

## Cálculo de primas y reservas de seguros de vida por Julio Garavito según el texto de É. Dormoy<sup>1</sup>

Garavito's computations of premiums and reserves for life  
insurances policies using É. Dormoys' book

FABIO ORTIZ GUZMÁN

Universidad Externado de Colombia, Bogotá, Colombia  
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

RESUMEN. El presente documento se basa en un manuscrito inédito de JULIO GARAVITO que data de 1903, en donde utiliza la teoría del cálculo de primas y reservas de seguros de vida del texto sobre la materia de É. DORMOY (1878). Además de comentar el desarrollo del manuscrito, se busca retomar este aspecto adicional y tal vez desconocido de la obra del científico colombiano de finales del siglo XIX y comienzos del XX en el área de la matemática actuarial. Este trabajo se enmarca dentro de un proyecto más amplio que es el estudio histórico de la matemática actuarial en Colombia.

*Key words and phrases.* Actuarial mathematics history, Colombia, insurances, annuities, premiums, reserves, JULIO GARAVITO, Sociedad Nacional de Seguros, Compañía Colombiana de Seguros, ÉMILE DORMOY.

ABSTRACT. This document is based on an unpublished manuscript work of JULIO GARAVITO in which he uses the mathematics of insurances based on the book of ÉMILE DORMOY (1878) to calculate annuities, premiums and reserves for a group of insurers of *Sociedad Nacional de Seguros* in Bogotá in 1902 and 1903. We explain the development of the manuscript giving some comments. We expect to recover this additional and maybe unknown aspect of the work of the Colombian scientist in the late 1800's and early 1900's in actuarial mathematics.

---

<sup>1</sup>Algunos aspectos del presente artículo fueron expuestos en una ponencia del XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, 2011.

This work is part of a wider project on the study of the history of actuarial mathematics in Colombia.

2010 *AMS Mathematics Subject Classification*. 01-02; 01A55; 01A60, 62P05, 97M30

## 1. Antecedentes

El ingeniero colombiano JULIO GARAVITO ARMERO es considerado una figura célebre de la ciencia en Colombia de finales del siglo XIX y comienzos del XX, quien por su interés personal en distintas disciplinas como matemáticas, física, economía, astronomía (en donde realizó trabajos de mediciones de utilidad específica para el país<sup>2</sup>) y psicología; produjo artículos de divulgación en publicaciones escritas como los *Anales de Ingeniería*, primera publicación seriada con artículos de nivel científico en el país. De otro lado se le endilga, en análisis posteriores, el haber asumido posturas erróneas en cuanto a nuevas conceptualizaciones en matemáticas y física<sup>3</sup> las cuales, dada la autoridad de su figura en nuestro medio, pudieron tener un costo en términos de atraso para la formación de las generaciones de comienzos del siglo XX en dichos campos. Aun así su obra es valorada y la *Ley 128 de 1919* ordenó la edición de sus obras lo cual está aún pendiente.

En cuanto al tema de seguros publicó un escrito sobre la importancia del seguro agrícola en donde resalta la importancia económica de éste<sup>4</sup>.

El presente trabajo se basa en un manuscrito de GARAVITO titulado *Cálculo de primas y reservas de seguros de vida por Julio Garavito según el texto de É. Dormoy* (GARAVITO [11, (1902)]) encontrado en los archivos de la Federación de Aseguradoras de Colombia FASECOLDA, en el cual GARAVITO realiza el cálculo de primas y reservas de seguros de vida para una población de asegurados en la Sociedad Nacional de Seguros en 1902 y 1903.<sup>5</sup> Este documento, al parecer inédito, muestra que en este campo de aplicación de las matemáticas GARAVITO estaba actualizado en cuanto al material en que se basó, el texto de É. DORMOY *Théorie mathématique des assurances sur la vie* (DORMOY [8, 1878]), el cual era utilizado en Francia a finales del siglo XIX. En Colombia la industria de seguros privados se estableció desde 1874 con la fundación de la Compañía Colombiana de Seguros dedicada entonces a ofrecer seguros de transporte de mercancías y posteriormente seguros de vida. Aunque, al parecer no existe mucha información sobre los modelos de cálculo que se habrían usado en

<sup>2</sup>Véase [23, (2005), pág. 52]

<sup>3</sup>Como el rechazo a las geometrías no euclidianas, la teoría de la relatividad, o la supuesta defensa de la teoría de números incommensurables de INDALECIO LIÉVANO sobre la de JORDAN y MERAY, lo cual afectó negativamente el conocimiento del cálculo en el país (Véanse [28, (2002), pág. 245], [29, (2007), págs. 254–255], [5, 1993].)

<sup>4</sup>Véase GARAVITO (1931) [10].

<sup>5</sup>En el título de la presentación, GARAVITO aclara que este fue hecho para la Compañía Colombiana de Seguros.

este tipo de seguros en sus inicios, hemos recopilado algunos referencias sobre el inicio de estas compañías en donde se trata *de la valuación de la póliza y del valor asegurable*, como veremos en la siguiente sección.

Deseo expresar mis agradecimientos a la profesora RAQUEL RODRÍGUEZ por su colaboración en la traducción de algunas partes del texto de E. Dormoy; al doctor ROBERTO JUNGUITO, presidente de FASECOLDA por su interés en rescatar el manuscrito, y al actuario y profesor ARMANDO ZARRUK de FASECOLDA por facilitarme el acceso al manuscrito y a la biblioteca de esa entidad.

## 2. La matemática actuarial en Colombia: algunos datos históricos

La actuaría, como parte de las matemáticas aplicadas estrechamente ligada a campos como la teoría de probabilidades y de la estadística, tiene un desarrollo histórico que ha sido muy bien documentado en países de Europa desde la antigüedad. El desarrollo de las tablas de mortalidad surgió de manera natural de problemas relacionados con la necesidad de registrar los números de habitantes durante las plagas que azotaban a Europa. Otros problemas relacionados con situaciones en los que era primordial tratar sobre contingencias como la duración de la vida, los riesgos en algunas actividades, los accidentes y la muerte, tenían un componente que desde algún punto de vista invitaban a la intuición matemática para su tratamiento. Es así como el desarrollo de la actuaría ha estado ligado a nombres de destacados matemáticos como HALLEY<sup>6</sup>, EULER, quien escribió al menos seis artículos sobre mortalidad y seguros de vida entre ellos *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain* en 1760<sup>7</sup>, LEIBNITZ y J. BERNOULLI<sup>8</sup>, D'MOIVRE<sup>9</sup>, GAUSS, quien hizo una valuación de los fondos para pensiones de las viudas y huérfanos de los profesores de la universidad de Gotinga en 1851<sup>10</sup>, y otros.

En Colombia las referencias sobre la importancia de los seguros están ligadas a la actividad de las compañías de este sector, nacionales (como es el caso de la Compañía Colombiana de Seguros que mencionaremos más adelante) o extranjeras (como se infiere de información dada en [44], [45], [46], [49]) o a su necesidad desde el punto de vista económico como el Proyecto de ley de 1909 sobre el establecimiento de estas compañías (véanse [49], el artículo póstumo GARAVITO [11, (1931)] sobre seguro agrícola, o la tabla de mortalidad de JORGE ACOSTA de 1931 [2]).

---

<sup>6</sup>HALD, A. [13, (2003), pág. 131].

<sup>7</sup>En SANDIFER, E. [25, (2008)] se comenta cómo EULER planteó problemas como: dado un cierto número de hombres de la misma edad cuántos probablemente sobrevivirán después de un número de años

<sup>8</sup>Véase SCHNEIDER, I. [31, (1984), págs. 69–75]

<sup>9</sup>HALD, A., *op. cit.*, señala su significativa contribución respecto a la función de distribución normal (págs. 468–485).

<sup>10</sup>Véase HABERMAN, S. [12, pág. 27]

Otras referencias en un sentido que enfatice la importancia de los modelos actuariales surgen principalmente con el proyecto de ley de creación del Instituto Colombiano de Seguro Social hacia 1945 y la llegada de actuarios y matemáticos exiliados europeos y actuarios brasileños de misiones de la OIT para apoyarla.<sup>11</sup>

Para retomar el asunto del surgimiento de compañías de seguros en Colombia tenemos, remontándonos al siglo XIX, evidencia de que hacia 1858 existió en Bogotá una compañía de seguros llamada *El Porvenir de las familias*, que tenía sede principal en Chile y sedes en varios países de Suramérica pero con *uno de sus principales compradores en Colombia*<sup>12</sup> la cual ofrecía seguros variados y es citada en los inicios de la industria en Colombia<sup>13</sup>. Aunque es más generalizada la creencia de que la primera fue la *Compañía Colombiana de Seguros*, esta solo se estableció hacia 1875. Un antiguo documento de 64 páginas de 1875 titulado “*Condiciones generales que la Compañía Colombiana de Seguros, establece para los seguros marítimos fluviales y terrestres*” (véase [45]), muestra que la fundación de esta compañía se hizo, como veremos, con una base legal moderna en su época, fijando de manera extensa las reglas para la contratación de los seguros contemplados en su título. El fundador, Don PEDRO NAVAS AZUERO, y los accionistas tenían muy buen conocimiento de lo que esta empresa representaría para el país (entonces Estados Unidos de Colombia) y las condiciones de la Compañía fueron tomadas casi en su totalidad de las empresas alemanas (véanse [46, (1877), pág. 80], ORTIZ ET AL. [19, (2012), pág. 420]).

En el documento de 1875 [45] de la Compañía Colombiana de Seguros se destacan el Capítulo 7: “*De la Valuación de la Póliza*” (págs. 7–8) y el Capítulo 8: “*Del valor asegurable*” (págs. 8–9) por hacer alusión a aspectos actuariales como el tipo de póliza y la valoración de la misma. En cuanto a la valoración de la póliza indica que “*una póliza valuada o especial*” se realiza según los cálculos comerciales (sin indicar cómo se realizan tales cálculos). El objeto de valuación adquiere una “*utilidad imaginaria*” (sic) que según se puede inferir del mismo documento corresponde al valor asegurado. Luego distingue la póliza “*valuada provisionalmente*” o “*póliza abierta o flotante*” cuando se refiere a objetos expuestos a peligros de viaje. Estos se relacionaban con accidentes, incendios y también con las situaciones de las guerras que se libraban en regiones del país como se describe en [46] respecto a un conflicto sucedido en 1877.

<sup>11</sup>Posiblemente las primeras referencias en que se encuentra el término matemática actuarial en Colombia datan de 1945: Véase ORTIZ [18, (2010), pág. 40]; esta referencia incluye datos sobre actuarios que llegaron a Suramérica en ésta época junto con otras como [15], [16], [18], [36].

<sup>12</sup>[44, pág. 16]. Este documento, impreso en Bogotá, reposa en la colección especial de libros antiguos de la Biblioteca Luis Angel Arango en Bogotá

<sup>13</sup>Véase OSPINA [20, (1955), pág. 200]. Este autor menciona que la Compañía habría iniciado actividades en 1855.

Agrega que cuando la valuación se hace sobre el flete, para determinar la extensión de la responsabilidad del asegurador es necesario que el asegurado demuestre el monto del flete contratado (o corriente, refiriéndose a una excepción que da el mismo documento en su artículo 148). Es entonces importante la incidencia del flete en el valor de la póliza, pero a su vez la determinación de los fletes no tenía unos parámetros bien determinados como señalaremos más adelante.

Acerca de la devolución de la prima, señala ([45, pág. 61]) que si esta no fuere reclamada al término del compromiso, una parte proporcional menos un “*bonus*” o compensación proporcional corresponderá al asegurador. Si no se hubiese estipulado suma alguna el bonus será de un 4% (“*abono por ristorno*”) de la suma total asegurada o de la parte que a ella corresponda pero,

*“si la prima no alcanza el medio por cien de la suma asegurada el bonus será de la mitad de la prima total o de la parte proporcional”.*

En [46] se detallan algunas cifras que no trataremos aquí por cuestión de espacio.

En documentos de finales del siglo XIX en los que se detallan pleitos por el cobro de seguros de mercancías por siniestros ocurridos por vías fluviales se destaca que las operaciones de seguros han crecido y tanto los pagos de los asegurados a las compañías merecen, por su magnitud, más atención en la forma como se calculan y evalúan los riesgos y los valores de las pólizas, aspectos esenciales de la matemática actuarial. Específicamente la siguiente nota señala que es necesario desarrollar y fijar bases teóricas para la aplicación de los seguros:

*“...Entre mercancías de importación y esportación, dinero enviado por correos i comercio interior, nuestro país hace uso del seguro por cerca de 20 [millones] anuales i paga probablemente en cada año más de 300.000 en primas de seguro. La sola Compañía Colombiana de Seguros cubre con sus pólizas mui cerca de 2 [millones] al año i recauda primas por cerca de 35 (sic)”* ([46, (1877), pág. 1]). Y recalca: *“(sic) Es tiempo ya de que se popularicen el estudio de esta rama [de los seguros] para conocer la estensión del servicio que presta en relación con el gasto que causa. Conviene estudiar de un modo comparativo la naturaleza i estensión de los riesgos que asegura cada compañía, las limitaciones que cada una de ellas establece en sus pólizas i el espíritu más o menos liberal que las gobierna en la indemnización de los siniestros”* ([46, pág. 1]).

Adicionalmente se indica que en el análisis de los modelos de cálculo usados debemos considerar la competencia por parte de compañías extranjeras dado

que los modelos y productos ofrecidos por la empresa colombiana deberían obedecer a modelos del mercado:

*“aunque es la única en Colombia tiene varios rivales pues hay socios e interesados por las compañías extranjeras que toman ellos mismos el seguro, [es decir, que] contratan pólizas con empresas extranjeras por medio de representantes que operan desde Colombia”* ([46, pág. 80]).

Según distintas referencias, [46], [47], [48], la Compañía Colombiana de Seguros tuvo un crecimiento continuo y en 1901 creó su rama de seguros de vida en la cual justamente GARAVITO desarrolló la labor actuarial tratada en éste artículo.

MIGUEL SAMPER en sus escritos económicos [27, 1925], en el *Retrospecto de 1896*<sup>14</sup>, sugiere que la Compañía Colombiana de Seguros se ha posicionado con responsabilidad en el desarrollo del país<sup>15</sup> El mismo autor al explicar las condiciones del comercio de Barranquilla a Bogotá por el río Magdalena y los caminos de herradura, refiere que las tarifas aduaneras y los fletes se han incrementado notablemente desde 1872 y lamenta que “[son] elaborados con precipitación”<sup>16</sup> lo cual unido a lo enunciado en el párrafo anterior puede conducirnos a suponer que hacia 1900, aún con el hecho de que la industria aseguradora había crecido en magnitud y estaba obligada a enfrentar la competencia foránea, quizá debía asumir un margen amplio de incertidumbre en cuanto al uso de una teoría formal debido a que distintos componentes del proceso de seguros eran inestables. Será hasta 1909 cuando se empiece a formalizar el negocio de los seguros (véase [49]).

Luego de su auge en el sector de seguros de transportes, la misma Compañía de PEDRO NAVAS creó en 1901 la rama de seguros de vida

*“con un capital de seis millones y personal respetable; pero esta Compañía [Sociedad Nacional de Seguros] de Vida no vivió de manera independiente sino hasta 1904 cuando se unió con la de transportes la que funcionó bajo la dirección del doctor Nicolás Esguerra”* ([26, (1907), pág. 12]).

Ahora, teniendo en cuenta el siguiente comentario de SALAZAR sobre la poca cobertura y popularización sobre los seguros para esta época: *“En nuestro suelo la historia de esta institución [el seguro de vida] es limitada debido a lo reciente de su instalación y el poco conocimiento sobre [sus] ventajas”* puede inferirse que la cobertura en seguros de vida era muy baja en Colombia hacia 1903.

<sup>14</sup>Aunque el término retrospecto no aparece en varios diccionarios de la época puede inferirse con un término cercano, a saber retrospectivo, que el autor, con dicho término daba a entender una revisión histórica de la época anterior correspondiente al último cuarto del siglo XIX hasta 1896.

<sup>15</sup>[27, 1925, pág. 177].

<sup>16</sup>[27, 1925, pág. 167].

El manuscrito de GARAVITO no indica si las pólizas son de Bogotá o de todo el país pero según la tabla de pólizas del manuscrito podríamos decir que las pólizas son de todo el país. En efecto, como veremos el número de pólizas de afiliados calculadas por GARAVITO en 1903 es 167 y dado que para esta época la ciudad tenía aproximadamente 100.000 habitantes, esto daría una proporción muy alta en caso de ser todas de Bogotá, lo cual contradiría la citada afirmación de SALAZAR [26, (1907)].

Otras referencias de la época son dos documentos de la Compañía Colombiana de Seguros, una señala que de 1901 a 1904 el número de estas pólizas de asegurados ha crecido constantemente sin dar más información<sup>17</sup> y otra de 1909, “*Antecedentes del proyecto de ley sobre el establecimiento de las compañías de seguros en Colombia*” (véase [49]), que muestra cómo la industria aseguradora aumenta con participación de empresas extranjeras.

La parte concerniente a la matemática actuarial empleada ha sido poco estudiada debido en parte a que no hay fuentes para esto, acaso porque hacía parte de la información de las empresas y solo hay registro de acontecimientos como el *Proyecto de Ley para la creación del Instituto de Seguros Sociales* (véanse JARAMILLO [16, (1945)], ORTIZ [18, (2010)]); la creación de la Superintendencia Bancaria mediante la ley 45 de 1923<sup>18</sup>; la formación de actuarios en programas específicos en el exterior en las décadas de 1950 y 1960 y la creación de programas en el país para solventar esta necesidad hacia 1990. Pero en términos específicos de actuaría no hay mayores fuentes para documentar más detalladamente el rol de las matemáticas para así poder afirmar que hay una ciencia actuarial en el país que soporte los desarrollos de las compañías aseguradoras al menos hasta 1940. Es entonces importante tener en cuenta que el manuscrito de J. GARAVITO representa una interesante excepción en este sentido y una fuente de interés por el contenido que presentaremos en las siguientes secciones.

### 3. Cálculo de primas y reservas de seguros

**3.1. Supuestos y generalidades del manuscrito.** Debido a que el espacio es limitado no se anexan todas las tablas del manuscrito. Los datos referidos en esta sección son de GARAVITO [11, (1903)]. Hemos seguido la numeración de las ecuaciones que GARAVITO toma del texto de DORMOY y en algunos casos si es una fórmula relacionada le agregamos a tal número una letra mayúscula. Al inicio de la primera página, este documento trae el subtítulo *Cálculo de las reservas primer año* pero en la exposición trata varios puntos, por lo cual hemos dividido la presentación en secciones para mayor claridad. A continuación enumeramos las características del documento:

<sup>17</sup>[47, (1904) págs. 3–4].

<sup>18</sup>*Cincuentenario de la Superintendencia Bancaria*. Revista ASECOLDA (36) Jul-Ago 1973, págs. 4–7

- a) GARAVITO tabula las pólizas de 1902 de la Compañía Nacional de Seguros numeradas del 1 al 45 y del 69 al 105<sup>19</sup>.
- b) En la tabla de 1902 señala que los cálculos fueron realizados por los doctores JULIO GARAVITO y PEDRO DE FRANCISCO y presentados en Bogotá en diciembre de 1902.
- c) Distingue en cada póliza la edad del asegurado, el nombre, el tipo de póliza (se encuentran dotal a 10, 15 o 20 años, ordinaria y una a pagos limitados) el seguro, la prima anual de tarifa, la prima anual absoluta y la reserva para el primer año (véase la sección 3.4).
- d) Según la numeración de las páginas parece que falta una hoja que sería la de las pólizas 46 a 69. Es interesante agregar que al final del manuscrito explica que hay 5 pólizas que no se calcularon porque no cumplen unos parámetros básicos (véase sec 3.5.3)
- e) En otra tabla ([11, (1903), págs. 20–25, no numeradas]), GARAVITO toma las mismas pólizas, numeradas del 1 al 167, en donde calcula la reserva para el final de 1903. En estas distingue el número de póliza, la edad, el tipo de póliza (hay dos dotales a 5 años, 2 de pagos limitados a 10 años y las demás dotales a 10, 15 ó 20 años y de pagos ordinarios), el valor del seguro y la reserva para el final de 1903. La tabla está firmada por JULIO GARAVITO el 4 de noviembre de 1903.
- f) En una nota que hace en la última página dice que se ha guiado por el *Prospecto de la Sociedad* [Nacional de Seguros] el cual no pudimos encontrar (véase la sección 3.5.3).
- g) La primera parte del manuscrito contiene la sustentación teórica para el cálculo de estas tablas.

Además de las anteriores datos es importante notar que en la gran mayoría de escritos de GARAVITO y de autores de la época en los *Anales de Ingeniería*, que era la única publicación científica de entonces, es común que los autores no den referencias o éstas sean muy vagas; sin embargo, el manuscrito del que estamos tratando es una excepción en este sentido.

En cuanto al texto de DORMOY (1878), según las referencias que cita frecuentemente, es un libro con buena sustentación teórica, con fundamentación en artículos del Instituto de Actuarios de Inglaterra y de la Sociedad Francesa de Actuarios, y como lo señala en su prólogo al comentar el auge que ha cobrado la matemática de los seguros:

*“la creación de la Sociedad Francesa de Actuarios en 1872 ha dado gran impulso a este tipo de estudios [...] y [hay] una gran cantidad de temas tratados desde el punto de vista científico en el Journal des actuaires français, expuestos trimestralmente y este llega a su séptimo año de existencia”.*

---

<sup>19</sup>GARAVITO (1903) [11, Tabla 2, págs. 14–19, incluidas dos hojas con cálculos de operaciones; hay cuatro renglones de pólizas tachadas]



El texto presenta varias tablas de mortalidad entre éstas la tabla  $H^{M20}$  de WOOLHOUSE empleada entonces por las veinte compañías inglesas; también emplea los casos discreto y continuo para el análisis de la función de mortalidad y las curvas de MAKEHAM y GOMPERTZ.<sup>21</sup> El texto contiene un capítulo de probabilidades y cálculo de probabilidades, teoría de las desviaciones, tablas de mortalidad en el que incluye *tablas de las veinte compañías inglesas*<sup>22</sup> y separa las tablas de cabezas seleccionadas de las tablas de poblaciones, curvas de mortalidad, amortización de obligaciones sobre un grupo de población y una variada gama de primas y su cálculo. El volumen 2 trata sobre el cálculo de reservas y otros temas de seguros y tres series de tablas: nueve de conmutación, mortalidad y anualidades; nueve de primas puras para las distintas combinaciones de seguros y ocho para reservas en distintas alternativas.

### 3.2. La tabla de mortalidad usada. Según GARAVITO:

*“La tabla de mortalidad es la que se halla en el manual para los médicos reconocedores publicada por la Equitativa de los Estados Unidos en 1889 (véase la página 22) llamada “American Experience Table of Mortality”. Esta tabla acusa una mortalidad más fuerte que las tablas adoptadas por las 20 compañías Inglesas , como puede verse por la siguiente comparación.”*  
(Véase la tabla 1.)

La tabla *American Experience* que menciona GARAVITO no aparece en el manuscrito y al parecer hay confusión en la referencia del autor pues la compañía llamada *The Equitable* era inglesa y tenía desde hacía más de un siglo el liderazgo sobre este tipo de tablas y la tabla llamada *American Experience* sí era de Estados Unidos. Cuando se fundó la Sociedad Americana de Actuarios ya era extensivo el uso de tablas británicas en Estados Unidos pero desde la introducción de *American Experience* en 1868 ésta se hizo predominante y se actualizó varias veces hasta el año en que la menciona GARAVITO. Existen referencias que indican que dicha tabla se basó en la tabla “*mutual la cual contenía un margen de selección médica a la que [Sheppard] Homans le agregó un margen de seguridad y luego [se difundió] como American Experience*”<sup>23</sup>.

También vale la pena añadir que la referencia al manual de médicos reconocedores es normal en ese entonces; en la obra de DORMOY se señala el proceso de selección médica según el cual es obligatorio que quienes toman el seguro deben someterse a una selección médica y explica que esto incide en la tabla de mortalidad, por ejemplo para individuos de 33 a 39 años, es baja en los primeros cinco años lo cual se debe a que los individuos con mal estado de

<sup>20</sup>*Healthy Lives Males*, pág. 81.

<sup>21</sup>DORMOY [8, (1878), págs. 153–158, v. 1].

<sup>22</sup>De 1868 págs. 74 a 88, llamadas primero tablas de observaciones, pág. 77, citando el *Journal des actuaires anglais*, v. XIV, pág. 84.

<sup>23</sup>Véase [14, 1988].

salud no pasaron la selección, desde el quinto año va aumentando y después de quince años la mortalidad está por encima del promedio del grupo completo. Lo anterior, explica DORMOY, se debe a que parte de los asegurados saludables se retiran del contrato. “*Por lo tanto existe un antiselección natural que influye en la estimación de los seguros*” (DORMOY[8, (1878), pág. 81–82]). Por lo anterior la referencia de Garavito podría hacer alusión a una de las actualizaciones de *American Experience* y a una edición de las tablas de *The Equitable* pero es difícil precisar a cual de éstas dos está asociada el manual para médicos reconocedores. Lo que es completamente seguro es que la tabla  $H^M$  que da GARAVITO efectivamente es la que presenta DORMOY.

Aunque la tabla *American Experience* no está anexada en el manuscrito, la parte de las tablas que sí incluye GARAVITO está en la página 1 del mismo, que incluimos aquí (véase la tabla de mortalidad) aunque en DORMOY aparece completa y en la página 1 del manuscrito aparece para edades de cinco en cinco como la anexamos aquí. Esta tabla  $H^M$  de las compañías inglesas está calculada antes del ajuste y posterior al ajuste y según DORMOY es el ajuste a la curva hecho por WOOLHOUSE<sup>24</sup> y corresponde a la tabla V de DORMOY [8, pág. 156, v. 2]. También es importante tener en cuenta que WOOLHOUSE hizo la graduación de la tabla mejorando las fórmulas de MAKEHAM y GOMPERTZ.<sup>25</sup> DORMOY cita esta tabla como la más importante (además cita otras tablas francesas como las de DUVILLARD y DEPARCIEUX) indicando que ésta realiza la tabulación a partir de 100.000 sobrevivientes de edad 10 años, lo mismo que la tabla de mortalidad y refiere al lector a la obra del Institute des actuaires anglais: *The mortality experience of life assurance companies*, Layton, Londres 1869. DORMOY (1878), págs. 104–106m v. 1.

Finalmente señala GARAVITO “*Es pues la mejor que puede adoptar la compañía, por ahora, para Bogotá*”. (GARAVITO [11, (1903), pág. 2]).<sup>26</sup>

### 3.3. La tasa de interés. Según GARAVITO

*“La tasa (sic) de interés aceptada por la Sociedad Nacional de Seguros es el 6%. Debe en efecto ser inferior a la tasa corriente del mercado, pues no es fácil colocar inmediatamente los fondos y se puede presuponer que no gozan de colocación sino una parte del tiempo. Con estos datos admitidos, el cálculo de las reservas es asunto de matemáticas puras. Estos cálculos presuponen sin embargo el régimen permanente de la moneda; en el régimen variable del papel moneda ningún cálculo es acertado; pues si bien se sabe que el valor del peso del papel varía en razón inversa del monto total de moneda, no es posible*

<sup>24</sup>DORMOY [8, pág. 85, v.1].

<sup>25</sup>Fue en su artículo “On an improved theory of annuities and assurances”. (Véase [50]).

<sup>26</sup>La primera tabla de mortalidad para Colombia fue la de J. ACOSTA VILLAVECES que solo apareció hasta 1931: ACOSTA [2, (1931)].

Edad	Tabla $H^M$ sin ajuste.	Tabla $H^M$ ajustada	Tabla adoptada
10	100000	100000	100000
15	98060	98224	96285
20	96160	96223	92637
25	92970	93061	89032
30	89870	89865	85441
35	86250	86281	81822
40	82230	82284	78106
45	77930	77919	74173
50	72740	72726	69804
55	66620	66513	64363
60	58980	58866	57917
65	49310	49297	49341
70	37930	38124	38569
75	25470	25691	26237
80	13920	13930	14474
85	5410	5422	5485
90	1500	1460	847
95	135	3	

TABLE 1. Tabla de Mortalidad

*prever como variará dicha cuantía en el porvenir. Sea de ello lo que fuere, como el papel moneda es moneda legal, hemos hecho los cálculos como si se tratase de un verdadero patrón de los valores, por las razones siguientes:*

- (1) *Porque no es posible juzgar el valor del papel con relación al oro en los años futuros.*
- (2) *Porque la Compañía necesita de una base, la más justa que sea posible dadas las circunstancias, en la cual pueda fundar sus beneficios.*
- (3) *Sus cuentas deben estar sometidas á una ley definida”.*

A este respecto no tenemos referencias sobre alguna regulación oficial para la tasa de interés de la Sociedad Nacional de Seguros, pues la referencia de 1877 que mencionamos en la sección 2 (véase [46]), según la cual no hay una regulación clara sobre las tasas de interés usadas por las aseguradoras, podría no ser aplicable en momento en que GARAVITO expone este asunto, 1902. Ahora, si bien es cierto que había representantes de compañías extranjeras ofreciendo seguros de transportes, como mencionamos en la sección 2, no hay claridad en las referencias que tenemos si se ofrecían seguros de vida por parte de aquellas. Teniendo en cuenta estos antecedentes se puede inferir que si bien es cierto que al igual que en Europa, entre los propósitos de las compañías de seguros estaba

obtener un beneficio por la colocación de capitales y que la variación anual de las tasas del mercado obligaba a prever unos márgenes de confianza en el beneficio y en la garantía de cumplir los compromisos las tasas de interés, las tasas usadas en particular por la Sociedad Nacional de Seguros 6% y del 10%, como veremos en la nota final de GARAVITO, son altas comparadas con las que menciona DORMOY del 4% e incluso 3% de Francia e Inglaterra:

*“en los cálculos de seguros de vida se supone siempre que los capitales pagados y puestos entre las manos de la compañía son colocados inmediatamente por ella, con un interés compuesto que se capitaliza de año en año y con tasas de colocación constantes durante un período de tiempo indefinido. Se desprecia la pérdida de interés que sufre la compañía como consecuencia de la necesidad práctica de guardar un cierto capital circulante no ubicado, que no produce nada; pero, por otro lado se supone que los intereses se capitalizan únicamente por años mientras que frecuentemente son capitalizados en intervalos más cortos. Se asume que hay una cierta compensación entre esas dos fuentes de errores; pero subsiste otra que es aún más importante : consiste en que la compañía para colocar sus capitales se ve obligada a aceptar la tasa de interés del momento, tasa que varía sin cesar, mientras que se había asumido que ella podía hacer sus colocaciones a una tasa fija. También en los cálculos se debe escoger ésta tasa lo suficientemente baja para asegurarse de que la compañía podrá siempre, durante un período de 5 a 6 años,[...] reubicar sus capitales a una tasa igual o superior. El error que resulta se traducirá, para la compañía, en un beneficio denominado beneficio de las inversiones. Este beneficio, que es imposible de calcular con anterioridad ya que depende por completo de las condiciones del mercado financiero, se vuelve frecuentemente muy importante y aún superior al que resulta de las operaciones de seguros propiamente dichas. Es claro que a más baja sea la tasa fijada previamente, en igualdad de condiciones, y a más se deban elevar las tarifas de las primas; más grande debe ser igualmente el beneficio realizado por el asegurador sobre sus colocaciones de capitales. En Francia todas las compañías toman una tasa del 4% anual para calcular sus tarifas; en Inglaterra muchas compañías han bajado sus tasas al 3.5% y aún al 3%. En los ejemplos que siguen aplicaremos el 4%”. (DORMOY [8, (1878) pág. 139–140, t. 1])*

**3.4. Cálculo de anualidades.** GARAVITO realizó los cálculos referentes a las anualidades ciñéndose a los que hacían las compañías de seguros en Europa

y Estados Unidos. GARAVITO se propone elaborar una tabla para calcular anualidades vitalicias: “No teniendo a nuestra disposición tablas referentes á las anualidades vitalicias fundadas en la tabla de mortalidad aceptada y concerniente á la taza fijada, hemos tenido que calcularla para todas las edades, desde 25 hasta 94 años. (sic)” Realiza la tabla I que consta de las siguientes columnas :  $a$ ,  $f(a)$ ,  $\log f(a)$ ,  $\log Q'_a$ ,  $\log X_a$ ,  $X_a$ ,  $tX_a$ , que siguen la notación de DORMOY.

$a$  = Edad del asegurado de 25 a 94 años.

$f(a)$  = Número de supervivientes, que según la tabla adoptada, corresponden a esa edad.

$\log f(a)$  = Logaritmo del número de supervivientes de  $a$ .

$\log Q'_a$  = Logaritmo de el valor de un peso pagadero por una persona de edad  $a$ , dentro de un año.

$\log X_a$  = Logaritmo de  $X_a$ .

$X_a$  = Anualidad vitalicia o sea el valor inicial de la suma de los pesos, pagaderos uno cada año, por una persona que tenga al principio  $a$  años de edad y que debe pagarla mientras viva.

$tX_a$  = Producto de la anualidad vitalicia por 0.06 que es la tasa  $t$  de interés adoptada por la compañía.

En estos enunciados GARAVITO omite la expresión para  $Q_a^n$  que es importante pues expresa el sentido probabilístico dado por la tabla de mortalidad

$$Q_a^n = (1+t)^{-1} \frac{f(a+n)}{f(a)}.$$

La anualidad vitalicia es un elemento necesario usado en el cálculo de las primas y de las reservas. Según DORMOY

*“El valor de la renta vitalicia depende de la tasa de interés a la cual se supone que pueden colocar los capitales además de la ley de mortalidad a la cual es sometida la persona. Estos dos elementos: la tasa de interés y la tabla de mortalidad, determinan completamente el valor de la renta vitalicia.”*

DORMOY presenta tres métodos para el cálculo de la anualidad vitalicia y GARAVITO usa el primero (DORMOY [8, (1878) pág. 143, v. 1]) del modo siguiente: de la definición de  $X_a$  tenemos  $X_a = Q_a^1 + Q_a^2 + \dots + Q_a^n$  y de esta puede deducirse:

$$X_a = Q'_a(1 + X_{a+1}) \quad (43)$$

y teniendo en cuenta que según la fórmula (41)

$$Q_a^n = (1+t)^{-n} \frac{f(a+n)}{f(a)}. \quad (41)$$

Al hacer  $n = 1$ :

$$Q'_a = (1+t)^{-1} \frac{f(a+1)}{f(a)} \quad (41A)$$

Continúa GARAVITO con la explicación para obtener  $X_n$  a partir de  $X_{n+1}$  empezando por  $X_{95} = 0$ , según lo que indica la tabla de mortalidad: “[...] para determinar á  $X_a$  es necesario, como se ve conocer á  $X_{a+1}$  y el cálculo ha tenido que efectuar en sentido contrario, es decir, empezando por 94 años (sic). En efecto,  $X_{95} = 0$  pues no hay supervivientes de 96 años en la tabla admitida, luego:<sup>27</sup>

$$X_{94} = Q'_{94} = (1.06)^{-1} \frac{3}{21} = \frac{3}{21 \times 1.06} = 0.1348 \quad (41A)$$

“Calculada  $X_{94}$  se calcula  $X_{93}$  etc por la fórmula (43). Veamos un ejemplo de este cálculo. Se conoce la anualidad correspondiente á un individuo de 37 años y se trata de hallar la del 36. Se tiene:

$$X_{36} = Q'_{36}(1 + X_{37}) \quad (43A)$$

Ahora

$$Q'_{36} = (1.06)^{-1} \frac{f(37)}{f(36)} = \frac{80353}{81090} \times \frac{1}{1.06} \quad (41B)$$

Y como  $X_{37} = 12.653$  se tendrá:

$$X_{36} = \frac{1}{1.06} \times \frac{80353}{81090} \times 13.653 = 12.763” \quad (43A)$$

Según explica GARAVITO en la página 5:

“la tabla de la anualidad vitalicia es indispensable, pues no se podría calcular directamente esta cantidad  $X_a$  sino por el método continuo y esto solo en el caso en que se hubiera llegado a la expresión matemática de la ley de mortalidad. La fórmula (51) (DORMOY [8, pág. 150]) resolvería éste caso pero por la razón indicada no han podido integrar la anualidad continua sino por aproximación y conduce a la fórmula (52) la cual depende de la anualidad  $X$  ordinaria de que hemos hablado.”

En este punto vale la pena ahondar un poco en el comentario de GARAVITO sobre las ecuaciones (51) y (52). Según DORMOY [8, pág. 150, v.1],

“si la curva de mortalidad es  $y = f(x)$  se obtiene:

$$X_a = \int_0^{\infty} \frac{f(a+x)}{f(a)(1+t)^x} dx \quad (51)$$

y por medio de integración aproximada ésta da con gran aproximación el valor de la anualidad continua en función de la anualidad ordinaria  $X$  y ésta es:

$$\bar{X} = X + 0.5 - \frac{1}{12}(\tau - \rho) \quad (52),$$

<sup>27</sup>Las letras mayúsculas las agregamos al número de una ecuación cuando se desprende de la ecuación numerada en la obra de DORMOY.

donde  $\tau$  es la tasa continua de mortalidad y  $\rho$  la tasa de interés continuo.”

Sobre esta fórmula DORMOY cita a WOOLHOUSE, ACHARD y LAURENT.<sup>28</sup>

Ahora bien el conocimiento de las curvas de GOMPertz y MAKEHAM que dan la función  $f(x)$  a usar en (51) ya era bien extendido como lo cita DORMOY. Estas son respectivamente (DORMOY [8, (1878), pág. 153-155, v.1])

$$f(x) = dg^{qx}$$

y

$$f(x) = \frac{K}{\alpha^x} g^{qx},$$

donde  $d, g, q, \alpha$  son constantes. Puesto que los teoremas sobre imposibilidad de integración en términos finitos fue desarrollada por J. LIOUVILLE entre 1834 y 1850, el comentario de GARAVITO en el sentido de que la expresión en (51) no ha podido ser integrada podría sugerir que en éste momento no conoce el resultado según el cual, a partir de la teoría desarrollada por LIOUVILLE ésta no es integrable. Ahora bien, expresando mediante constantes apropiadas, por ejemplo, la función de GOMPertz como  $f(x) = Ke^{Be^{Mx}}$  una sustitución en la integral  $\int f(x)dx$  permite llevarla a una forma  $\int \frac{e^{-Z}}{Z} dZ$  la cual, como se sabe, es no integrable.<sup>29</sup> Ahora tomando esta misma función  $y = f(x)$  en (51) y escribiendo ésta fórmula como  $\int CA^x e^{Be^{M(x+a)}} dx$  ó  $\int A^x e^{Be^{Mx}} dx$  podemos obtener;

$$\int A^x e^{Be^{Mx}} dx = \int e^{Be^{Mx} + Nx} dx$$

Si en ésta hacemos  $x = \frac{u}{M}$  y luego  $e^u = Z$  podemos eventualmente llegar a una integral de la forma  $\int \frac{e^{-Z}}{Z^\alpha} dZ$  con  $\alpha > 0$  la cual posiblemente es no integrable pero desconocemos si hay prueba formal que lo sustente.<sup>30</sup>

En seguida GARAVITO compara los valores de  $X_a$  obtenidos por él con los usados según la tabla de mortalidad de DORMOY [8, pág. 156, v.2]) correspondiente al 6% y calculada sobre la tabla de mortalidad  $H^M$ , mostrando la siguiente tabla como ejemplo, y anexa la tabla completa al final como Tabla 1 para las edades de  $a = 25$  hasta  $a = 95$  (GARAVITO [11, (1903), págs. 11–14].)

<sup>28</sup>DORMOY [8, pág. 147, v.1], cita esta fórmula de WOOLHOUSE y otras variantes cuando es sobre dos o más cabezas *Journal des actuaires anglais*, t. XI y XV, 1869 y también a ACHARD, *Journal des actuaires français* t. 1, 1872, además del Tratado de M. LAURENT (pág. 147), quien es la época un actuario destacado en Francia.

<sup>29</sup>Véase ABRAMOWITZ & STEGUN [1, (1970), págs. 228, 245–249].

<sup>30</sup>ABRAMOWITZ & STEGUN, *Op. cit.*, incluye la tabulación para el caso  $\alpha$  entero positivo, en  $[1, \infty)$ ; págs. 245–249.

La tabla 1 contiene las columnas señaladas al inicio de ésta sección y además el encabezado tiene una anotación (en un tipo de letra diferente al del manuscrito) en donde se lee *American experience Tabla de mortalidad 6% y Cálculo de  $Q'_a$* :

$$Q'_a = (1+t)^{-1} \frac{f(a+1)}{f(a)} \quad (179)$$

$$1+t = 1.06 \quad \log(1+t) = 0.02531$$

$$\log(1+t)^{-1} = \bar{1}.97469$$

$$X_a = Q'_a(1 + X_{a+1})$$

Edad	Tabla V	Tabla Calculada
25	13.6836	13.6630
30	13.2392	13.3170
35	12.7152	12.8680
40	12.0866	12.2890
45	11.3075	11.5540
50	10.3981	10.6397

TABLE 2. Tabla de la anualidad vitalicia

Una expresión como  $\bar{1}.97469$  es la que se usaba en tablas de logaritmos para simplificar cálculos y corresponde a la característica 1 y mantisa .97469, lo que se interpreta como  $\text{Log}(1+t)^{-1} = 1 - 0.97469 = -0.02531$ , lo cual es útil si se usa el valor posicional en la base 10 para simplificar cálculos.

Calculada la tabla de la anualidad vitalicia realiza los cálculos para las diferentes pólizas.

### 3.5. Cálculo de pólizas.

*3.5.1. Póliza ordinaria de vida.* Según se define en el manuscrito, es un seguro para toda la vida. Las fórmulas son las (78), (96) y (163) de la citada obra de DORMOY, a saber:  $m$  = año para el cual se calcula la reserva,  $n$  = año de duración de la póliza.

$$P_a = \frac{1 - tX_a}{1 + t} \quad \text{Prima única} \quad (78)$$

$$P_a = \frac{P_a}{1 + X_a} \quad \text{Prima anual} \quad (96)$$

$${}_mV_a = 1 - \frac{1 + X_{a+m}}{1 + X_a} \quad \text{Reserva} \quad (163)$$

En cuanto a la última ecuación correspondiente a la reserva según DORMOY (1878),



Reserva al año  $n$ : cuando un seguro tomado a la edad  $a$  se ha contratado para toda la vida mediante el pago de una prima constante y se ha calculado para  $n$  años, el compromiso de la compañía es pagar  $P_{a+n}$  y el asegurado debe pagar  $p_a$  sobre una cabeza de edad  $a + n$  lo cual da como resultado el valor  $p_a X_{a+n}$  y entonces designaremos la reserva  ${}_nV_a$  por

$${}_nV_a = P_{a+n} - p_a(1 + X_{a+n})$$

la diferencia entre lo que debe pagar al compañía por una suma de \$1 hasta  $m$  años y el valor que paga el asegurado anualmente  $p_a$  correspondiente a una cabeza de edad  $a + n$ <sup>31</sup> es:

$$\begin{aligned} {}_mV_a &= P_{a+n} - p_a(1 + X_{a+n}) \\ &= P_{a+n} \left( 1 - \frac{p_a}{p_{a+n}} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

A partir de esta última, introduciendo las anualidades en lugar de las primas y usando  $P = \frac{1 - tX_a}{1 + t}$  se tiene  ${}_nV_a = \frac{X_a - X_{a+n}}{1 + X_a}$  de donde:

$$\begin{aligned} {}_mV_a &= P_{a+n} - p_a(1 + X_{a+n}) \\ &= 1 - \frac{1 + X_{a+m}}{1 + X_a} \end{aligned} \quad (163)$$

En seguida calcula como ejemplo la prima y la reserva para un asegurado con este tipo de póliza.

**Ejemplo:** Póliza N°34 Juan D. Herrera

Edad  $a = 49$ ; seguro  $A = \$20.000$ ; prima de tarifa = \$1262,00. Se tiene:

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1 - 0.6502}{1 + 0.06} \\ &= \frac{0.3498}{1.06} \\ &= 0.3300 \end{aligned} \quad (163A)$$

$$P_a = \frac{0.3300}{11.837} = 0.027878 \quad (163B)$$

$${}_1V_a = 1 - \frac{11.6397}{11.8370} = 0.01665 \quad (163C)$$

Como el seguro es de \$20.000, se tendrá :

Prima pura =  $0.3300 \times 20.000 = \$6600.00$ ,

Prima anual =  $0.027878 \times 20.000 = \$557.56$

Reserva Primer año =  $0.01665 \times 20.000 = \$333.00$

<sup>31</sup>En [8, (1878), págs. 4–22, v. 2], también se aclara la diferencia en caso que el pago se haga al final o al inicio del año  $n$

3.5.2 *Póliza de pagos limitados.* Continúa GARAVITO con la fórmula de la póliza de pagos limitados dada en DORMOY [8, (1878), v. I. pág 185]:

“Es un aseguro para toda la vida hecho por pagos limitados durante 15 ó 20 años:

$$P_a = \frac{1 - tX_a}{1 + t} \quad (\text{Prima única}) \quad (78)$$

Prima anual, para  $n$  fijo y a edad actual se da por la fórmula (97)

$${}_n p_a = \frac{P_a}{1 + {}_{n-1} X_a} = \frac{P_a}{1 + X_a - Q_a^{n-1} X_{a+n-1}} \quad (\text{Prima anual}) \quad (97)$$

donde  $n$  representa la duración de los plazos”.

GARAVITO no incluye la definición de  ${}_n X_a$  que según DORMOY es la anualidad temporal pagada por  $n$  años sobre un asegurado de edad  $a$  en un plazo pre-determinado de  $n$  años y es igual a una anualidad vitalicia menos una diferida por los  $n$  años; esto es<sup>32</sup>

$${}_n X_a := X_a - X_a^n = X_a - Q_a^n X_{a+n}.$$

Continúa GARAVITO: “La reserva se calcula por la fórmula (166) t II pág. 24’”. Según GARAVITO

“esta fórmula tiene un error tipográfico que hemos corregido. Si  $m$  es el número de años transcurridos después del aseguro:

$${}_m V_{(a,n)} = \frac{1 - tX_{a+m}}{1 + t} - {}_m p_a (1 + X_{a+m} - Q_{a+m}^{n-m-1} X_{a+n-1})” \quad (166)$$

La ecuación (166) significa que la reserva se calcula como la diferencia entre el compromiso de la compañía y el compromiso del asegurado como explicaremos en seguida. La ecuación (166) realmente se presenta en forma diferente en DORMOY y en esta GARAVITO usa una notación diferente a la de DORMOY. En efecto, según DORMOY para un contrato que inicia a edad  $a$  mediante pago de primas después de  $m$  años y que se fijan en  $n$  años, el compromiso de la compañía tiene valor  $P_{a+n}$ , es decir;  $\frac{1 - tX_{a+n}}{1 + t}$  mientras que el compromiso

del asegurado es el pago de  $m - n$  primas iguales a  ${}_m p_a = \frac{P}{1 + {}_{m-1} X_a}$  lo que da en forma análoga a la fórmula (160) para el compromiso del asegurado:

$${}_m p_a (1 + {}_{m-n-1} X_{a+n})$$

ó equivalentemente:

$$\frac{P}{1 + {}_{m-1} X_a} (1 + {}_{m-n-1} X_{a+n}) = \frac{1 - tX_a}{1 + t} \frac{1 + {}_{m-n-1} X_{a+n}}{1 + {}_{m-1} X_a}.$$

<sup>32</sup>Véase [8, DORMOY, ecuación (68) pág. 163, v. 2]

La reserva, cuando la póliza es a pagos limitados, está dada por la diferencia entre estos valores (DORMOY [8, (1878) fórmula (166) pág. 24, t. II])

$$V(1+t) = X_{a+n} - (1-tX_a) \frac{1 + {}_{m-n-1}X_{a+n}}{1 + {}_{m-1}X_a},$$

en donde suponemos que el capital se paga al final del año; si se paga al comienzo del año el valor de  $V(1+t)$  será  $V$ . El error al que se refiere GARAVITO es que la ecuación dada en DORMOY, (1878) fórmula (166) pág. 24, t. II, debería ser

$$V(1+t) = 1 - tX_{a+n} - (1-tX_a) \frac{1 + {}_{m-n-1}X_{a+n}}{1 + {}_{m-1}X_a}.$$

En efecto, de la ecuación (163) en DORMOY:

$${}_mV_a = P_{a+m} - p_a(1 + X_{a+m}),$$

cambiando  $p_a$  por  ${}_n p_a$  y  $X_{a+m}$  por  ${}_{n-m-1}X_{a+m}$  y usando la expresión

$${}_{n-m-1}X_{a+m} = X_{a+m} - Q_{a+m}^{n-m-1}X_{a+n-1},$$

se tendrá la reserva en la notación de GARAVITO:

$${}_mV_{(a,n)} = \frac{1 - tX_{a+m}}{1+t} - {}_m p_a (1 + X_{a+m} - Q_{a+m}^{n-m-1}X_{a+m-1}). \quad (166)$$

En seguida GARAVITO ofrece el siguiente

**Ejemplo:** Póliza N°48 Hemel Florez de 38 años de edad, asegurado por \$12000, con póliza de pagos limitados por 20 años.

$$P_a = \frac{1 - 0.7522}{1 + 0.06} = \frac{0.2478}{1.06} = 0.2338 \quad (1)$$

$${}_n P_a = \frac{0.2338}{1 + 12.537 - 0.2578 \times 9.0805} \quad (2)$$

$$= 0.02088 \quad (3)$$

$${}_m V_{(a,n)} = \frac{1 - 0.7450}{1.06} - 0.02088 \left( 1 + 12.416 - \frac{1}{(1.06)^{18}} \frac{62104}{78862} \times 9.0805 \right) \quad (4)$$

$$= 0.24056 - 0.22782 = 0.01274 \quad (5)$$

En la ecuación anterior GARAVITO usó  $m = 1$ . Como el seguro es por \$12000, se tendrá:

Prima única = \$2805.60

Prima anual absoluta \$250.56.

Reserva un año después del seguro \$152.88

GARAVITO realiza los cálculos de primas y reservas para la póliza dotal que incluimos.

3.5.3. *Póliza dotal.* Se define en el manuscrito como un tipo de seguro mixto aunque en DORMOY ([8, (1878), pág. 25 v. II]) el seguro mixto es más general. GARAVITO toma el seguro mixto con las condiciones de ser sobre dos cabezas y de acordarse a 10, 15 ó 20 años:

“Es un seguro mixto, es decir un contrato por el cual la compañía se compromete a pagar un cierto capital á la muerte del asegurado si esta muerte sobreviene en un plazo fijo de 10,15 ó 20 años; ó se hace el pago al fin de plazo si el asegurado está entonces vivo. Dividiremos el seguro mixto en dos clases:

- 1) Cuando el capital pagadero es el mismo  $A$  en caso de vida que en caso de muerte.
- 2) Cuando el capital pagadero en caso de vida es un capital  $B$  diferente del  $A$  pagadero en caso de muerte. Las fórmulas que corresponden al caso 1 son: (170) y (172). (DORMOY [8, (1878), pág. 31, v. II].)

Estas fórmulas no se aplican exactamente al caso 2) y las presenta en una forma distinta como veremos en seguida. Para la prima única obtiene:

$$P''_{(a,n)} = (1+t)^{-1} \left\{ \left[ \frac{B}{A}(1+t) - 1 + tX_{a+n} \right] Q_a^n + 1 - tX_a \right\} \quad (6)$$

GARAVITO no muestra la deducción de esta fórmula pero puede aclararse su expresión. Si tenemos en cuenta que el compromiso pagadero en caso de muerte es  $A(P_a - P_{a+n}Q_a^n)$  y en caso de vida es  $BQ_a^n$ , el compromiso total será

$$A(P_a - P_{a+n}Q_a^n) + BQ_a^n$$

y por peso de capital  $A$  se tendrá el compromiso en la notación de GARAVITO:

$$P''_{(a,n)} = (P_a - P_{a+n}Q_a^n) + \frac{B}{A}Q_a^n,$$

o equivalentemente:

$$P''_{(a,n)} = \frac{1-tX_a}{1+t} - \frac{1-tX_{a+n}}{1+t}Q_a^n + \frac{B}{A}Q_a^n,$$

que equivale a la ecuación (6) expresada por GARAVITO. La expresión (6) es una adaptación de la fórmula (170) de DORMOY, a saber:

$${}_{m-n}P'_{m+n} = P_{a+n} - P_{a+m}Q_{a+n}^{m-n} + Q_{a+n}^{m-n}, \quad (170)$$

en la cual se considera que se contrata un seguro a la edad  $a$  por  $m$  años mediante el pago de una prima única y suponiendo que ya han transcurrido  $n$  años, el compromiso de la compañía está representado por la prima única (pura) de un seguro mixto hecho a la edad  $a+n$  por una duración de  $m-n$  que se designa  ${}_{m-n}P'_{m+n}$  y en esta los dos primeros términos representan la reserva normal relativa al seguro temporal y el tercero representa la reserva relativa al seguro de capitales diferidos (DORMOY [8, (1878) pág. 30, t. II])

o seguro mixto. Vale la pena agregar que la fórmula (170) proviene a su vez de una variación de la fórmula (209) dada en DORMOY ([8, (1878), (209), pág. 200, t.I]):

$$P_a - P_{a+n}Q_a^n + Q_a^n.$$

En (170) se supone en general  $n < m$  mientras que GARAVITO supone que se ha acordado que el compromiso se da en caso de que la muerte del asegurado sobrevenga en un plazo de  $m = 10, 15$ , ó  $20$  años. A partir de la expresión para la prima única obtiene la de la prima anual  $p''_{(a,n)}$  (que es  ${}_n p'_a$  en la notación de DORMOY):

$$p''_{(a,n)} = \frac{P''_{(a,n)}}{1 + X_a - Q_a^{n-1}X_{a+n-1}}. \quad (172A)$$

Para la reserva  $m$  años después del seguro usa la notación:

$${}_m V''_{(a,n)} = {}_m C_{(n,a)} - {}_m C'_{(a,n)},$$

donde

$${}_m C_{(a,n)} = (1+t)^{-1} \left\{ \left[ \frac{B}{A}(1+t) - 1 + tX_{a+n} \right] Q_{a+m}^{n-m} + 1 - tX_{a+m} \right\}; \quad (172B)$$

y

$${}_m C'_{(a,n)} = p''_{(a,n)} [1 + X_{a+m} - Q_{a+m}^{n-m-1}X_{a+n-1}]. \quad (172C)$$

Luego agrega GARAVITO: *en estas fórmulas B represente la suma de las anualidades de tarifa y A el valor del seguro.*

Se puede decir que para la reserva GARAVITO usa la fórmula (172) de DORMOY y en los cálculos asume  $m = 10, 15$  ó  $20$  años (DORMOY [8, (1878), pág. 31, t.II]):

$$V(\text{mixta}) = {}_{m-n} P'_{a+n} - (1 + {}_{m-n-1} X_{a+n}) {}_m p'_a, \quad (172)$$

en la que el primer término representa el valor actual del compromiso de la compañía, o del capital y el segundo término representa el valor actual del compromiso del asegurado, es decir, de las primas. Y se puede entonces asumir la expresión siguiente para la reserva la siguiente fórmula que da DORMOY:

$$V(1+t) = 1 - t(X_{a+n} - X_{a+n}^{m-n}) + tQ_{a+m}^{m-n} - \frac{1 + {}_{m-n-1} X_{a+n}}{1 + {}_{m-1} X_a} [1 - t(X_a - X_a^m) + tQ_n^m]. \quad (173)$$

(DORMOY [8, (1878) pág. 31, v. II])

**Ejemplo:** Póliza N°9 Gabriel Roldán de 25 años de edad, asegurado con póliza dotal de 20 años por 10.000 pesos mediante un pago anual de \$589<sup>33</sup>

$$P''_{(25,20)} = \frac{1}{1.06} \{ [1.249 - 1 + 0.6932] \times 0.2597 + 1 - 0.8198 \} \quad (7)$$

$$= 0.40085 \quad (8)$$

<sup>33</sup>En el manuscrito se usó por error el símbolo en centavos pero en seguida los cálculos corresponden a pesos.

Prima anual:

$$p''_{(25,20)} = \frac{0.40085}{1 + 13.663 - 0.3261} = 0.035157 \quad (9)$$

Reserva un año después del aseguro:

$${}_1V_{(15,20)} = {}_1C_{(25,20)} - {}_1C'_{(25,20)}, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{20 \times 589}{10000} \\ &= \frac{11780}{10000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_1C_{(25,20)} &= \frac{1}{1.06} \{ [1.249 - 1 + 0.6932] \times 0.2776 + 1 - 0.8198 \} \\ &= 0.4202 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_1C'_{(25,20)} &= 0.035157 [1 + 13.601 - 0.2975 \times 11.715] \\ &= 0.39080, \end{aligned}$$

y a partir de la ecuación (10) se tiene:

$${}_1V_{(25,20)} = 0.42023 - 0.39080 = 0.02943. \quad (11)$$

Como el aseguro es por \$10.000 se tendrá:

Prima única = \$4008.50

Prima anual = \$351.57

Reserva = \$294.30

En seguida agrega GARAVITO la siguiente nota en la que se destaca la tasa de interés requerida de entre 6% y 10%, que es alta comparada con las usadas en Francia e Inglaterra (véase la sección 3.3):

**Nota:** Aunque hemos elegido una tabla de mortalidad más fuerte que la de las 20 compañías, inglesas, como esta tabla no está sin embargo fundada en datos directos, respecto de la mortalidad en Bogotá, es prudente agregar a la reserva calculada de un 5 a 10% con el fin de estar a cubierto de deficiencia en dicha falla. La reserva de las pólizas ordinaria de vida y pagos limitados están calculados en el supuesto de que la compañía paga únicamente al asegurado a su muerte el valor del aseguro. El derecho otorgado al cliente en la póliza ordinaria de vida de saldar su cuenta a los 20 años, se ha considerado únicamente desde el punto de vista de que dicha operación no altera en nada las cuentas de la compañía. La reserva fuera de ser su objeto principal, como es el de hacer frente a los riesgos en curso representa, por otra parte, lo que la compañía debe devolver al asegurado en caso de necesidad de saldar la póliza, en cualquier tiempo en que ésta operación se verifique y sin que

*esto altere en nada las cuentas de la compañía. En la póliza dotal, lo que dice el presupuesto de la sociedad de seguros al final de la pág. 11 nos ha obligado a considerar como compromiso de la compañía, en caso de vida, la devolución del monto de las primas anuales solamente, bajo cuyo plan se convino que efectuaríamos el cálculo de la reserva. Las utilidades que ofrece la sociedad a los asegurados, las computará la misma Compañía en vista de la diferencia entre la prima de tarifa y la reserva.*

Finalmente, después de la tabla 2, agrega la siguiente nota:

*Quedan sin calcular las pólizas números 48, 77, 82,104, 127 y 137 por los siguientes motivos:*

*1) las pólizas 48, 82 y 124 son de pagos limitados. El plazo de estas puede ser de 15 o 20 años según el Prospecto de la Compañía pero en los datos no figura dicho plazo lo cual hace imposible el cálculo.*

*2) Las números 77 y 104 se refieren a una póliza que no existe en el prospecto (dotal a 5 años) y para la cual no hemos hecho tablas que faciliten el cálculo; y*

*3) La 137 si bien se refiere a una póliza aceptable, la edad (20 años) del asegurado lo pone fuera del limite de nuestras tablas. El cálculo directo de las tres últimas pólizas es tan penoso que no valdría la pena de hacerlo por el valor total del rendimiento que ellos puedan producir a la Sociedad.*

*Bogotá Noviembre 24 de 1903. Julio Garavito”*

Finalmente en dos hojas adicionales realiza los cálculos para verificar las formulas del texto de DORMOY ([8, (43), pág. 143, v. 1. y (163), pág. 12, v. 2]).

#### 4. Conclusiones

- Inicialmente se observa una referencia según la cual una compañía de seguros llamada *El Porvenir de las Familias* funcionó en Bogotá hacia 1855, la cual ofrecía seguros de vida. Esta fue al parecer anterior a la *Compañía Colombiana de Seguros* fundada en 1878, que inicialmente ofreció seguros de navegación por el río Magdalena y por caminos de herradura. Posteriormente, una dependencia de esta se abrió en Bogotá para ofrecer seguros de vida bajo el nombre de *Sociedad Nacional de Seguros* desde 1901. Hacia 1905 se unió con la anterior. Fue para la Sociedad Nacional de Seguros para la cual GARAVITO realizó los cálculos aquí tratados.

- Se observa a partir del soporte que presenta GARAVITO en el texto de DORMOY, que las técnicas actuariales para el cálculo de pólizas usa los modelos

que son similares a los usados en Europa en la misma época, cuya teoría se expone en dicho texto y se observa que esta etapa del desarrollo de la actuaría en Colombia fue influenciada de forma más evidente que la que se dio en las matemáticas puras en donde algunas ideas de la época tardaron mucho más en llegar a Colombia, ó aún más, en tener interlocutores en el país.

- Se mencionó una referencia de 1877 en la que se expone la necesidad, con ocasión de un pleito de seguros, de estudiar formalmente los modelos para el cálculo de estos y la cuantificación de sus parámetros (véase [46]).

- El manuscrito estudiado se aporta como otro documento para la obra de J. GARAVITO complementando la información existente sobre los trabajos del científico colombiano, en particular en el área de matemática actuarial y se comprueba que si bien en los campos en los que tuvo apreciaciones erróneas (sin obnubilar sus trabajos en astronomía)<sup>34</sup>, recurre a tablas existentes para poner en marcha una cuantificación del valor de las pólizas. Este tipo de seguros empezó a tener gran auge<sup>35</sup> y aunque solo a mediados del siglo XX surgen formas más importantes de seguros para la población general como el seguro social con una base actuarial seria, puede considerarse una etapa inicial en el desarrollo de la nación en este campo posterior a la de los seguros de navegación.

- Es importante mencionar que hubo leyes sobre protección de trabajadores en actividades de riesgo pero solo hasta la ley de 1947 esto se consolida mejor, a pesar de que no se lleva a la práctica hasta 1967 y las recomendaciones actuariales no fueron tenidas necesariamente en cuenta.<sup>36</sup>

- Por lo antes expuesto se ve que es difícil hablar del estudio de la actuaría en Colombia en el siglo XIX e inicios del XX. Se hace manifiesto el aporte del manuscrito a la historia de la actuaría en Colombia y consideramos que el manuscrito de GARAVITO posiblemente representa una pieza única en el estado de esta materia en dicha época por razones como estas: los cálculos fueron realizados para pólizas reales y fueron las primeras que se ofrecieron para seguros de vida, la figura de liderazgo casi sin competencia de GARAVITO en su época y la referencia principal al texto de DORMOY que fue muy completo en su área en aquella época (véase la sección 3).

### Referencias

- [1] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series 55, (1970).

<sup>34</sup>Véase QUINTERO [23, (2007)], acaso por su condición de autodidacta sobre las ideas surgidas en la época, su dinamismo le permitió aportar conocimientos actualizados en la época para la aplicación del seguro de vida. Si bien no existían tablas de vida para Bogotá, véase ACOSTA [2, (1931)]

<sup>35</sup>Documentos y Actas de la Compañía Nacional de Seguros 1905 pág. 4.

<sup>36</sup>Véase HERNÁNDEZ, M., *La fragmentación de la salud en Colombia y Argentina. Una comparación socio política. 1880-1950*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.



- [2] ACOSTA VILLAVECES, J., *Tablas de mortalidad*. Anales de Ingeniería **39** (454) (1931), Bogotá, págs. 20-37.
- [3] ACOSTA VILLAVECES, J., *Las matemáticas en los seguros* Anales de Ingeniería **58** (1954), 33.
- [4] ALDANA, A., *Seguro de vida*. Tesis de grado. (1921). Bogotá: Imprenta del EMG.
- [5] ARBOLEDA, LUIS CARLOS, *Dificultades estructurales de la profesionalización de las matemáticas en Colombia*. Contenido en *Historia Social de la Ciencia en Colombia*, tomo 2, capítulo 6. Colciencias/Tercer Mundo: Bogotá, 1993.
- [6] CASTRO–GUTIÉRREZ, A., *El actuario y la protección social. La evolución de la profesión actuarial, su trayectoria y futuro en la seguridad social en América Latina*. Contenido en *Curso de formación en técnicas actuariales aplicadas a la seguridad social. Santiago de Chile*. OIT. Centro Internacional de Formación. Ginebra, 2007.
- [7] D’AMBROSIO, U., *La transferencia de conocimiento matemático a las colonias: factores sociales, políticos y culturales*. LLULL **22** (1999), 347–380.
- [8] DORMOY, E., *Théorie mathématique des assurances sur la vie*. Paris: Gauthier-Villars (1878). 2 v.
- [9] ECKHART, L., *Matemáticos en fuga de Hitler: hechos, mitos y su investigación. Apuntes relativos al libro de Reinhard Siegmund–Schultze*. LLULL **22** (1999), 199–209.
- [10] GARAVITO, J., *Seguro Agrícola. Comunicación al Congreso de Agricultores*. Anales de Ingeniería **39** (454) (1931), Bogotá. 15–20.
- [11] GARAVITO, J., *Cálculo de primas y reservas de seguros de vida según el texto de E. Dormoy*. Manuscrito (1903). Bogotá.
- [12] HABERMAN, S., *Landmarks in the history of actuarial science (up to 1919)*. Actuarial Research Papers **84**, City University London, 1996.
- [13] HALD, A. *A history of probability and statistics* Wiley, (2003).
- [14] HUSTEAD, E., *The history of mortality tables in the United States*. Journal of Insurance Medicine **20** (4) (1988) pág. 12–16.
- [15] ISS, Revista Seguridad Social. Instituto de Seguros Sociales. Bogotá **1** (1–3) (1948; **2** (4–5) (1949).
- En estos volúmenes hay múltiples artículos y referencias sobre el inicio del Seguro Social. Algunas referencias, en particular, están en pies de página.
- [16] JARAMILLO, J., *Ponencia del H. Senador Jaramillo Giraldo a la Comisión Quinta del Senado*. Anales del Congreso **1** (53) (1945), 2449–2473.
- [17] JORDAN, C. *Life Contingencies*. The Society of Actuaries (1991). Chicago.
- [18] ORTIZ, F. *Peter Thullen y las matemáticas en los inicios del seguro social en Colombia*. Lecturas Matemáticas. **31**(1) (2010) Bogotá. págs. 23–54.
- [19] ORTIZ, F.; RESTREPO, F. *Actuaría en Colombia* en “La industria aseguradora en Colombia”. pág. 470–493, v. 1 Fasecolda 35 años (2012). Bogotá. 2 vol.
- [20] OSPINA, L. *Industria y protección en Colombia 1810-1930*. (1955). Medellín: Editorial Santafé.
- [21] OSSA, E., *Tratado elemental de seguros*. Editorial Bedout: Medellín, 1956.
- [22] PINTO DE MOURA, G., *Cálculos sobre la fertilidad en Colombia*. Revista Seguridad Social. Instituto de Seguros Sociales **6** (1949), 99–104.
- [23] QUINTERO, CAMILO., *Bajando las estrellas a la tierra: la astronomía colombiana entre lo global y lo local, 1868–1920*. En: Argentina Saber Y Tiempo: Revista Argentina De Historia De La Ciencia. (2005). **5** fasc.19 págs. 51–71.
- [24] RENGIFO, J., *Antecedentes y documentos de los seguros sociales en Colombia*. Antares Imprenta: Bogotá, 1952.
- [25] SANDIFER, E (2008) *How Euler did it. Life and death. Parts 1-2* Mathematical Association of America.

- [26] SALAZAR, M. *Seguro de vida*. Tesis para obtener el título de doctor en Derecho y Ciencias Políticas. Universidad Republicana<sup>37</sup>. Bogotá.(1907) Imprenta J. Casis.
- [27] SAMPER, M., Escritos político-económicos. (1925) Bogotá. Editorial Cromos.
- [28] SÁNCHEZ, C., *100 años de historia de la matemática en Colombia. 1848–1948*. Rev. Acad. Colomb. Ci. **26** (99) (2002), 239–259.
- [29] SÁNCHEZ, C., *Los cuadernos de Julio Garavito. Una antología comentada*. Rev. Acad. Colomb. Ci. **31** (119)(2007), 253-2-66.
- [30] SÁNCHEZ, C., *El departamento de Matemáticas y su impacto en el desarrollo de las matemáticas en el país*. Contenido en *La Facultad de Ciencias. Fundación y consolidación de comunidades científicas*. Universidad Nacional de Colombia: Bogotá: 2006, 221–256.
- [31] SCHNEIDER, I., *The role of Leibnitz and Jakob Bernoulli for the development of Probability Theory*. LLULL **7** 1984 pág. 69–89.
- [32] SCHWAB, P. *El cálculo actuarial en el seguro social*. Revista Seguridad Social. Instituto Colombiano de Seguro Social **4–5** (1949), 57–65.
- [33] SCHWAB, P., *El seguro de invalidez*. Revista Seguridad Social. Instituto Colombiano de Seguro Social **6–7** (1950), 23–41.
- [34] SCHWAB, P. *El seguro de supervivencia*. Revista Seguridad Social. Instituto Colombiano de Seguro Social **10** (1951), 11–12.
- [35] SEGAL, S., *War, Refugees, and the formation of an International community*. Contenido en *Mathematics unbound: the evolution of an international research community. 1800–1945*. Intnal. Sympos. Charlottesville VA, USA, May. Amer. Math. Soc.: Providence RI, 1999, 27–29.
- [36] SEGAL, S., *Mathematicians under the Nazis*. Princeton University Press: Princeton, (2007).
- [37] SIEGMUND–SCHULTZE, R. *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany*. Princeton University Press: Princeton, (2009).
- [38] TAKAHASHI, A., *Estudios sobre el estado de desarrollo y de inserción social de las disciplinas y áreas del conocimiento: matemáticas*. Tomo 1. Misión de ciencia y tecnología: Bogotá, 1989.
- [39] THULLEN, PETER, *Aspectos elementales de la ciencia actuarial*. Revista Seguridad Social. Inst. Col. de Seguro Social **1** (1948), 202–207.
- [40] URIBE, A., *El beneficiario del seguro de vida*. Bogotá. Tipografía Hoyos. (1922)
- [41] VACA PERILLA, G., *El Seguro Social en Colombia*. Tesis de Doctor en Derecho y Ciencias Sociales. Universidad Externado de Colombia: Bogotá, 1958.
- [42] *Vida*. Revista de la Compañía Colombiana de Seguros, 1936–1948.
- [43] WALFORD, C., *History of life assurances in the United Kingdom*. Journal of the Institute of Actuaries **XXV** (1885), 1–24; **XXVI** (1886), 437–450.
- Referencias sin autor y antiguas:*
- [44] S.A., *El Porvenir de las Familias: condiciones, garantías i ventajas de esta asociación (sic)*. Compañía Jeneral (sic)de Seguros Mutuos sobre la Vida. 15 págs. (1858). Bogotá. Imprenta de Echeverría.
- [45] S.A., *Condiciones Generales que la Compañía Colombiana de Seguros establece para los seguros marítimos, fluviales y terrestres*. 74 págs. (1875). Bogotá. Imprenta de Medardo Rivas.
- [46] S.A., *Juicio por arbitramento entre varios embarcadores de frutos de esportación perdidos en el naufragio del vapor Francia–Elena y la Compañía Colombiana de Seguros (sic)*. (1877). Bogotá. Imprenta de Echavarría Hermanos.
- [47] S.A., Compañía Colombiana de Seguros (1903), pág. 3. Archivo Fasecolda. Bogotá.
- [48] S.A., *Mérito ejecutivo de las pólizas de seguros de vida: Banco Unión Colombiano contra Compañía Colombiana de Seguros*. (1916) Bogotá.

<sup>37</sup> antiguo nombre de la Universidad Libre de Colombia

- [49] S.A., *Antecedentes del proyecto de ley sobre el establecimiento de las Compañías de Seguros en Colombia*. Compañía Colombiana de Seguros, Compañía General de Seguros, (1909) Bogotá. Imprenta Eléctrica.
- [50] S. A., *Some landmarks in actuarial science*. Catalogue of an exhibition at Staple Inn Hall, UK, 1985.

(Recibido en abril de 2013. Aceptado para publicación en febrero de 2014)

FABIO ORTIZ GUZMÁN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
BOGOTÁ, COLOMBIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA  
BOGOTÁ, COLOMBIA

*e-mail:* [fortiz@uniandes.edu.co](mailto:fortiz@uniandes.edu.co), [fabio.ortiz@uexternado.edu.co](mailto:fabio.ortiz@uexternado.edu.co)