

Subgrupos clon del grupo de Thompson F

Subgroups Clone of Thompson Group F

GABRIEL VERGARA^{1,a,✉}, OLGA SALAZAR^{2,a}

¹Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

²Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia

RESUMEN. En este artículo estudiaremos algunos subgrupos clon del grupo de Thompson F , los cuales si bien son isomorfos a F , probaremos que están embebidos cuasi-isométricamente en F . Estos subgrupos tienen una gran importancia desde el punto de vista de la teoría geométrica de grupos, pues a partir de estos podemos construir una familia de subgrupos de la forma $F^n \times \mathbb{Z}^m$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq 0$, embebidos cuasi-isométricamente en F .

Palabras y frases clave. Grupo de Thompson F , embebimientos cuasi-isométricos, subgrupos clon.

2010 Mathematics Subject Classification. 20F65, 05C25.

ABSTRACT. In this article we will study some subgroups clone of the Group F , although they are isomorphic to F , we will prove that they are quasi-isometrically embedded in F . These subgroups are of great importance from the point of view of geometric group theory, because from these we can build a family of subgroups of the form $F^n \times \mathbb{Z}^m$ where $n \in \mathbb{Z}^+$ and $m \geq 0$, quasi-isometrically embedded in F .

Key words and phrases. Thompson group F , quasi-isometric embeddings, subgroups clone.

1. Introducción

Los grupos de Thompson F , T y V fueron introducidos por R. Thompson en 1965, siendo T y V los primeros ejemplos de grupos infinitos finitamente presentados y simples. Actualmente son la base de muchas preguntas de la

^aUniversidad del Atlántico, Universidad Nacional.

teoría geométrica de grupos, pues son considerados los casos de verificación de muchas conjeturas, o son instrumentos para medir el buen entendimiento de una cierta propiedad.

El objetivo principal de este artículo es probar que todo subgrupo clon de F es isomorfo a F , prueba que haremos usando un direccionamiento binario; es decir en términos de diagramas de árboles binarios. Además probaremos que todo subgrupo clon está embebido cuasi-isométricamente en F . Estos subgrupos tienen una gran importancia desde el punto de vista de la teoría geométrica de grupos, pues a partir de ellos podemos construir una familia de subgrupos de la forma $F^n \times \mathbb{Z}^m$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq 0$, embebidos cuasi-isométricamente en F , trabajo iniciado en [1] por Burillo y en [4] por Jennifer Taback y Sean Cleary.

2. Preliminares

En esta sección definimos los conceptos de embebimiento cuasi-isométrico, cuasi-isometría, diagrama de árboles y forma normal de un elemento en F , subgrupo clon de F , función desplazamiento φ y la función desplazamiento reversa ψ . Posteriormente enunciamos el importante hecho de que la relación “ser cuasi-isométrico a”, es una relación de equivalencia, y algunos resultados que servirán de soporte para las pruebas de los hechos mencionados en la introducción.

Definición 2.1. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Dadas constantes $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$, se dice que una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un (λ, ε) **embebimiento cuasi-isométrico** si para todo $x, y \in X_1$

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \varepsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \varepsilon.$$

Además si existe una constante $C \geq 0$ con la propiedad de que para todo $x_2 \in X_2$ existe $x_1 \in X_1$ tal que $d_2(f(x_1), x_2) < C$, f se dice una (λ, ε) **cuasi-isometría** y X_1 **se dice cuasi-isométrico a** X_2 . Escribiremos X_1 C-I a X_2 .

Lema 2.2. *La relación “ser C-I a”, es una relación de equivalencia.*

Demostración. Ver [5]. □

Definición 2.3. Sea F el conjunto de todos los homeomorfismos lineales por tramos del intervalo unidad $[0, 1]$ en sí mismo, que son diferenciables excepto en un número finito de racionales de la forma $\frac{a}{2^n}$, $a, n \in \mathbb{N}$ (los cuales llamaremos racionales diádicos) y tales que, en sus intervalos de diferenciabilidad, su derivada es una potencia de 2. El conjunto F con la operación composición de funciones es un grupo, que llamaremos **el grupo de Thompson F** .

Nota 1. Una forma de describir geoméricamente los elementos de F es mediante diagramas de árboles (ver [2]), los cuales a su vez nos permiten efectuar operaciones entre los elementos de F , describir algunos homomorfismos de F como lo son la función desplazamiento ϕ , la función desplazamiento reversa ψ y algunos subgrupos clon del grupo F .

Definición 2.4. Definimos un **intervalo diádico estándar IDE** en $[0, 1]$ como un intervalo de la forma $[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}]$, donde $a, n \in \mathbb{N}$ y $a \leq 2^n - 1$.

Lema 2.5. Sea $f \in F$. Entonces, existe una **partición diádica estándar (PDE)** $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ tal que f es lineal en todo intervalo de la partición y $0 = f(x_0) < f(x_1) < \dots < f(x_n) = 1$ es una PDE.

Demostración. Ver [2]. ✓

Definición 2.6. Un **diagrama de árboles** es un par ordenado (T_-, T_+) de árboles binarios tales que T_- y T_+ tienen el mismo número de hojas. El árbol T_- es llamado el dominio o árbol izquierdo del diagrama, y a T_+ se le llama el rango o árbol derecho del diagrama.

Nota 2. Una **careta** es un árbol binario con dos hojas.

Observación 2.7.

- Se puede construir un árbol binario T usando una **partición diádica** de $[0, 1]$, como sigue. Los vértices de T son los **IDE** de $[0, 1]$, un **borde** es un par (I, J) de **IDE's** I, J tales que o I es la mitad izquierda de J , en cuyo caso (I, J) es un borde izquierdo, o I es la mitad izquierda de J , en cuyo caso (I, J) es un borde derecho. Para una ilustración gráfica de este hecho (ver [2]).
- Suponga $f \in F$. Por el lema anterior, existen PDE's P y Q , tales que f es lineal en cada intervalo de P y los envía a los intervalos de Q . Al elemento f se le asocia el diagrama de árboles (T_-, T_+) , donde T_- es un árbol correspondiente a P y T_+ es el árbol correspondiente a Q .
- Dado un diagrama de árboles (T_-, T_+) para f , se puede obtener otro diagrama para f adjuntando caretas a T_- y T_+ como sigue:

Sea I la n -ésima hoja de T_- , para algún entero positivo n , y J la n -ésima hoja de T_+ . Sean I_1, I_2 las 2 hojas de la careta C con raíz en I y J_1, J_2 las hojas de la careta D con raíz en J .

Como f es lineal en I , lo es en I_1 y en I_2 ; además, como $f(I) = J$, entonces $f(I_1) = J_1$ y $f(I_2) = J_2$. Así, claramente, (T'_-, T'_+) donde $T'_- = T_- \cup C$ y $T'_+ = T_+ \cup D$ es un diagrama de árboles para f .

- Recíprocamente, si existe un entero positivo n tal que la n -ésima y $(n + 1)$ -ésima hojas de T_- , respectivamente T_+ , son los vértices de una careta C , respectivamente D , con raíces I_C, J_D respectivamente, se puede ver fácilmente, que las pendientes de f en las hojas de C , son las mismas; así, f envía I_C linealmente a J_D . Es decir, el diagrama (T'_-, T'_+) donde $T'_- = T_- - C, T'_+ = T_+ - D$ es un diagrama para f .
- Decimos que un diagrama de árboles (T_-, T_+) para una función f es **reducido**, si no se le pueden quitar caretas como en el ítem anterior, obteniendo un diagrama equivalente para f .
- Si (T_-, T_+) es un diagrama de árboles reducido para f , este es único.
- De ahora en adelante, cuando nos refiramos al diagrama de árboles (T_-, T_+) correspondiente a $f \in F$, nos referimos a su diagrama de árboles reducido y escribiremos $f = (T_-, T_+)$.
- La multiplicación en F de $f = (T_-, T_+)$ y $g = (S_-, S_+)$ se establece generando diagramas representativos (T'_-, T'_+) de f y (S'_-, S'_+) de g , tales que $T'_+ = S'_-$; luego fg es definido por la versión reducida de (T'_-, S'_+) .

Ejemplo 2.8. A través de este ejemplo mostramos cómo visualizar las funciones de F mediante diagramas de árboles.

Sean

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x - \frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad y \quad B(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ x - \frac{1}{8}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8}; \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Los diagramas de árboles para las funciones A, B definidas previamente, son:

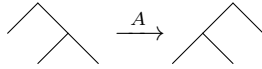


FIGURA 1. Diagrama de árboles para la función $A \in F$.

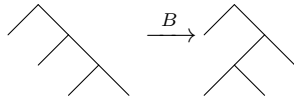


FIGURA 2. Diagrama de árboles para la función $B \in F$.

Teorema 2.9. *Sea f una función de $[0, 1]$ en sí mismo. Entonces, $f \in F$ si y sólo si existe un diagrama reducido (T_-, T_+) para f .*

Demostración. Ver [2]. ✓

Definición 2.10. El exponente de una hoja numerada n en T_- o T_+ , es definido como la longitud del camino maximal consistente sólo de bordes izquierdos, iniciando en n y que no toca el lado derecho del árbol. Lo denotaremos por $E(n)$. Nótese que $E(n) = 0$ para una hoja marcada n que sea una hoja derecha de una careta, pues no existe un camino consistente sólo de bordes izquierdos iniciando en n .

Nota 3. En lo que sigue de este trabajo, $x_0 = A$ y $x_n = A^{(1-n)}BA^{n-1}$, para $n \geq 1$.

Ejemplo 2.11. Sea $w = x_0^2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}$. Entonces su diagrama de árboles asociado es

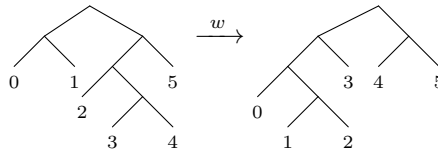


FIGURA 3. Diagrama de árboles para la función w del ejemplo 2.11.

Si numeramos las hojas del árbol izquierdo T_- , por $0, 1, 2, 3, 4, 5$, entonces los exponentes correspondientes son $E(0) = 1, E(1) = 0, E(2) = 1, E(3) = 1, E(4) = 0$ y $E(5) = 0$.

El siguiente lema muestra como calcular **la forma normal** de un elemento $w = (T_-, T_+) \in F$ una vez conocidos los exponentes de las hojas en T_- y en T_+ .

Lema 2.12. *Sea $w = (T_-, T_+) \in F$ y sea m el número de hojas de T_- (que es el mismo número de hojas de T_+). Entonces la **la parte positiva** de la forma normal de w es $x_0^{E(0)}x_1^{E(1)} \dots x_m^{E(m)}$, donde los exponentes son obtenidos de las hojas de T_+ . **La parte negativa** de la forma normal de w es $x_m^{-a_m}x_{m-1}^{-a_{m-1}} \dots x_1^{-a_1}x_0^{-a_0}$, donde los exponentes son obtenidos de las hojas de T_- . Más aún, **La forma normal** de w es*

$$x_0^{E(0)}x_1^{E(1)} \dots x_m^{E(m)}x_m^{-a_m}x_{m-1}^{-a_{m-1}} \dots x_1^{-a_1}x_0^{-a_0}$$

Demostración. Ver [2]. ✓

Lema 2.13. *El grupo F de Thompson es generado por A y B .*

Demostración. Ver [2]. ✓

El grupo F tiene varias presentaciones, pero en este artículo solo usaremos el siguiente par de presentaciones isomorfas:

$$F = \langle x_0, x_1 : [x_0x_1^{-1}, x_0^{-1}x_1x_0], [x_0x_1^{-1}, x_0^{-2}x_1x_0^2] \rangle$$

y

$$F = \langle x_k, k \geq 0 : x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1}, \text{ si } i < j \rangle.$$

Teorema 2.14. Sea $w = (T_-, T_+)$ y sea $N(w)$ el número de caretas en T_- . Entonces $N(w) - 2 \leq |w| \leq 4N(w) - 4$.

Demostración. Ver [4]. ✓

Para hablar de subgrupos clon y de embebimientos cuasi-isométricos en F , requerimos de un par de funciones definidas en F ; ellas son la función desplazamiento y la función desplazamiento reversa, que definiremos a continuación.

Definición 2.15. Existe un homomorfismo $\phi : F \rightarrow F$, llamado **función desplazamiento** definida sobre el grupo F respecto a la presentación infinita $F = \langle x_k, k \geq 0 : x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1}, \text{ si } i < j \rangle$, la cual aumenta el índice de cada generador en 1; es decir $\phi(x_k) = x_{k+1}$, para todo $k \geq 0$.

Por ejemplo, si $w = x_3^2x_5x_{13}x_{10}^{-1}x_9^{-4}$, entonces $\phi(w) = x_4^2x_6x_{14}x_{11}^{-1}x_{10}^{-4}$; así, si w está en su forma normal, también lo estará $\phi(w)$. El aumento del índice de cada generador en 1 se puede evidenciar gráficamente notando que si (T_-, T_+) es el diagrama de par de árboles (reducido) del elemento $w \in F$, y si (S_-, S_+) es el diagrama de par de árboles de $\phi(w) \in F$, entonces S_- y S_+ se obtienen pegando T_- y T_+ (respectivamente) en las hojas derechas de una careta C .

La función desplazamiento reversa $\psi : F \rightarrow F$, actúa de la siguiente manera: si $w = (T_-, T_+) \in F$, $\psi(w) = (S_-, S_+)$, donde S_- y S_+ se obtienen pegando T_- y T_+ en las hojas izquierdas de una careta C .

Definición 2.16. Sea $p = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$, donde cada f_i es o ϕ o ψ . Un **subgrupo clon** de F es la imagen de F bajo p , es decir $p(F)$.

Ejemplo 2.17. Si en la definición anterior, $f_i = \phi$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, encontramos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $\phi^n(F)$ es un subgrupo clon de F . Análogamente, si en la misma definición, $f_i = \psi$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, encontramos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $\psi^n(F)$ es un subgrupo clon de F .

Podemos dar una descripción geométrica de un subgrupo clon, usando una marcación binaria. A un nodo en un árbol binario le damos una marca, utilizando el siguiente método inductivo: Al nodo raíz no le asignamos marca (diremos que tiene la marca vacía) y dado un nodo marcado s , el hijo izquierdo de este nodo tendrá la marca $s0$ y el hijo derecho del nodo tendrá la marca $s1$. Por ejemplo, el hijo derecho del hijo derecho del hijo izquierdo del hijo derecho del nodo raíz, tendrá la marca 1011. De otra parte, dado p como en la definición anterior y $w = (T_-, T_+) \in F$, sea $p(w) = (S_-, S_+)$. De las definiciones de ϕ , ψ y p , es claro que los árboles T_- y T_+ son subárboles de S_- y de S_+ respectivamente. Ahora si $s = \epsilon_n \cdots \epsilon_2 \epsilon_1$ es la marca de la careta raíz de T_- como subárbol de S_- , usaremos s para dar un direccionamiento binario para el subgrupo clon $p(F)$; mas precisamente, escribiremos $C_s = p(F)$. Por ejemplo, el subgrupo clon C_{1011} es la imagen $p(F) = \phi(\psi(\phi^2(F)))$.

3. Resultados

Teorema 3.1. *Cualquier subgrupo clon $C_s = p(F)$ es isomorfo a F .*

Demostración. Sea $\varphi : F \rightarrow C_s$, definida para todo $w \in F$ por $\varphi(w) = p(w)$. Respecto a φ podemos afirmar que:

- i) Claramente φ es un homomorfismo, pues $p = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ donde f_i es ϕ o ψ y tanto ϕ como ψ son homomorfismos.
- ii) φ es inyectiva: de la descripción geométrica tanto de ϕ como de ψ es claro que ambos homomorfismos son inyectivos, por lo que φ es inyectiva.
- iii) φ es sobre: dado $u \in C_s = p(F)$, $u = p(w)$ con $w \in F$; es decir, $u = \varphi(w)$ con $w \in F$. Por tanto φ es sobre.

De i), ii) y iii) se sigue que φ es un isomorfismo. En consecuencia, $C_s := p(F) \cong F$. ✓

Teorema 3.2. *Cualquier subgrupo clon de F es un embebimiento cuasi-isométrico.*

Demostración. Sea $C_s := p(F)$, donde $p = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ (donde $f_i = \phi$ ó $f_i = \psi$), un subgrupo clon de F . De la definición de C_s es claro que C_s está completamente determinado por p ; además, como ϕ y ψ son embebimientos cuasi-isométricos y la composición de embebimientos cuasi-isométricos es un embebimiento cuasi-isométrico, entonces $p(F) : F \rightarrow F$ es un embebimiento cuasi-isométrico. Por tanto C_s es un embebimiento cuasi-isométrico. ✓

Proposición 3.3. *El subgrupo $F \times \mathbb{Z}$ generado por $x_0 x_1^{-1}$, x_2 y x_3 está cuasi-isométricamente embebido en F .*

Demostración. Ver [1].

✓

Teorema 3.4. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $\phi^n : F \rightarrow F$ y $\psi^n : F \rightarrow F$ son embebimientos cuasi-isométricos; es decir para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $\phi^n(F)$, $\psi^n(F)$ están embebidos cuasi-isométricamente en F .

Demostración. Ver [3].

✓

Proposición 3.5. Si R, S, T y W son espacios métricos tales que R está C-I embebido en S y T está C-I embebido en W , entonces $R \times T$ está C-I embebido en $S \times W$.

Demostración. Ver [3]

✓

Corolario 3.6. Si X, Y son espacios métricos tales que X está C-I embebido en F y Y está C-I embebido en F , entonces $X \times Y$ está C-I embebido en $F \times F$.

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata de la proposición anterior, tomando $S = W = F$.

✓

Proposición 3.7. $F \times F := F^2$ está C-I embebido en F .

Demostración. Ver [3]

✓

Teorema 3.8. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está embebido cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F .

Demostración. Por la proposición 3.3, $F \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en F y como \mathbb{Z} está C-I embebido en \mathbb{Z} , entonces por el corolario 3.6, $(F \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en $F \times \mathbb{Z}$ y como $F \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en F y la relación “estar C-I embebido en”, es una relación de equivalencia, entonces $F \times \mathbb{Z}^2$ está C-I embebido en F . Análogamente, $F \times \mathbb{Z}^3$ está C-I embebido en F . Procediendo de manera inductiva sobre m , llegamos a que para todo $m \geq 0$, $F \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F .

De otra parte, como $F \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F y $F \times F$ está C-I embebido en F , utilizando nuevamente el corolario 3.6 y el hecho que la relación “estar C-I embebido en” es una relación de equivalencia, se tiene que $F \times (F \times \mathbb{Z}^m)$ está C-I embebido en F , es decir $F^2 \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F . Procediendo de manera inductiva sobre n se llega a que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F . Por tanto, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F .

✓

4. Conclusiones

- (1) El concepto de cuasi-isometría permite establecer la conexión entre el concepto puramente algebraico de grupo y la estructura geométrica de este, desde el punto de vista topológico.
- (2) El importante hecho de que todo subgrupo clon de F es un embebimiento cuasi-isométrico, es la base fundamental para garantizar la existencia de grupos de la forma $F^n \times \mathbb{Z}^m$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq 0$, embebidos cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F .

Referencias

- [1] Jose Burillo, *Quasi-Isometrically Embedded Subgroups of Thompson's Group F* , *Jornal of Algebra* **27** (1999), no. 1, 65–78.
- [2] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory Notes on Richard Thompson's Groups*, *L'Ens. Math* **42** (1996), 215–256.
- [3] Vergara Gabriel and Salazar Olga, *Introducción a la teoría geométrica de grupos*, *Revista Integración* **29** (2011), no. 2, 15–30 (es).
- [4] Cleary S. and Taback J., *Geometric Quasi-Isometric Embeddings into Thompson's Group F* , *New York J. Math* **27** (2003), no. 1, 141–148.
- [5] Gabriel Vergara, *Teoría geométrica de grupos y algunas aplicaciones*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, 2009.

(Recibido en febrero de 2013. Aceptado en agosto de 2014)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
KM 7 ANTIGUA VÍA PUERTO COLOMBIA
BARRANQUILLA, COLOMBIA
e-mail: gabrielvegara@mail.uniatlantico.edu.co

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA 63, CALLE 59
MEDELLÍN, COLOMBIA
e-mail: opsalazard@unal.edu.co

Esta página aparece intencionalmente en blanco