sets, Posets, lattices, Incidence algebras, Möbius function, Simplicial complexes.

2010 AMS Mathematics Subject classification: 05A15, 05A18, 05A19, 06A06, 06A07, 06A11, 06B05.

Índice

| | |
|--|------------|
| 1. Conjuntos parcialmente ordenados | 150 |
| 1.1. Definiciones básicas | 150 |
| 1.2. Funciones entre posets | 152 |
| 1.3. Construcciones y operaciones entre posets | 155 |

| | |
|---|------------|
| 2. Retículos | 156 |
| 2.1. Definiciones básicas | 156 |
| 2.2. Retículos distributivos | 158 |
| 2.3. Retículos geométricos | 159 |
| 3. Álgebras de incidencia y la función de Möbius | 163 |
| 3.1. Álgebras de incidencia | 163 |
| 3.2. Algunas funciones en $I(P)$ | 164 |
| 3.3. Calculando la función de Möbius | 165 |
| 3.4. La fórmula de inversión de Möbius | 167 |
| 4. Topología de posets | 169 |
| 5. Agradecimientos | 171 |
| 6. Ejercicios | 171 |

1. Conjuntos parcialmente ordenados

En esta sección estudiaremos las definiciones y construcciones básicas en la teoría de conjuntos parcialmente ordenados. Existen múltiples referencias en la literatura en combinatoria que tratan sobre el tema y en estas notas de clase no pretendemos ser exhaustivos. Algunas de las demostraciones de los teoremas, lemas y proposiciones presentados han sido incluidas y otras se han dejado al lector o han sido omitidas pensando en que la presentación de los temas sea lo suficientemente clara. El lector interesado en profundizar en el tema puede visitar [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

1.1. Definiciones básicas

Definición 1.1. Un conjunto parcialmente ordenado, también llamado *po-conjunto* o *poset* (por su nombre en inglés), es un par (P, \leq) en donde P es un conjunto y \leq es una *relación de orden*, o sea una relación binaria que es:

- (I). (Reflexiva) Para todo $x \in P$ se tiene $x \leq x$.
- (II). (Antisimétrica) Para $x, y \in P$ se tiene que $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$.
- (III). (Transitiva) Para $x, y, z \in P$ se tiene que $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Uno de los ejemplos más simples que se puede dar de un conjunto parcialmente ordenado es el de una colección \mathcal{C} de conjuntos relacionados por la relación de inclusión no estricta " \subseteq ", en donde $A \subseteq B$ quiere decir que todo elemento de A es también un elemento de B . En esta relación tenemos que para todo conjunto A es cierto que $A \subseteq A$,

verificando la relación reflexiva. Adicionalmente se verifican fácilmente la antisimetría, ya que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implican que A y B tienen los mismos elementos (o sea $A = B$), y la transitividad, ya que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ claramente implican $A \subseteq C$. Nótese que en una clase de conjuntos \mathcal{C} pueden existir dos conjuntos A y B para los cuales $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$ y entonces A y B no están relacionados o son *incomparables*, de ahí el nombre de orden **parcial**. Un conjunto parcialmente ordenado P se llama *orden total* o *cadena* si para cualquier par de elementos $x, y \in P$ tenemos que x y y son comparables, o sea $x \leq y$ o $y \leq x$.

Se usa frecuentemente la notación $x \leq_P y$ para aclarar que la relación de orden es la asociada a (P, \leq) . Cuando la relación de orden es clara en el contexto normalmente abusaremos de la notación y diremos que P es un poset sin hacer referencia a la relación de orden. También decimos que $x < y$ cuando $x \leq y$ pero $x \neq y$. Si $x < y$ en P y no existe un $z \in P$ tal que $x < z < y$ entonces diremos que y cubre a x y lo denotamos $x \prec y$.

Ejemplo 1.2. Denotemos \mathbb{B}_S al conjunto potencia (algunas veces se usa $\mathcal{P}([n])$ o $2^{[n]}$) de un conjunto S , es decir el conjunto de subconjuntos de S . En particular cuando $S = [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ denotamos $B_n := \mathbb{B}_S$. Usando el mismo orden dado por inclusión descrito anteriormente podemos considerar \mathbb{B}_n como un poset y llamaremos este poset *el álgebra de Boole sobre $[n]$* o *el poset de subconjuntos de $[n]$* . El *diagrama de Hasse* de un poset P es un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de P y cuyas aristas dirigidas son las relaciones de cobertura en P . En la figura 1 se ilustra el diagrama de Hasse de \mathbb{B}_3 .

Ejemplo 1.3. Una *cadena* es un poset cuyos elementos están totalmente ordenados. En particular los reales \mathbb{R} , los enteros \mathbb{Z} y los naturales \mathbb{N} son cadenas con respecto a sus órdenes usuales correspondientes. Estas cadenas son cadenas infinitas. Vamos a denotar \mathbf{n} o C_n a la cadena que sus elementos son $[n]$ y en donde $x \leq y$ en \mathbf{n} de acuerdo al orden usual de los enteros. Diremos que \mathbf{n} es la *cadena de orden n* (o la *cadena de longitud $n - 1$* , razón que es aparente en el diagrama de Hasse de la figura 1).

Ejemplo 1.4. El conjunto D_n de divisores enteros positivos del entero n puede considerarse como un poset con la relación de orden parcial dada por $x \leq y$ siempre que $x|y$ (x divide a y). D_n se conoce como el *poset de divisibilidad de n* o el *poset de divisores de n* , ver la figura 1.

Ejemplo 1.5. Una *partición* de un conjunto S es una colección $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ de subconjuntos disjuntos (también llamados *bloques*) de S tal que $\cup_{i=1}^k B_i = S$. Sea Π_n el conjunto de particiones de $[n]$ y para $\pi, \pi' \in \Pi_n$ decimos que π es un *refinamiento* de π' si para cada bloque $B \in \pi$ hay un bloque $B' \in \pi'$ tal que $B \subseteq B'$. Podemos verificar que Π_n tiene la estructura de poset con la relación dada por refinamiento, o sea, $\pi \leq \pi'$ siempre que π sea un refinamiento de π' . Llamamos a Π_n el *poset de particiones*. La figura 1 ilustra el diagrama de Hasse de Π_3 .

Observación 1.6. Si en la definición 1.1 la relación \leq solamente satisface las propiedades (I) y (II), el par (P, \leq) es llamado un *preorden* o *preposet*. Si en un preposet consideramos la relación de equivalencia $x \sim y$ siempre que $x \leq y$ y $y \leq x$ en P , entonces \leq induce un orden parcial en el conjunto de clases de equivalencia. En la Figure 2 se ilustra un ejemplo

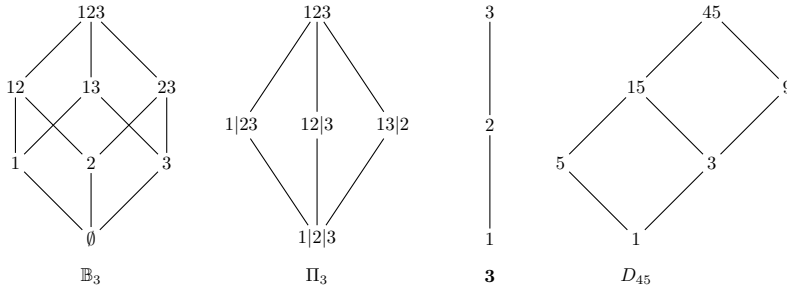


Figura 1. Ejemplos de posets.

del diagrama de Hasse de las clases de equivalencia de un preposet sobre el conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. En este caso tenemos por ejemplo que $b \leq c$ y $c \leq b$ pero $b \neq c$.

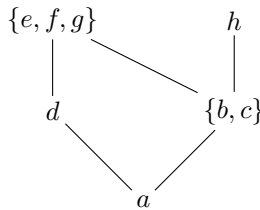


Figura 2. Diagrama de Hasse de un preposet.

Observación 1.7. Decimos que un poset P es *finito* si $|P| < \infty$. En un poset finito es suficiente con describir las relaciones de cobertura para describir todo el poset (véase la figura 1). Esto no es cierto para un poset infinito, por ejemplo en \mathbb{R} con su relación de orden total clásica no existen relaciones de cobertura. En este minicurso trabajaremos con posets finitos a no ser que se especifique lo contrario.

1.2. Funciones entre posets

Definición 1.8. Una *función monótona, preservante de orden, función de posets o morfismo de posets* es una función $f : P \rightarrow Q$ en donde P y Q son posets y siempre que $x \leq_P y$ tenemos que $f(x) \leq_Q f(y)$. Un *isomorfismo* entre los posets P y Q es una biyección monótona $f : P \rightarrow Q$ tal que su inversa $f^{-1} : Q \rightarrow P$ también es monótona. En el lenguaje de la teoría de categorías diríamos que un isomorfismo de posets es un isomorfismo en la categoría \mathcal{Poset} formada por posets y funciones monótonas.

Definición 1.9. Para un poset P definimos su *poset dual* P^* como el poset formado por el mismo conjunto de elementos que P pero tal que $x \leq_{P^*} y$ si y solo si $y \leq_P x$. La figura 3 muestra los diagramas de Hasse de un poset y su dual.

Proposición 1.10. *El algebra de Boole \mathbb{B}_n es auto-dual, es decir, $\mathbb{B}_n \cong \mathbb{B}_n^*$.*

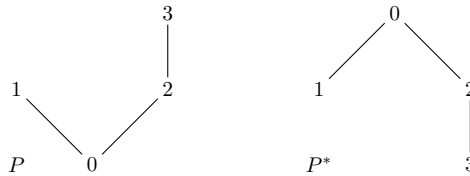


Figura 3. Un par de posets duales.

Demostración. La función definida como $A \mapsto [n] \setminus A$ para cada $A \subseteq [n]$ es una biyección que claramente es monótona y su inversa es monótona, o sea es un isomorfismo de posets. \square

Ejemplo 1.11. Una *composición de n* es una sucesión finita de enteros positivos cuya suma es igual a n . Por ejemplo $(2, 1, 1, 3, 1)$ es una composición de 8. Denotemos COMP_n al conjunto de composiciones de n . Para $\nu, \mu \in \text{COMP}_n$ definimos la relación de cobertura $\nu \leq \mu$ si μ puede ser obtenido de ν sumando entradas adyacentes, por ejemplo $(2, 1, 1, 3, 1) \leq (2, 1, 4, 1)$.

Proposición 1.12. Tenemos que $\text{COMP}_n \cong \mathbb{B}_{n-1}$.

Demostración. Sea $f : \text{COMP}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-1}^*$ la función definida por $f(\mu) = \{\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \dots, \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{|\mu|-1}\}$ en donde $|\mu|$ es el número de elementos en μ .

- **f es una biyección:** f tiene una inversa $f^{-1} : \mathbb{B}_{n-1}^* \rightarrow \text{COMP}_n$ definida como $f^{-1}(A) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{|A|} - a_{|A|-1}, n - a_{|A|})$ para $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{|A|}\}$.
- **f es monótona:** Sea $\mu \leq \nu$, para algún $r \in [|\mu| - 1]$ tenemos que $\nu_i = \mu_i$ siempre que $i < r$, $\nu_r = \mu_r + \mu_{r+1}$ y $\nu_i = \mu_{i+1}$ siempre que $i > r$. Entonces $\sum_{j=1}^i \nu_j = \sum_{j=1}^i \mu_j$ cuando $i < r$, y $\sum_{j=1}^i \nu_j = \sum_{j=1}^{i+1} \mu_j$ cuando $i \geq r$ y entonces $f(\mu) \supseteq f(\nu)$. Como estamos trabajando con posets finitos solo tenemos que chequear que f es monótona en relaciones de cobertura ya que a la conclusión se llega por inducción.
- **f^{-1} es monótona:** Sea $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{|A|}\} \supseteq B = \{a_1 < a_2 < \dots < \hat{a}_r < \dots < a_{|A|}\}$ una relación de cobertura en \mathbb{B}_{n-1}^* , en donde \hat{a}_r indica que el elemento a_r ha sido removido de A . Entonces por definición tenemos que $f^{-1}(B)_i = f^{-1}(A)_i$ para $i < r$, $f^{-1}(B)_r = a_{r+1} - a_{r-1} = a_{r+1} - a_r + a_r - a_{r-1} = f^{-1}(A)_r + f^{-1}(A)_{r+1}$ y $f^{-1}(B)_i = f^{-1}(A)_{i+1}$ para $i > r$. \square

Proposición 1.13. Si $f : P \rightarrow P$ es una biyección monótona y P es un poset finito entonces f es un automorfismo de posets.

Demostración. Si f es la función identidad entonces la conclusión es trivial. En cualquier otro caso, como f es una biyección sobre el mismo conjunto, entonces es una permutación

de P . Como P es finito entonces f tiene orden finito en el grupo permutaciones de P , o sea para algún $k > 1$ tenemos que $f^k = Id$. Tenemos entonces que $f^{-1} = f^{k-1}$ es una función monótona ya que la composición de funciones monótonas es monótona. \square

Ejemplo 1.14. La conclusión de la Proposición 1.13 no se cumple cuando P no es finito. Consideremos por ejemplo el poset infinito P de la figura 4 y la función $f : P \rightarrow P$ dada por $f(i) = i$ y $f(i') = (i + 1)'$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Esta función es una biyección monótona pero su inversa no es monótona.

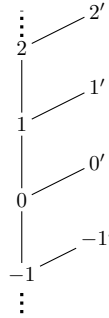


Figura 4. Poset infinito en donde no toda biyección monótona es un automorfismo.

Definición 1.15. A un poset Q lo llamamos *subposet en el sentido débil* de un poset P si $Q \subseteq P$ como conjuntos y para cada $x, y \in Q$ tenemos que $x \leq_Q y$ implica que $x \leq_P y$, en otras palabras, la función de inclusión $Q \hookrightarrow P$ es una función monótona. Si $Q = P$ como conjuntos entonces decimos que P es un *refinamiento* de Q . Decimos que Q es un *subposet (inducido)* de P si $Q \subseteq P$ como conjuntos y para $x, y \in Q$ tenemos que $x \leq_Q y$ si y solo si $x \leq_P y$. En otras palabras, un subposet de P se obtiene al tomar un subconjunto Q de P junto con todas las relaciones que tienen los elementos de Q en P .

Dos ejemplos particulares de subposets son los intervalos cerrados $[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ y los intervalos abiertos $(x, y) := \{z \in P \mid x < z < y\}$. De un poset en el cual todo intervalo es finito se dice que es *localmente finito*. Por ejemplo la cadena infinita \mathbb{Z} de enteros con su orden natural es localmente finita. Las cadenas de subposet P son todos los subposets de P cuyo orden inducido es total. Una cadena $C \subseteq P$ es *saturada* si no hay un $z \in P \setminus C$ tal que $x < z < y$ para todo par de elementos $x, y \in C$ tal que $C \cup \{z\}$ es también una cadena. Una cadena es *máxima* si no hay un $z \in P \setminus C$ tal que $C \cup \{z\}$ es también una cadena. La *longitud* de un poset se define como $\ell(P) := \{|C| \mid C \subseteq P \text{ es una cadena}\}$. A un poset se le llama *puro, graduado o ranqueado* si todas las cadenas máximas tienen la misma longitud. A un elemento $x \in P$ se le llama *minimal (maximal)* si no hay un elemento $z \in P$ tal que $z < x$ ($z > x$). Denotaremos $Min(P)$ ($Max(P)$) al conjunto de elementos minimales (maximales) de P .

Proposición 1.16. Si P es un poset finito graduado entonces existe una función bien definida $\rho : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ (llamada función de grado) tal que $\rho(x) = 0$ siempre que $x \in \text{Min}(P)$ y si $x < y$ entonces $\rho(y) = \rho(x) + 1$.

Cuando P es graduado con función de grados ρ decimos que el grado de un elemento x es $\rho(x)$. La función generadora por grados de P es el polinomio

$$F(P, t) := \sum_{x \in P} t^{\rho(x)}.$$

Ejemplo 1.17. (a) $F(C_n, t) = 1 + t + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = [n + 1]_t$.

(b) $F(\mathbb{B}_n, t) = (1 + t)^n$.

(c) $F(\Pi_n, t) = \sum_{k=0}^{n-1} S(n, n-k)t^k$ en donde $S(n, k)$ es el número de particiones de $[n]$ en exactamente k bloques. Los números $S(n, k)$ son conocidos como los números de Stirling del segundo tipo.

1.3. Construcciones y operaciones entre posets

Definición 1.18. Entre posets P y Q también tenemos las siguientes operaciones:

- (I) (Unión disjunta) La *unión disjunta* o *suma directa* $P + Q$ se define como el poset cuyo conjunto de elementos es $P \sqcup Q$ y cuya relación de orden está dada por $x \leq_{P+Q} y$ si y solo si $x \leq_P y$ o $x \leq_Q y$.
- (II) (Producto directo) El *producto directo* o *producto cartesiano* $P \times Q$ es el poset cuyo conjunto de elementos es $P \times Q$ y cuya relación de orden está dada por $(x, x') \leq_{P \times Q} (y, y')$ si y solo si $x \leq_P y$ y $x' \leq_Q y'$.
- (III) (Suma ordinal) La *suma ordinal* $P \oplus Q$ es el poset en $P \sqcup Q$ cuya relación de orden está dada por $x \leq_{P \oplus Q} y$ si y solo si $x \leq_P y$, $x \leq_Q y$ o $x \in P$ y $y \in Q$.
- (IV) (Producto ordinal) El *producto ordinal* o *producto diccionario* $P \otimes Q$ es el poset con elementos $P \times Q$ y cuya relación de orden está dada por $(x, x') \leq_{P \otimes Q} (y, y')$ si y solo si $x \leq_P y$ o $x = y$ y $x' \leq_Q y'$.
- (V) (Potencia) Denotamos Q^P al poset formado por todas las funciones monótonas $f : P \rightarrow Q$ con relación de orden dada por $f \leq g$ para $f, g \in Q^P$ si $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in P$.

Ilustraremos algunas de estas operaciones para los posets P y Q de la figura 5. Las operaciones entre P y Q se muestran en la figura 6.

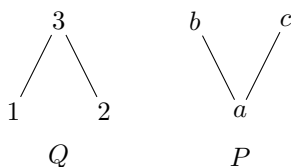


Figura 5. Posets Q y P .

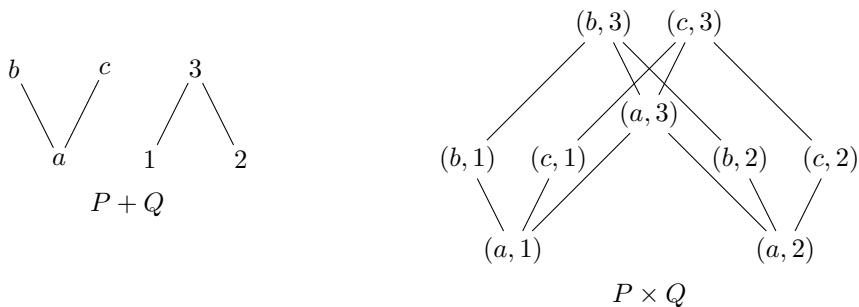
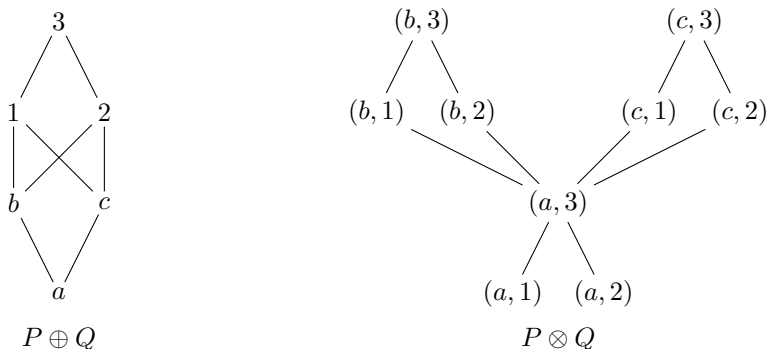


Figura 6. Operaciones con los posets de la figura 5.

2. Retículos

2.1. Definiciones básicas

Sea P un poset. Para un subconjunto $A \subseteq P$ decimos que $u \in P$ es una *cota superior* de A si $u \geq x$ para todo $x \in A$. A u le llamamos *cota superior mínima*, *supremo* o *juntura* (en inglés se usa comúnmente la palabra “join”) de los elementos de A si para cualquier otra cota superior z se cumple que $z \geq u$. De la misma manera, definimos el concepto de *cota inferior* de A como un elemento $l \in P$ tal que $l \leq x$ para todo $x \in A$ y a l le llamamos *cota inferior máxima*, *ínfimo* o *conurrencia* (en inglés se usa comúnmente la palabra “meet”) si cualquier otra cota inferior z cumple que $z \leq l$. Usaremos la notación $\vee A$ y

$\wedge A$ para la juntura y concurrencia de A respectivamente siempre que existan, y cuando $A = \{x, y\}$ tenga solo dos elementos usaremos la notación $x \vee y$ y $x \wedge y$. En el poset de la figura 7 tenemos que $y \vee w = r$ pero el conjunto $\{y, w\}$ no tiene una concurrencia ya que x y z son ambos cotas inferiores de $\{y, w\}$ pero x y z son incomparables. En un poset P denotamos $\hat{1} = \wedge P$ y $\hat{0} = \vee P$ en caso de que estos elementos existan y los llamamos respectivamente elementos *tope* y *base*. A un poset que tenga ambos, un elemento tope y un elemento base, le llamamos *acotado*.

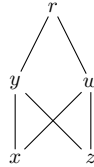


Figura 7. El conjunto $\{y, w\}$ no tiene concurrencia.

Definición 2.1. Un *retículo* es un poset P en el cuál todo par de elementos $x, y \in P$ tiene una juntura $x \vee y$ y una concurrencia $x \wedge y$.

Observación 2.2. En lo que sigue, frecuentemente usaremos la letra L en lugar de la letra P para denotar a un poset que adicionalmente posee la estructura de retículo.

Ejemplo 2.3. (a) \mathbb{N} es un retículo en el cuál $x \wedge y = \min\{x, y\}$ y $x \vee y = \max\{x, y\}$.

(b) \mathbb{B}_n es un retículo en el cuál $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B = A \cup B$.

(c) Π_n es un retículo en donde $\pi \wedge \pi' = \{B \cap B' \mid B \in \pi, B' \in \pi'\}$ y $\pi \vee \pi'$ es la partición más fina con la propiedad de que si $B \in \pi$ y $B' \in \pi'$ tienen una intersección no vacía $B \cap B' \neq \emptyset$ entonces ambos $B \subseteq X$ y $B' \subseteq X$ para algún bloque $X \in \pi \vee \pi'$.

(d) D_n es un retículo en el cuál $x \wedge y = \text{mcd}(x, y)$ y $x \vee y = \text{mcm}(x, y)$.

Definición 2.4. A un poset P se le conoce como *semiretículo por concurrencia* (*semiretículo por juntura*) si todo par de elementos en P tiene un ínfimo (supremo).

Observación 2.5. Nótese que un poset finito P es un semiretículo por concurrencia (semiretículo por juntura) si y solo si todo subconjunto de P tiene un ínfimo (supremo).

Proposición 2.6. Un *semiretículo por concurrencia* finito con un $\hat{1}$ es un *retículo*.

Demostración. Para mostrar que cada par de elementos $x, y \in P$ tienen también una juntura en P consideremos el conjunto

$$A = \{z \in P \mid z \geq x \text{ y } z \geq y\}$$

(nótese que $A \neq \emptyset$ y $|A| < \infty$). Entonces $l := \bigwedge_{a \in A} a$ es una cota superior mínima para x y y . \square

Observación 2.7. La Proposición 2.6 falla cuando P no es finito, considerese por ejemplo el poset $\{\hat{0}\} \oplus (C_0 + C_0) \oplus \mathbb{N}^*$.

Ejemplo 2.8. El poset $\mathbb{B}_{\leq k}$ formado por los subconjuntos de $[n]$ de cardinalidad a lo sumo k o exactamente n es un retículo.

2.2. Retículos distributivos

Definición 2.9. Un retículo L se dice que es *distributivo* si satisface las leyes distributivas:

- (D1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para todo $x, y, z \in L$.
- (D2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para todo $x, y, z \in L$.

Observación 2.10. Un retículo satisface la propiedad (D1) si y solo si satisface la propiedad (D2).

Ejemplo 2.11. Las operaciones sobre conjuntos $\wedge = \cap$ y $\vee = \cup$ cumplen con las propiedades (D1) y (D2) entonces \mathbb{B}_n es un retículo distributivo.

Un *ideal de orden (inferior)* I es un subconjunto de un poset P tal que si $x \in I$ y $z \leq x$ entonces $z \in I$. Similarmente un *ideal de orden superior o filtro* U es un subconjunto de P tal que si $x \in I$ y $x \leq z$ entonces $z \in I$. Como estamos trabajando con posets finitos, podemos caracterizar un ideal de orden I por su conjunto de elementos maximales $Max(I)$. Nótese que todo par de elementos en $Max(I)$ es incomparable, un conjunto con esta propiedad se conoce como una *anticadena*. Como cada anticadena también describe un ideal de orden entonces hay una biyección entre anticadenas de P e ideales de orden de P . Para un subconjunto $A \subseteq P$ denotamos $I(A) := \{z \in P \mid z \leq x \text{ para algún } x \in A\}$ el ideal de orden generado por A y si $|A| = 1$ este ideal se le llama *principal*. El conjunto $J(P)$ de ideales de orden de P tiene la estructura de un poset cuando consideramos la relación de inclusión (ver la figura 8).

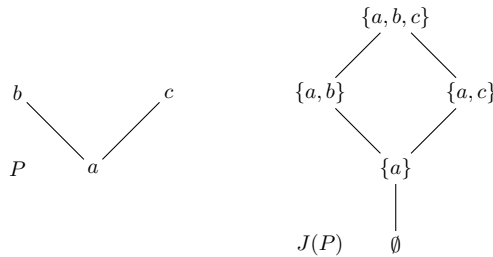


Figura 8. Ejemplo de $J(P)$ para un poset finito P .

Proposición 2.12. Sea P un poset finito, entonces $J(P)$ es un retículo distributivo.

Demostración. Nótese que siempre que I e I' son ideales de orden en $J(P)$ entonces $I \cap I'$ e $I \cup I'$ también lo son. Entonces $J(P)$ es un subposet del álgebra de Boole B_P en los

elementos de P cerrado al tomar uniones e intersecciones (también llamado *subretículo*). Y sabemos que uniones e intersecciones en B_P satisfacen (D1) y (D2). \square

Observación 2.13. Nótese que si P es un poset con n elementos, entonces $J(P)$ es graduado de grado n .

Definición 2.14. A un elemento $x \neq \hat{0}$ de un retículo L le llamamos *irreducible* (con respecto a juntura) si $x = a \vee b$ implica que $a = x$ o $b = x$, es decir, x no se puede expresar como la juntura de dos elementos estrictamente menores.

Lema 2.15. Si $x \in L$ es irreducible entonces cubre exactamente un elemento de L .

Proposición 2.16. Sea P un poset finito. El subposet de $J(P)$ formado por los elementos irreducibles es isomorfo a P .

Demostración. Sea $I \in J(P)$ irreducible. Gracias al lema 2.15 sabemos que I cubre exactamente un elemento, y esto es verdad si y solo si $I = I(x)$ es un ideal de orden principal, en donde $x \in P$. Tenemos entonces una biyección entre los elementos $x \in P$ y los irreducibles (ideales de orden principales) $I(x) \in J(P)$. Adicionalmente $I(x) \subseteq I(y)$ si y solo si $x \leq y$. \square

Teorema 2.17 (Teorema Fundamental de los Retículos Finitos Distributivos). Sea L un retículo finito distributivo. Entonces existe un único poset finito (salvo isomorfismo) P tal que $L \cong J(P)$.

Bosquejo de la demostración. Sea P el subposet formado por los irreducibles de L . Queremos mostrar que $L \cong J(P)$. Para esto consideramos la función $\psi : L \rightarrow J(P)$ que para cada $x \in L$ está dada por

$$\psi(x) = \{z \in P \mid z \leq x\}.$$

Esta función es claramente monótona y cuenta con una inversa dada por

$$\phi(I) = \bigvee_{z \in I} z$$

que es también claramente monótona. \square

2.3. Retículos geométricos

Definición 2.18. A un retículo graduado L se le llama *semimodular (superior)* si su función de grados ρ cumple que

$$\rho(x) + \rho(y) \geq \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y) \quad \forall x, y \in L. \quad (2.1)$$

El concepto de *semimodular inferior* se define de manera similar cambiando la dirección de la desigualdad y decimos que L es *modular* cuando la relación es dada por la igualdad.

Proposición 2.19. *Sea L un retículo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I) *L es graduado y su función de grados satisface la ecuación (2.1).*
- (II) *Para todo $x, y \in L$ si x cubre $x \wedge y$ entonces $x \vee y$ cubre y .*
- (III) *Para todo $x, y \in L$ si x y y ambos cubren $x \wedge y$ entonces $x \vee y$ cubre ambos x y y .*

Demostración. Probamos primero (I) \Rightarrow (II). Podemos reescribir (2.1) de la siguiente manera:

$$\rho(x) - \rho(x \wedge y) \geq \rho(x \vee y) - \rho(y).$$

Si $x \succ x \wedge y$ entonces $\rho(x) - \rho(x \wedge y) = 1$ y por consiguiente $\rho(x \vee y) - \rho(y)$ puede ser solamente 0 o 1. Si este valor fuera 0 entonces $\rho(x \vee y) = \rho(y)$ lo que implicaría que $x \leq y$ y $x = x \wedge y$, una contradicción. Entonces $\rho(x \vee y) - \rho(y) = 1$ lo que implica que $x \vee y \succ y$.

Como (III) se desprende fácilmente de (II) nos queda únicamente por mostrar que (III) \Rightarrow (I). Demostraremos primero que L es graduado. Supongamos que no y escojamos un intervalo $[x, y]$ de longitud mínima en L que no sea graduado. Entonces tienen que existir dos elementos $z, w \in [x, y]$ y enteros positivos $\ell_1 \neq \ell_2$ tal que $x \leq z, x \leq w$ y que toda cadena máxima en $[z, y]$ sea de longitud ℓ_1 y toda cadena máxima en $[w, y]$ sea de longitud ℓ_2 . Pero (III) nos dice que $z \vee w$ cubre ambos z y w implicando que toda cadena saturada de la forma $z \vee w = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = y$ tiene ambas longitudes $\ell_1 - 1$ y $\ell_2 - 1$, una contradicción. Así que L tiene que ser graduado.

Ahora, asumamos que L falla en satisfacer la ecuación (2.1) y escojamos un par x, y tal que

$$\rho(x) + \rho(y) < \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y),$$

con las propiedades de que el intervalo $[x \wedge y, x \vee y]$ sea de longitud mínima y la cantidad $\rho(x) + \rho(y)$ sea mínima. Nótese que ambos x y y no pueden cubrir $x \wedge y$ al mismo tiempo ya que por (III) $\rho(x) + \rho(y) = \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y)$, que sería una contradicción. Entonces asumamos sin pérdida de generalidad que hay un elemento x' tal que $x \wedge y < x' < x$.

Por la minimalidad de $\ell(x \wedge y, x \vee y)$ y $\rho(x) + \rho(y)$ tenemos que

$$\rho(x') + \rho(y) \geq \rho(x' \wedge y) + \rho(x' \vee y).$$

Como $x \wedge y = x' \wedge y$ concluimos de las dos desigualdades que

$$\rho(x) + \rho(x' \vee y) < \rho(x') + \rho(x \vee y).$$

Como $x \vee (x' \vee y) = x \vee y$ y $x \wedge (x' \vee y) \geq x'$ tenemos que el par $x, x' \vee y$ satisface

$$\rho(x) + \rho(x' \vee y) < \rho(x \wedge (x' \vee y)) + \rho(x \vee (x' \vee y))$$

y $\ell(x \wedge (x' \vee y), x \vee (x' \vee y)) < \ell(x \wedge y, x \vee y)$, que es una contradicción. \square

Proposición 2.20. *Un retículo finito L es modular si y solo si cumple:*

$$\forall x, y, z \in L \text{ tal que } x \leq z, \text{ tenemos } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \quad (2.2)$$

Demostración. (\Rightarrow) Sea L modular y $x, y, z \in L$ sean tal que $x \leq z$. Primero notemos que $x \leq z$ y que $x \leq x \vee y$ así que $x \leq (x \vee y) \wedge z$. De manera similar tenemos que $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ y $y \wedge z \leq z$ así que $(y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$. Combinando estos dos hechos concluimos que

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z. \quad (2.3)$$

Ahora, por hipótesis sabemos que L es modular, por tanto se cumple que

$$\rho(x \vee (y \wedge z)) = \rho(x) + \rho(y \wedge z) - \rho(x \wedge (y \wedge z))$$

para todo $x, y, z \in L$. Como $x \leq z$ tenemos que $\rho(x \wedge (y \wedge z)) = \rho(x \wedge y)$. Utilizando esto, la definición de modularidad en $\rho(y \wedge z)$ esta ecuación queda

$$\rho(x \vee (y \wedge z)) = \rho(x) + \rho(y) + \rho(z) - \rho(y \vee z) - \rho(x \wedge y).$$

Por otra parte, utilizando un procedimiento similar al anterior obtenemos

$$\rho((x \vee y) \wedge z) = \rho(x) + \rho(y) + \rho(z) - \rho(y \vee z) - \rho(x \wedge y),$$

que al combinarlo con lo anterior nos lleva a concluir que

$$\rho((x \vee y) \wedge z) = \rho(x \vee (y \wedge z)). \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) implican, usando la definición de la función ρ , que

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z).$$

(\Leftarrow) Tenemos por hipótesis que para todo $x, y, z \in L$ tal que $x \leq z$ se cumple que

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \quad (2.5)$$

Vamos a demostrar primero que L es semimodular superior usando la Proposición 2.19 parte (II).

Tomemos x e y no comparables en L (ya que el caso comparable es trivial) tal que $x \wedge y < y$ y supongamos que $x \vee y$ no cubre x . Entonces existe $z \in [x, x \vee y]$ tal que $x \wedge y < x < z < x \vee y$. Nótese que y y z no pueden ser comparables ya que x e y no lo son. Como $z \leq y \vee x$ tenemos que

$$(x \vee y) \wedge z = z. \quad (2.6)$$

Como $x \leq z$ tenemos que $x \wedge y \leq z \wedge y < y$. Por otra parte el hecho de que $x \wedge y < y$ y z e y no son comparables implica que $y \wedge z = y \wedge x$. Usando la ecuación (2.6) tenemos que

$$(x \vee y) \wedge z = z > x = x \vee (y \wedge x) = x \vee (y \wedge z),$$

lo cual contradice la ecuación (2.5) y por lo tanto concluimos que L es semimodular superior. El hecho de que L es semimodular inferior se obtiene usando el mismo argumento en el dual. \square

Observación 2.21. Nótese que la Proposición 2.20 implica que todo subretículo de un retículo modular es también modular.

Observación 2.22. Es un corolario de la Proposición 2.20 que todo retículo finito distributivo es también modular. En la figura 9 se muestra un ejemplo de un retículo que es semimodular pero no es modular.

Ejemplo 2.23. El álgebra de Boole \mathbb{B}_n es un ejemplo de un retículo modular ya que para todo par de conjuntos A y B se tiene que

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

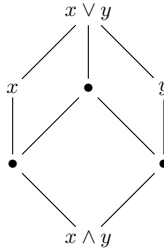


Figura 9. Retículo semimodular pero no modular.

Definición 2.24. En un poset P con $\hat{0}$ llamamos *átomo* a un elemento a que cubre al $\hat{0}$. Decimos que un retículo L es *atómico* si todo elemento $x \in L$ se puede expresar como una juntura $x = \bigvee_{a \in A'} a$ en donde A' es un conjunto de átomos. Un retículo atómico semimodular finito se conoce como un *retículo geométrico*.

Observación 2.25. La razón detrás del nombre retículo geométrico es que estos precisamente son los retículos de conjuntos cerrados de matroides simples (también conocidas como geometrías combinatorias).

Ejemplo 2.26. \mathbb{B}_n es atómico y modular así que también es geométrico.

Proposición 2.27. *Un retículo finito L es geométrico si y solo si satisface la siguiente condición:*

$$x \lessdot y \iff \exists a \succ \hat{0} \text{ tal que } y = x \vee a. \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.28. En Π_n un átomo es una partición en donde todos los bloques excepto uno son singuletes y el bloque que no es singulete contiene dos elementos. Para cada relación de cobertura $\pi \lessdot \pi'$ en Π_n podemos considerar los dos bloques $B_1, B_2 \in \pi$ que se combinan en un solo bloque en π' . Seleccionemos cualesquier elementos $x \in B_1$ y $y \in B_2$ y llamemos $a_{x,y}$ al átomo cuyo único bloque que no es singulete es $\{x, y\}$. Es fácil de chequear que $\pi' = \pi \vee a_{x,y}$. Entonces por la Proposición 2.27 concluimos que Π_n es geométrico. Nótese que esto en particular implica que Π_n es a la vez semimodular y atómico.

3. Álgebras de incidencia y la función de Möbius

3.1. Álgebras de incidencia

Sea \mathbf{k} un campo. En esta sección estaremos trabajando con espacios vectoriales con coeficientes en \mathbf{k} . Para un poset finito P denotaremos $\text{Int}(P)$ al conjunto de intervalos cerrados en P .

Definición 3.1. El álgebra de incidencia de P es la \mathbf{k} -álgebra $I(P)$ generada por todas las funciones

$$f : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbf{k},$$

con la operación de *convolución* definida para funciones $f, g \in I(P)$ por

$$f \star g([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} f([x, z])g([z, y]).$$

Proposición 3.2. $I(P)$ es un álgebra asociativa con unidad dada por la función $\epsilon : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbf{k}$ definida por

$$\epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La siguiente proposición nos describe cuales son los elementos invertibles de $I(P)$.

Proposición 3.3. Las siguientes condiciones son equivalentes para $f \in I(P)$:

1. f tiene una inversa por la derecha, o sea, existe $g \in I(P)$ tal que $f \star g = \epsilon$.
2. f tiene una inversa por la izquierda, o sea, existe $h \in I(P)$ tal que $h \star f = \epsilon$.
3. f tiene una inversa bilateral única.
4. $f([x, x]) \neq 0$ para todo $x \in P$.

Demostración. La ecuación $f \star g = \epsilon$ se lee como

$$f \star g([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} f([x, z])g([z, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si $x = y$ entonces tenemos que $f([x, x])g([x, x]) = 1$ y esta ecuación se satisface si y solo si $f([x, x]) \neq 0$. En este caso $g([x, x]) = f([x, x])^{-1}$. Si $x < y$ entonces tenemos

$$g([x, y]) = -f([x, x])^{-1} \sum_{x < z \leq y} f([x, z])g([z, y]),$$

y entonces $g([x, y])$ es definida recursivamente y existe si y solo si $f([x, x]) \neq 0$. El mismo argumento aplica con la ecuación $h \star f = \epsilon$. Entonces si se tiene la inversa por un lado se tiene la inversa por el otro y finalmente si tenemos que $f \star g = \epsilon$ y $h \star f = \epsilon$ entonces $h = h \star \epsilon = h \star f \star g = \epsilon \star g = g$. \square

3.2. Algunas funciones en $I(P)$

Definición 3.4. La *función zeta* ζ es la función en $I(P)$ definida para todo $x \leq y$ en P por $\zeta([x, y]) = 1$.

Ejemplo 3.5. Nótese que las potencias de ζ cuentan ciertos invariantes de P . Por ejemplo,

$$\zeta^{*2}([x, y]) := \zeta \star \zeta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta([x, z])\zeta([z, y]) = |\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}|.$$

Definición 3.6. Una *multicadena* de orden k en un poset P es una sucesión de la forma $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$ en donde $m_i \in P$ para todo i .

Proposición 3.7. Sea P un poset acotado finito, entonces

$$\zeta^{*k}(P) = |\{\hat{0} = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = \hat{1}\}|,$$

es decir, ζ^{*k} cuenta multicadenas de orden $k + 1$.

Si lo que queremos contar son cadenas en lugar de multicadenas podemos usar una función un poco modificada.

Proposición 3.8. Sea P un poset acotado, entonces

$$(\zeta - \epsilon)^{*k}(P) = |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \hat{1}\}|.$$

Demostración. Nótese que

$$(\zeta - \epsilon)([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

□

Proposición 3.9. Sea P un poset acotado, entonces

$$(2\epsilon - \zeta)^{-1}(P) = |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \hat{1} \mid \text{para algún } k \in \mathbb{N}\}|.$$

Demostración. Nótese que

$$(2\epsilon - \zeta)([x, y]) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

entonces $(2\epsilon - \zeta)$ es invertible y podemos expresar $(2\epsilon - \zeta)^{-1} = (\epsilon - (\zeta - \epsilon))^{-1}$. Ahora consideremos la función $\sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{*k}$ en donde $(\zeta - \epsilon)^0 = \epsilon$. Esta es una función válida en $I(P)$ ya que P es finito y entonces $(\zeta - \epsilon)^{*N} = 0$ para todo $N > \ell(P)$. Además tenemos que

$$(\epsilon - (\zeta - \epsilon)) \star \sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{\star k} = \epsilon,$$

o sea que

$$(2\epsilon - \zeta)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{\star k}.$$

Finalmente el resultado se concluye usando la Proposición 3.8. □

Nótese que $\zeta([x, x]) = 1$ para todo $x \in P$. Sabemos entonces por la Proposición 3.3 que ζ es invertible en $I(P)$.

Definición 3.10. La función de Möbius μ es la inversa de ζ , o sea $\mu := \zeta^{-1}$.

3.3. Calculando la función de Möbius

Proposición 3.11. La función de Möbius μ puede definirse recursivamente para un intervalo $[x, y]$ como

$$\mu([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu([x, z]) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Demostración. Como μ es la inversa de ζ , tenemos que $\mu \star \zeta = \epsilon$, lo que implica que

$$\mu \star \zeta([x, x]) = \mu([x, x])\zeta([x, x]) = \epsilon([x, x]) = 1,$$

o sea que $\mu([x, x]) = 1$. Y si $x < y$ entonces

$$\mu \star \zeta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu([x, z])\zeta([z, y]) = \epsilon([x, y]) = 0,$$

lo que implica la fórmula que buscamos. □

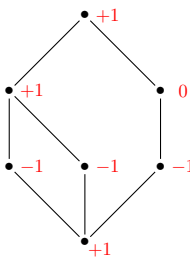


Figura 10. Valores $\mu(\hat{0}, x)$ de la función de Möbius.

Ejemplo 3.12. Sea \mathbf{n} la cadena con n elementos. Tenemos entonces

$$\mu(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Por inspección podemos calcular $\mu(\mathbf{1}) = 1$, $\mu(\mathbf{2}) = -1$ y $\mu(\mathbf{3}) = 0$. Ahora por inducción y usando la fórmula recursiva 3.1 tenemos que para $n \geq 3$

$$\mu(\mathbf{n}) = - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(\mathbf{k}) = -\mu(\mathbf{1}) - \mu(\mathbf{2}) = 0.$$

Proposición 3.13. Sean P y Q posets localmente finitos y $(x, y) \leq (x', y')$ en $P \times Q$ entonces

$$\mu([(x, y), (x', y')]) = \mu([x, x'])\mu([y, y']).$$

Demostración. Procederemos por inducción en $\ell([(x, y), (x', y')])$. Si $\ell([(x, y), (x', y')]) = 0$ entonces $x = x'$ y $y = y'$ y la conclusión es trivial. Ahora consideremos $\ell([(x, y), (x', y')]) \geq 1$ y obsérvese que todo intervalo cerrado $[(x, y), (x', y')]$ en $P \times Q$ es un producto de intervalos $[x, x'] \times [y, y']$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mu([(x, y), (x', y')]) &= - \sum_{(x,y) \leq (z,w) < (x',y')} \mu([(x, y), (z, w)]) \\ &= - \sum_{(x,y) \leq (z,w) < (x',y')} \mu([x, z])\mu([y, w]) \\ &= - \sum_{(x,y) \leq (z,w) \leq (x',y')} \mu([x, z])\mu([y, w]) + \mu([x, x'])\mu([y, y']) \\ &= - \sum_{x \leq z \leq x'} \mu([x, z]) \sum_{y \leq w \leq y'} \mu([y, w]) + \mu([x, x'])\mu([y, y']) \\ &= \mu([x, x'])\mu([y, y']). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.14. Como $\mathbb{B}_n \cong \mathbf{2}^n$ tenemos que

$$\mu(\mathbb{B}_n) = \mu(\mathbf{2}^n) = \mu(\mathbf{2})^n = (-1)^n.$$

De igual forma si $A \subseteq B$ en \mathbb{B}_n , es fácil verificar que $[A, B] \cong \mathbb{B}_{B \setminus A}$, así que

$$\mu([A, B]) = \mu(\mathbb{B}_{B \setminus A}) = (-1)^{|B| - |A|}.$$

La estructura adicional de un retículo facilita la siguiente fórmula recursiva de Weisner para calcular los valores de la función de Möbius.

Teorema 3.15 (Teorema de Weisner). *Para todo $x \leq w < y$ en un retículo L tenemos que*

$$\sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ w \wedge z = x}} \mu([z, y]) = 0. \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.16. En Π_n escojamos w como el coátomo $12 \cdots (n-1)|n$. Nótese que los valores de $z \in \Pi_n$ tales que $w \wedge z = \hat{0}$ son $z = \hat{0}$ o elementos de la forma $z = 1|2|\cdots|\hat{i}|\cdots|(n-1)|in$, para los cuales se verifica que $[z, \hat{1}] \cong \Pi_{n-1}$. Usando el Teorema de Weisner tenemos entonces que

$$\mu(\Pi_n) + (n-1)\mu(\Pi_{n-1}) = 0.$$

Resolviendo ésta ecuación en diferencias tenemos que $\mu(\Pi_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

3.4. La fórmula de inversión de Möbius

Proposición 3.17 (La fórmula de inversión de Möbius). *Sea P un poset en el cuál para todo $x \in P$ tenemos que $|I(x)| < \infty$ y sean $f, g : P \rightarrow \mathbf{k}$ un par de funciones en P . Las siguientes dos aserciones son equivalentes:*

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \quad \forall y \in P \quad (3.3)$$

$$f(y) = \sum_{x \leq y} g(x)\mu([x, y]) \quad \forall y \in P. \quad (3.4)$$

Demostración. El espacio vectorial \mathbf{k}^P formado por las funciones $f : P \rightarrow \mathbf{k}$ tiene una acción por la derecha del álgebra de incidencia $I(P)$ dada por

$$f\xi(y) = \sum_{x \leq y} f(x)\xi([x, y]) \text{ para todo } f \in \mathbf{k}^P \text{ y para todo } \xi \in I(P).$$

Entonces la ecuación (3.3) se lee en este lenguaje como $g = f\xi$ y entonces como $\zeta^{-1} = \mu$ tenemos que $f = g\mu$ que es la ecuación (3.4). \square

Proposición 3.18 (Forma dual del teorema de inversión de Möbius). *Sea P un poset en el cuál para todo $x \in P$ tenemos que $|I(x)| < \infty$ y sean $f, g : P \rightarrow \mathbf{k}$ un par de funciones en P . Las siguientes dos aserciones son equivalentes:*

$$g(y) = \sum_{x \geq y} f(x) \quad \forall y \in P \quad (3.5)$$

$$f(y) = \sum_{x \geq y} \mu([y, x])g(x) \quad \forall y \in P. \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.19. (a) En la cadena \mathbf{n} el teorema de inversión de Möbius es una versión discreta del Teorema Fundamental del Cálculo. Las siguientes dos aserciones son equivalentes:

$$g(n) = \sum_{k=0}^n f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

$$f(n) = g(n) - g(n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

(b) En el álgebra de Boole \mathbb{B}_n el teorema de inversión de Möbius es conocido como el Principio de Inclusión-Exclusión. Las siguientes dos aserciones son equivalentes:

$$g(A) = \sum_{B \subseteq A} f(B) \quad \forall A \subseteq [n] \quad (3.9)$$

$$f(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} g(B) \quad \forall A \subseteq [n]. \quad (3.10)$$

(c) Si en el álgebra de Boole las funciones $g(A)$ y $f(A)$ solamente dependen de la cardinalidad del conjunto A entonces obtenemos un teorema de inversión conocido como Teorema de Inversión Binomial. Las siguientes dos aserciones son equivalentes:

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{P} := \{1, 2, \dots\} \quad (3.11)$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g(k) \quad \forall n \in \mathbb{P}. \quad (3.12)$$

(d) En el retículo de divisibilidad D_n el teorema de inversión de Möbius es un teorema clásico en la teoría de números. Las siguientes dos aserciones son equivalentes:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \forall n \in \mathbb{P} \quad (3.13)$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \quad \forall n \in \mathbb{P}, \quad (3.14)$$

en donde $\mu(n)$ es la función de Möbius clásica de teoría de números dada por:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.20. Dado un alfabeto A de tamaño $|A| = m$, Una *palabra circular* de longitud n es una clase de equivalencia de *palabras lineales* $w = w_1 w_2 \dots w_n$ bajo la acción de la operación de desplazamiento o shift $\tau w = w_n w_1 w_2 \dots w_{n-1}$. Una palabra circular es llamada *primitiva* si su clase de equivalencia contiene exactamente n palabras lineales distintas. Denotemos por $a(n)$ al número de palabras circulares primitivas de longitud n y $b(n)$ al número de todas las palabras circulares de longitud n (primitivas y no primitivas).

Nuestro objetivo será encontrar una fórmula para determinar el número de palabras circulares $b(n)$. Nótese que una palabra circular es primitiva si y solo si no es una potencia de otra palabra así que tenemos la relación

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Nótese también que hay c palabras lineales distintas en la clase de equivalencia de una palabra circular w de longitud $\ell(w) = d$ de la forma $w = u^{\frac{d}{c}}$ en donde u es una palabra circular primitiva de longitud $\ell(u) = c$. Así que contando todas las palabras lineales de longitud d tenemos

$$m^d = \sum_{c|d} c a(c).$$

El teorema de inversión de Möbius nos dice que

$$da(d) = \sum_{c|d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) m^c.$$

Entonces concluimos que

$$b(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{c|d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) m^c.$$

4. Topología de posets

Definición 4.1. Un *complejo simplicial* $\Delta \subset 2^{[n]}$ en $[n]$ es una clase de subconjuntos de $[n]$ tal que si $F \in \Delta$ y $F' \subseteq F$ entonces $F' \in \Delta$. A cada $F \in \Delta$ lo llamamos una *cara* y a las caras máximas por inclusión las llamamos *carotas* o *caras maximales*. Definimos $\dim F = |F| - 1$ y $\dim \Delta = \max_{F \in \Delta} \dim F$. Existe un único complejo simplicial de dimensión -1 ($\Delta = \{\emptyset\}$).

Definición 4.2. Para un poset finito P definimos su *complejo de orden* $\Delta(P)$ como el complejo simplicial cuyas caras son las cadenas de P .

Definición 4.3. Para un poset acotado P denotamos $\bar{P} := P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$. De una manera similar denotamos $\hat{P} := P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ al poset P luego de añadirle elementos mínimos y máximos únicos.

Ejemplo 4.4. Sea $P = \mathbf{3}$, la cadena con tres elementos en $[3]$, entonces $\Delta(P) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 1 < 2, 1 < 3, 2 < 3, 1 < 2 < 3\}$. En las figuras 11 y 12 se ilustran los complejos de orden de dos subposets de \mathbb{B}_3 .

Definición 4.5. Dado un complejo simplicial Δ sea f_i el número de caras de dimensión i . Definimos la *característica de Euler reducida* de Δ como:

$$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^i f_i.$$

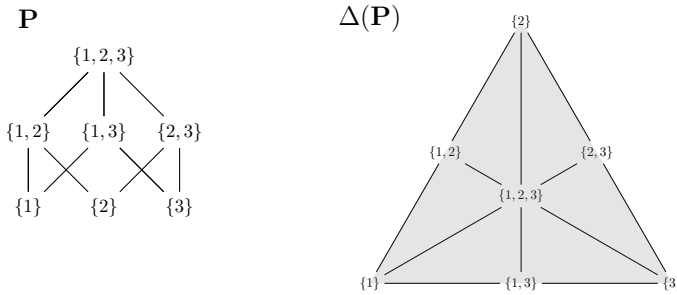


Figura 11. Complejo de orden de $\mathbb{B}_3 \setminus \{\hat{0}\}$.

Ejemplo 4.6. Para el complejo de orden de la figura 12 tenemos que

$$\tilde{\chi}(\Delta(\overline{\mathbb{B}}_3)) = -f_{-1} + f_0 - f_1 = -1 + 6 - 6 = -1.$$

Teorema 4.7 (Teorema de Philip Hall). *Sea P un poset finito y acotado tal que $\ell(P) \geq 1$. Entonces,*

$$\mu(P) = \tilde{\chi}(\Delta(\overline{P})).$$

Teorema 4.8 (Teorema de Philip Hall versión 2). *Sea P un poset finito. Entonces,*

$$\mu(\hat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)).$$

Demostración. Tenemos que $\mu = \zeta^{-1} = (\epsilon + (\zeta - \epsilon))^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(\hat{P}) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (\zeta - \epsilon)^{*k}(\hat{P}) \\ &= 2\epsilon(\hat{P}) - 1 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \hat{1}\}| \\ &= -1 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k f_{k-2}(\Delta(P)) \\ &= \sum_{k \geq -1} (-1)^k f_k(\Delta(P)) \\ &= \tilde{\chi}(\Delta(P)). \end{aligned}$$

□

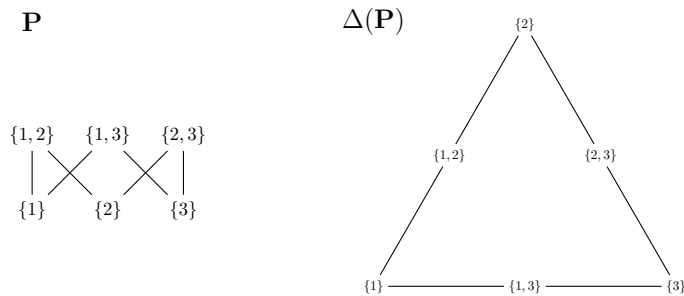


Figura 12. Complejo de orden de $\overline{\mathbb{B}}_3$.

5. Agradecimientos

Los autores de estas notas de clase se sienten muy agradecidos con el revisor anónimo por las múltiples sugerencias que ayudaron a mejorar la calidad del documento tanto en su forma como en su contenido.

6. Ejercicios

Ejercicios sesión número 1

1. Dibuje todos los posets sin etiquetas (clases de isomorfismo) que hay en un conjunto de uno, dos, tres o cuatro elementos. ¿Cuántos posets diferentes hay en los conjuntos $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$?
2. Verifique que el conjunto Π_n de particiones del conjunto $[n]$ junto con la relación de refinamiento forman un conjunto parcialmente ordenado. Describa las relaciones de cobertura.
3. Sea G un grafo conexo con n vértices y sea Π_G el subposet inducido de Π_n formado por el conjunto de particiones $\pi \in \Pi_n$ con la propiedad de que para cada bloque $B \in \pi$, el subgrafo inducido $G|_B$ es conexo. Muestre que cuando $G = T$ es un árbol (un grafo conexo sin loops ni ciclos) $\Pi_T \cong \mathbb{B}_{n-1}$, o sea Π_T es un poset isomorfo al álgebra de Boole \mathbb{B}_{n-1} .
4. Verifique que si $f : P \rightarrow Q$ y $g : Q \rightarrow R$ son funciones monótonas entonces $g \circ f : P \rightarrow R$ también lo es.
5. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \rightarrow Q$ que no sea un isomorfismo de posets. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \rightarrow P$ que no sea un automorfismo de posets. ¿Qué condición tiene que cumplir P en este caso?
6. Dé un ejemplo de un poset finito que no sea graduado.
7. Demuestre la siguiente proposición:

Proposición Si P es un poset finito graduado entonces existe una función bien definida $\rho : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $\rho(x) = 0$ siempre que $x \in \text{Min}(P)$ y si $x < y$ entonces $\rho(y) = \rho(x) + 1$.

8. Encuentre una fórmula en términos de productos de polinomios para la función generadora por grados del álgebra de Boole $F(\mathbb{B}_n, t)$.

Ejercicios sesión número 2

- Dé un ejemplo concreto (utilizando diagramas de Hasse) de cada una de las operaciones $P + Q$, $P \oplus Q$, $P \times Q$, $P \otimes Q$ y Q^P . ¿Cuales de estas operaciones son simétricas, o sea, $P \otimes Q \cong Q \otimes P$?
- Muestre que $\mathbb{B}_n \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \cdots \times \mathbf{2} = \mathbf{2}^n$. Calcule $F(\mathbb{B}_n, t)$ usando esta relación y la conclusión del ejercicio 7.
- ¿Cuáles de los posets en uno, dos, tres, cuatro o cinco elementos son retículos?
- Determine la estructura de $J(P)$ cuando P es una cadena, una anticadena o la suma directa de cadenas.
- Muestre que Π_n es un retículo. Describa para un par de particiones $\pi, \pi' \in \Pi_n$ su concurrencia $\pi \wedge \pi'$ y su juntura $\pi \vee \pi'$.
- Muestre que en todo retículo, las operaciones \vee y \wedge cumplen con las *leyes de absorción* $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$.

Ejercicios adicionales

- Muestre que $F(P \times Q, t) = F(P, t)F(Q, t)$.
- Sea n un entero positivo con descomposición en primos $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. Muestre que $D_n \cong \mathbf{n}_1 + \mathbf{1} \times \mathbf{n}_2 + \mathbf{1} \times \cdots \times \mathbf{n}_k + \mathbf{1}$. Encuentre $F(D_n, t)$ usando esta relación.
- Muestre que las operaciones fundamentales entre posets satisfacen las siguientes relaciones:
 - $P \times (Q + R) \cong (P \times Q) + (P \times R)$.
 - $P^{Q+R} \cong P^Q \times P^R$.
 - $(P^Q)^R \cong P^{Q \times R}$.
- Muestre que $J(P + Q) \cong J(P) \times J(Q)$.
- Muestre que en un retículo L las operaciones \vee y \wedge son asociativas (así expresiones como $x \wedge y \wedge z$ tienen sentido), conmutativas e idempotentes ($x \vee x = x$).
- Verifique que si L y M son retículos entonces también lo son L^* , $L \times M$, $L \oplus M$ y $\widehat{L + M}$, en donde $\widehat{L + M} := \{\hat{0}\} \oplus (L + M) \oplus \{\hat{1}\}$.

Ejercicios sesión número 3

- Calcule los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para \mathbb{B}_3 y Π_3 .
- Calcule varios ejemplos de los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para D_n . Conjeture y pruebe una fórmula para $\mu(D_n)$. Sugerencia: Use el siguiente hecho demostrado en la sesión 2

Sea n un entero positivo con descomposición en primos $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. Entonces es un producto de cadenas $D_n \cong \mathbf{n}_1 + \mathbf{1} \times \mathbf{n}_2 + \mathbf{1} \times \cdots \times \mathbf{n}_k + \mathbf{1}$.

3. Utilice las *leyes de absorción* $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$ que se cumplen en todo retículo para mostrar que un retículo satisface la ley distributiva (D1) si y solo si satisface la ley distributiva (D2).

$$(D1) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ para todo } x, y, z \in L.$$

$$(D2) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ para todo } x, y, z \in L.$$

4. Sea P un poset. Muestre que existe una colección \mathcal{C} de conjuntos que si los ordenamos por inclusión, o sea $A \leq B$ siempre que $A \subseteq B$, tenemos que $P \cong \mathcal{C}$.

Ejercicios sesión número 4

1. Utilice la fórmula de Weisner para calcular los valores de la función de Möbius en \mathbb{B}_n .
2. Sean ζ la función en $I(P)$ definida para todo $x \leq y$ en P por $\zeta([x, y]) = 1$ y ϵ la función en $I(P)$ definida por

$$\epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x < y. \end{cases}$$

Encuentre una fórmula para los valores de $(2\epsilon - \zeta)^2([x, y])$ cuando $\ell([x, y]) = 1$, $\ell([x, y]) = 2$ y $\ell([x, y]) \geq 3$.

3. ¿Es la función

$$(\zeta - \epsilon)([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

invertible en $I(P)$? ¿Por qué?

4. a) Demuestre la siguiente fórmula recursiva alternativa para calcular la función de Möbius:

Proposición (*Definición dual recursiva de la función de Möbius*) La función de Möbius μ puede definirse recursivamente para un intervalo $[x, y]$ como

$$\mu([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x < z \leq y} \mu([z, y]) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sugerencia: recuerde que μ es la función definida como la inversa de ζ , es decir, satisface $\zeta \star \mu = \epsilon$ y $\mu \star \zeta = \epsilon$.

- b) Utilice la fórmula alternativa de la primera parte para calcular $\mu(\mathbb{B}_4)$ y $\mu(\Pi_4)$. ¿Son estos valores los mismos que si hubiéramos calculado μ con la definición recursiva original?
- c) Utilice lo observado en las dos partes anteriores para concluir que para todo poset finito acotado P (recuerde que acotado significa que P tiene un elemento base $\hat{0}$ y un elemento tope $\hat{1}$, es decir, P es el intervalo cerrado $[\hat{0}, \hat{1}]$)

$$\mu(P) = \mu(P^*).$$

Sugerencia: Haga uso de las dos definiciones recursivas de μ .

Ejercicios sesión número 5

1. Determine cuál es el complejo de orden $\Delta(\mathbf{n})$ de la cadena con n elementos. Calcule la característica reducida de Euler $\tilde{\chi}(\Delta(\mathbf{n}))$ utilizando el Teorema de Philip Hall.
2. Un desarreglo es una permutación de $[n]$ (una biyección $\sigma : [n] \rightarrow [n]$) que no contiene puntos fijos, es decir puntos tal que $\sigma(i) = i$. Teniendo en cuenta que hay $n!$ permutaciones de $[n]$, demuestre que el número $d(n)$ de desarreglos de $[n]$ puede ser calculado con la fórmula

$$n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(Sugerencia: Utilice el teorema de inversión binomial y la fórmula $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$)

3. Para un complejo simplicial Γ definimos su *subdivisión baricéntrica* por $\Delta(L(\Gamma) \setminus \emptyset)$, en donde $L(\Gamma) \setminus \emptyset$ es el poset formado por las caras no vacías de Γ ordenadas por inclusión.
 - a) Determine cual es la subdivisión baricéntrica del simplex Δ_2 de dimensión 2 (Dibuje el complejo simplicial resultante).
 - b) Calcule la característica de Euler de Δ_2 .
 - c) Calcule la característica de Euler de $\Delta(L(\Delta_2) \setminus \emptyset)$ usando la función de Möbius. (Sugerencia: agregue un $\hat{0}$ y un $\hat{1}$ a $L(\Delta_2) \setminus \emptyset$ y utilice el Teorema de Philip Hall.)
 - d) ¿Qué conclusión podemos conjeturar de las partes (b) y (c)?

Referencias

- [1] F. Ardila, *Algebraic and geometric methods in enumerative combinatorics*, Handbook of enumerative combinatorics (2015), 3–172.
- [2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, vol. 25, American Mathematical Soc., 1940.
- [3] G. Grätzer, *Lattice theory: foundation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [4] S. Roman, *Lattices and ordered sets*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [5] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Volume 1*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [6] R. P. Stanley, *Algebraic combinatorics*, Springer **20** (2013), 22.
- [7] W. T. Trotter, *Combinatorics and partially ordered sets: Dimension theory*, vol. 6, JHU Press, 1992.

- [8] M. L. Wachs, *Poset topology: tools and applications*, Geometric combinatorics, IAS/Park City Math. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 497–615.

Recibido en enero 25 de 2018. Aceptado para publicación en octubre 4 de 2019.

JHON BLADIMIR CAICEDO
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍA
UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: jhonb9025@gmail.com

RAFAEL S. GONZÁLEZ D'LEÓN
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍA
UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: rafael.gonzalezl@usa.edu.co