

Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos

Knaster's Type Continua and its Geometric Models

JAVIER CAMARGO^{a,✉}, RAFAEL ISAACS

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

RESUMEN. Un continuo tipo Knaster es un continuo homeomorfo al límite inverso de arcos con funciones de ligadura abiertas que no son homeomorfismos. En este artículo presentamos los modelos geométricos de los continuos tipo Knaster, construidos con una única función de ligadura.

Palabras y frases clave. Continuo, continuo indescomponible, espacio de códigos, continuo tipo Knaster, arco-continuos, continuo encadenable.

2010 Mathematics Subject Classification. 54E45, 54B99, 54F15.

ABSTRACT. A Knaster's type continuum is a continuum homeomorphic to an inverse limit of arcs with open, non-homeomorphic bounding maps. In this paper, we present geometric models of Knaster's type continua with exactly one bounding map.

Key words and phrases. Continuum, indecomposable continuum, code space, Knaster's type continua, arc-continua, chainable continuum.

1. Introducción

En 1910, L. E. J. Brouwer construye el primer continuo indescomponible (sin usar este nombre, el término indescomponible fue introducido por Stefan Mazurkiewics en 1920) para mostrar una curva del plano que es frontera de dos dominios y no se puede escribir como la unión de dos de sus subcontinuos propios, dando respuesta negativa a una pregunta planteada por Arthur Schoenflies. Usando las ideas presentadas en la construcción de Brouwer, Zygmunt Janiszewski muestra un continuo indescomponible, diferente al continuo de Brouwer,

^aEsta investigación fué parcialmente soportada por COLCIENCIAS, proyecto 372, y la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander, proyecto 8191.

en el artículo “*Sur les continus indécomposables*” que escribió junto a Kazimierz Kuratowski y fue publicado en 1920. Posteriormente, en 1924, Bronislaw Knaster muestra una manera más simple de describir el continuo de Janiszewski. Esta descripción es la que usamos hoy en día y se puede ver en la figura 5.

Muchos años después, en 1971, Kuykendall da condiciones necesarias y suficientes para que un límite inverso de una sucesión inversa de continuos métricos sea indescomponible. Aunque es muy conocido que el límite inverso de arcos con función de ligadura $f(t) = 1 - |2t - 1|$ es homeomorfo al continuo de Janiszewski descrito por Knaster, no conocemos una referencia exacta de este hecho; digamos que, es un hecho tan conocido que se menciona en artículos y eventos académicos sin hacer mención de ninguna referencia, tal vez, por la simplicidad que otorgan las herramientas que tenemos hoy en día para aceptarlo como cierto.

De lo anterior, es natural generar continuos que son límite inverso de arcos, usando cualquier función de ligadura abierta en lugar de $f(t) = 1 - |2t - 1|$, que no sea un homeomorfismo. Estos continuos, son ejemplos de continuos indescomponibles y son conocidos como *continuos tipo Knaster*.

Este trabajo está dividido en cinco secciones. En la tercera sección, después de la introducción y los preliminares, se construye como límite inverso generalizado el producto del conjunto ternario de Cantor por el intervalo, espacio topológico que aunque no es un continuo, será útil para las siguientes construcciones. En la sección cuatro, presentamos de manera formal el modelo geométrico para el continuo de Janiszewski; es decir, el continuo tipo Knaster que es inducido con la función de ligadura $f(t) = 1 - |2t - 1|$. Finalizaremos en la quinta sección, mostrando una construcción general para cualquier continuo de este tipo y damos algunos ejemplos puntuales. Los datos históricos que mostramos en la introducción los tomamos de [2].

2. Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente de vacío. El conjunto de enteros positivos lo denotamos por \mathbb{N} . Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierto* si $f(U)$ es abierto en Y , para cualquier abierto U de X .

Sea X un espacio métrico compacto. El conjunto $2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$ es llamado *hiperespacio de X* . Una función $f : X \rightarrow 2^Y$ se dice *semicontinua superiormente* en un punto $x \in X$ si y sólo si para cada abierto V de Y que contiene a $f(x)$, existe una vecindad abierta U de x en X tal que si $z \in U$, entonces $f(z) \subset V$. Una *sucesión inversa generalizada* es una sucesión de parejas $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que X_n es un espacio métrico compacto y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow 2^{X_n}$ es una función semicontinua superiormente, para cada $n \in \mathbb{N}$. A las funciones f_n^{n+1} las llamaremos *funciones de ligadura*. El *límite*

inverso generalizado lo definimos por:

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : x_n \in f_n^{n+1}(x_{n+1}) \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sabemos que $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un espacio métrico compacto y diferente de vacío por [1, teorema 3]. Para mayor información acerca de límites inversos generalizados ver [1]. Si $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ es una función continua, entonces la sucesión de parejas $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es lo que tradicionalmente conocemos como *sucesión inversa* y $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es el espacio *límite inverso*. Si $X_n = X$ y $f_n^{n+1} = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión inversa la denotaremos por $\{X, f\}$ y su límite inverso (generalizado) por $\varprojlim \{X, f\}$.

Definición 1. Un continuo Z lo llamaremos *continuo tipo Knaster*, si existe una función abierta $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que f no es un homeomorfismo y $Z = \varprojlim \{[0, 1], f\}$.

Un continuo tipo Knaster tiene las siguientes propiedades:

- Es indescomponible y por tanto irreducible; es decir, no se puede escribir como la unión de dos de sus subcontinuos propios.
- Es encadenable plano: se puede encajar en el plano y cubrir con cadenas de discos tan pequeños como se quiera.
- Es hereditariamente unicoherente: cualquier subcontinuo es unicoherente pues, la intersección no vacía de dos subcontinuos es otro continuo.
- Tiene dimensión 1.
- Es arco-continuo: todo subcontinuo propio y no degenerado es un arco.

En general, los continuos tipo Knaster han servido como ejemplo y motivación de muchas investigaciones en topología desde la aparición del primer continuo con estas características a principios del siglo XX.

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Diremos que f y g son *equivalentes* si existen homeomorfismos h_1 y h_2 tales que $h_2 \circ f = g \circ h_1$. En [5, (1.3), pág.184], se muestra que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función abierta, entonces existen $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n = 1$ tales que $f|_{[c_i, c_{i+1}]} : [c_i, c_{i+1}] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. De esto, se sigue que cualquier función abierta es equivalente a una función T_n , donde la gráfica de T_n es la unión de n segmentos de recta que une los puntos $(0, 0), (1/n, 1), \dots, ((n-1)/n, 0), (1, 1)$ si n es impar o une los puntos $(0, 0), (1/n, 1), \dots, ((n-1)/n, 1), (1, 0)$ si n es par. Esto lo explicaremos con detalle más adelante.

Cada continuo tipo Knaster lo denotaremos por \mathcal{K}_n para algún entero positivo n , donde $\mathcal{K}_n = \varprojlim \{[0, 1], T_n\}$.

3. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ como límite inverso

En lo que sigue usaremos el sistema de numeración binaria. Esto es, cada $t \in [0, 1]$ lo representaremos (no necesariamente de manera única) como $t = 0.a_1a_2a_3\cdots$, donde $a_n \in \{0, 1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Escribiremos $0.a_1\bar{b}$ para expresar que b se repite infinitamente, es decir, $0.a_1\bar{b} = 0.a_1bbbb\cdots$.

Sea $g : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ la función multivaluada definida de la siguiente forma:

$$g(t) = \begin{cases} 10t, & \text{si } t \in [0, 0.1); \\ \{0, 1\}, & \text{si } t = 0.1; \\ 10t - 1, & \text{si } t \in (0.1, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Esta función se puede escribir simplemente como

$$g(t) = 0.a_2a_3a_4\cdots, \quad \text{donde } t = 0.a_1a_2a_3\cdots$$

Esta función tiene dos imágenes únicamente si $t = 0.1 = 0.01\bar{1}$ que son: $g(0.1) = 0$ y $g(0.01\bar{1}) = 0.1\bar{1} = 1$, como en (1).

Es fácil ver que g es semicontinua superiormente. Sea $\{[0, 1], g\}$ una sucesión inversa. Entonces $\varprojlim\{[0, 1], g\}$ es un espacio métrico compacto y diferente de vacío, por [1, teorema 3].

De la definición de límite inverso y (1) se puede deducir fácilmente la siguiente observación.

Observación 2. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim\{[0, 1], g\}$ si y sólo si existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que, si $x_1 = 0.a_1a_2\cdots$, entonces $x_n = 0.r_{n-1}\cdots r_1a_1a_2\cdots$, para cada $n \geq 2$.

La observación anterior incita de manera natural una función $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \varprojlim\{[0, 1], g\}$. Sea $t = 0.a_1a_2\cdots$ un punto en $[0, 1]$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Definamos φ por

$$\begin{aligned} \varphi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) &= (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{donde} \\ x_1 &= 0.a_1a_2\cdots, \\ x_n &= 0.r_{n-1}\cdots r_1a_1a_2\cdots. \end{aligned} \quad (2)$$

Note que φ está bien definida.

Proposición 3. Sea $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \varprojlim\{[0, 1], g\}$ la función definida en (2). Entonces φ es un homeomorfismo.

Demostración. Probemos que φ es una función continua. Sea $\mathcal{U} = \pi_j^{-1}(U) \cap \varprojlim\{[0, 1], g\}$ un abierto en $\varprojlim\{[0, 1], g\}$, donde U es un abierto en $[0, 1]$ y $j \in \mathbb{N}$. Sea $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \in \varphi^{-1}(\mathcal{U})$. Supongamos que $t = 0.a_1a_2a_3\cdots$. Por la definición dada en (2), sabemos que si $\varphi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $x_1 = t$

y $x_n = r_{n-1} \cdots r_1 a_1 a_2 \cdots$, para cada $n \geq 2$. Además, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$, $x_j = 0.r_{j-1} \cdots r_1 a_1 a_2 \cdots \in U$.

Tomando los $j - 1$ primeros términos de la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definamos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$f(0.b_1 b_2 b_3 \cdots) = 0.r_{j-1} \cdots r_1 b_1 b_2 \cdots, \tag{3}$$

para cualquier $0.b_1 b_2 b_3 \cdots \in [0, 1]$. Es fácil ver que f es una función continua. Así, si $t \in f^{-1}(U)$, donde U es el abierto que usamos en la definición de \mathcal{U} , existe un abierto W en $[0, 1]$ tal que $t \in W$ y $f(W) \subset U$.

Sea $\mathcal{W} = (\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n) \times W$ abierto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$, donde $V_n = \{r_n\}$ para $n \in \{1, \dots, j - 1\}$ y $V_n = \{0, 1\}$ si $n \geq j$. Note que $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \in \mathcal{W}$. Además, observe que si $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) \in \mathcal{W}$, entonces $\pi_j(\varphi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)) = f(t) \in U$. Así, $\varphi(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$ y φ es continua.

Mostremos ahora que φ es inyectiva. Sean $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ puntos en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tales que $\varphi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \varphi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sabemos por (2), que $t = l = x_1$. Sea $x_1 = 0.a_1 a_1 a_3 \cdots$. Supongamos que $r_i = s_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Entonces $x_{k+1} = 0.r_k r_{k-1} \cdots r_1 a_1 a_2 \cdots = 0.s_k s_{k-1} \cdots s_1 a_1 a_2 \cdots$, que reemplazando, tenemos que $x_{k+1} = 0.r_k r_{k-1} \cdots r_1 a_1 a_2 \cdots = 0.s_k r_{k-1} \cdots r_1 a_1 a_2 \cdots$. De lo anterior, fácilmente se sigue que $r_k = s_k$. Así, $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ y φ es inyectiva.

Por otra parte, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \{[0, 1], g\}$, entonces sabemos que $x_1 = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ y $x_n = r_{n-1} \cdots r_1 b_1 b_2 \cdots$ para algunos r_1, r_2, \dots, r_{n-1} en $\{0, 1\}$ y cada $n \geq 2$, por la observación 2. Luego, tomando $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_1) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ podemos verificar que $\varphi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_1) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con lo que podemos concluir que φ es sobreyectiva.

Vimos que φ es una biyección continua y además, como φ está definida entre espacios métricos compactos, φ es cerrada y por tanto, φ es un homeomorfismo, por [5, (1.4), pág.25]. ☑

Es bien conocido que el espacio de Cantor es homeomorfo al espacio producto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Así, por la proposición 3, el límite inverso $\varprojlim \{[0, 1], g\}$ lo podemos representar como mostramos en la figura 1.

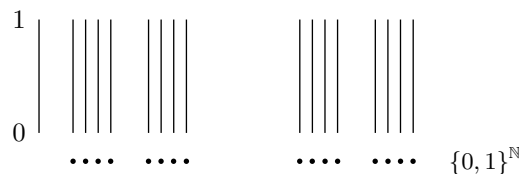


FIGURA 1. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$.

4. Continuo generado por la función tienda

La función abierta más sencilla definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$ que no es un homeomorfismo, es la función cuya gráfica es la unión de dos segmentos de recta, uno que une los puntos $(0, 0)$ y $(1/2, 1)$ y, otro segmento que une $(1/2, 1)$ con $(1, 0)$. Esta función es conocida como la *función tienda*. En esta sección describimos el modelo geométrico del continuo tipo Knaster que es generado con la función tienda.

Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida en sistema binario por:

$$T(t) = \begin{cases} 10t, & \text{si } t \in [0, 0.1]; \\ 10 - 10t, & \text{si } t \in [0.1, 1]. \end{cases}$$

La función T es conocida como la función tienda. Sea $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$. Si $t \in [0, 0.1]$, entonces t lo podemos representar de la forma $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$, donde $a_1 = 0$. Así, $10t = a_1.a_2a_3 \dots = 0.a_2a_3 \dots$. Por otra parte, si $t \in [0.1, 1]$, entonces representamos $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$, donde $a_1 = 1$. Luego, $10 - 10t = 10 - a_1.a_2a_3 \dots = 10 - 1.a_2a_3 \dots = 0.(1 - a_2)(1 - a_3) \dots$. De lo anterior, podemos escribir la función tienda de la siguiente manera

$$T(t) = \begin{cases} 0.a_2a_3 \dots, & \text{si } t = 0.0a_2a_3 \dots; \\ 0.(1 - a_2)(1 - a_3) \dots, & \text{si } t = 0.1a_2a_3 \dots. \end{cases} \quad (4)$$

Sea $\mathcal{K}_2 = \varprojlim \{[0, 1], T\}$. El continuo \mathcal{K}_2 es el primer ejemplo de un continuo tipo Knaster y lo describimos geoméricamente en esta sección.

Definición 4. Sean $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$ en $[0, 1]$. Definamos $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_2$ por $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ inductivamente de la siguiente manera:

$$(1) \quad z_1 = t = 0.a_1a_2a_3 \dots;$$

$$(2) \quad \text{Si } z_k = 0.b_1b_2b_3 \dots, \text{ entonces}$$

$$z_{k+1} = \begin{cases} 0.0b_1b_2b_3 \dots, & \text{si } r_k = 0; \\ 0.1(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) \dots, & \text{si } r_k = 1. \end{cases}$$

De la definición de T que dimos en (4), es fácil ver que $T(z_{k+1}) = z_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2$ y ϕ está bien definida.

Proposición 5. Sea $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_2$ la función dada en la definición 4. Entonces ϕ es una función continua y sobreyectiva.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \pi_k^{-1}(U) \cap \mathcal{K}_2$ abierto de \mathcal{K}_2 , donde U es abierto en $[0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tal que $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \in \mathcal{U}$. Sea $g_{r_j} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $g_{r_j}(0.b_1b_2b_3 \dots) = 0.0b_1b_2b_3 \dots$, si $r_j = 0$, ó $g_{r_j}(0.b_1b_2b_3 \dots) = 0.1(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) \dots$, si $r_j = 1$, para cualquier $0.b_1b_2b_3 \dots \in [0, 1]$. Note que fijando cualquier término r_j de la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, g_{r_j} es una función continua. Sea $g = g_{r_{k-1}} \circ \dots \circ g_{r_1}$ una función continua. Como $g(t) \in U$ existe un abierto W de $[0, 1]$ tal que $t \in W$ y $g(W) \subset U$.

Sea $\mathcal{W} = (\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n) \times W$ abierto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$, donde $V_n = \{r_n\}$ para $n \in \{1, \dots, k-1\}$ y $V_n = \{0, 1\}$ si $n \geq k$. Así, $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \in \mathcal{W}$ y, como $\pi_k(\phi(\mathcal{W})) = f(W) \subset U$, tenemos que $\phi(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$. Por tanto, ϕ es continua.

Finalmente, mostremos que ϕ es sobreyectiva. Sean $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2$ y $t = w_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $r_n = 0$, si $w_{n+1} = 0.0d_1d_2 \dots$, y $r_n = 1$ si $w_{n+1} = 0.1e_1e_2 \dots$, para algunos $d_i, e_j \in \{0, 1\}$. Observe que hay dos posibles formas de escoger r_n si $w_{n+1} = 0.1$. En cualquier caso, tenemos una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por consiguiente, ϕ es sobreyectiva. \checkmark

Como ϕ es una función definida entre espacios métricos compactos, ϕ es una función cociente. De esta forma el conjunto $\{\phi^{-1}((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) : (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2\}$ es una descomposición de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ donde el espacio cociente es homeomorfo a \mathcal{K}_2 , por [4, teorema 3.21].

Lema 6. Sean $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ puntos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tales que $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \phi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $r_m \neq s_m$ para algún $m \geq 2$, entonces $z_{m+1} = 0.1 = 0.0\bar{1}$, $z_m = 0.1\bar{1} = 1$ y $z_i = 0.0\bar{0}$ para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Demostración. Sea $z_m = 0.b_1b_2b_3 \dots$. Supongamos que $r_m = 0$ y $s_m = 1$. Por la definición 4, tenemos que $z_{m+1} = 0.0b_1b_2b_3 \dots$ para $r_m = 0$ y $z_{m+1} = 0.1(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) \dots$ para $s_m = 1$. Así, es fácil ver que $b_i = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $z_{m+1} = 0.0\bar{1} = 0.1$. Como $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2$, $z_m = T(z_{m+1}) = 0.1\bar{1} = 1$ y $z_i = 0.0\bar{0}$ para $i \in \{1, \dots, m-1\}$. \checkmark

A continuación describimos la relación de equivalencia inducida por la función ϕ en el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$.

Teorema 7. Sea $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_2$ la función dada como en la definición 4. Entonces dos puntos $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tienen la misma imagen bajo ϕ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:

- (1) $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$,
- (2) $t = l = 1$, $r_1 \neq s_1$ y $r_i = s_i$ para cada $i \geq 2$,

- (3) $t = l = 0$, $r_1 = s_1 = 1$, $r_2 \neq s_2$ y $r_i = s_i$ para cada $i \geq 3$,
- (4) $t = l = 0$, existe $m \geq 3$ tal que $r_m \neq s_m$, $r_{m-1} = s_{m-1} = 1$, $r_i = s_i = 0$, para $i \in \{1, \dots, m-2\}$, y $r_i = s_i$ para cualquier $i \geq m+1$.

Demostración. Es fácil verificar que si $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ son puntos en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ que satisfacen cualquiera de las cuatro afirmaciones dadas en el enunciado del teorema, entonces $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \phi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$.

Supongamos ahora que $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ son puntos en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tales que $\phi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \phi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ se satisface (1), luego supongamos que $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \neq ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$. Sabemos, de la definición 4, que $t = l = z_1$. Además, notemos que, por el lema 6, podemos asegurar que existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_m \neq s_m$.

Tomemos $r_1 \neq s_1$. Por la definición 4 y el argumento que usamos en la prueba del lema 6, podemos decir que $z_2 = 0.1 = 0.01\bar{1}$ y por tanto $z_1 = t = l = 1$, con lo que tenemos (2).

Ahora miremos que sucede si $r_2 \neq s_2$. Entonces $z_3 = 0.1 = 0.01\bar{1}$, $z_2 = 0.1\bar{1} = 1$ y $z_1 = t = l = 0.0\bar{0}$. Como $t = 0.0\bar{0}$, de la definición 4, $z_2 = 0.00\bar{0}$, si $r_1 = s_1 = 0$, y $z_2 = 0.1\bar{1}$, si $r_1 = s_1 = 1$. De lo anterior, la única posibilidad es que $r_1 = s_1 = 1$ y tenemos (3).

Finalmente, supongamos que $r_m \neq s_m$ para algún $m \geq 3$. Sabemos que $z_{m+1} = 0.1 = 0.01\bar{1}$, $z_m = 0.1\bar{1} = 1$ y $z_i = 0.0\bar{0}$ para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$, por el lema 6. Así, $t = l = 0.0\bar{0} = 0$. Veamos ahora que $r_i = s_i = 0$, para $i \in \{1, \dots, m-2\}$. Supongamos que $r_k = 1$ para algún $k \in \{1, \dots, m-2\}$ y $r_j = 0$, para $j < k$. Entonces, $z_{k+1} = 0.1\bar{1} = 1$ y, por tanto, $z_{k+2} = 0.1 = 0.01\bar{1}$. Como $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2$, podemos ver que $z_j \neq 1$ para cada $j \geq k+2$. Note que $k \in \{1, \dots, m-2\}$ y $k+2 \leq m$, pero esto contradice que $z_m = 1$. Con lo que concluimos que $r_i = s_i = 0$, para $i \in \{1, \dots, m-2\}$ y tenemos la prueba de (4). \checkmark

Es bien conocido que el espacio de Cantor en el intervalo cerrado $[0, 1]$ está formado por los puntos que, en base 3, se pueden escribir únicamente con 0's y 2's. Esto es, cada t en el espacio de Cantor, lo podemos escribir como $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$, donde $a_i \in \{0, 2\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De esta forma, cada punto de la forma $0.0a_2a_3 \dots$ está en $[0, 1/3]$ y cada punto $0.2a_2a_3 \dots$ en $[2/3, 1]$. A su vez, $0.00a_3 \dots$ está en $[0, 1/9]$, $0.02a_3 \dots$ en $[2/9, 1/3]$, $0.20a_3 \dots$ en $[2/3, 7/9]$ y $0.22a_3 \dots$ está en el intervalo cerrado $[8/9, 1]$.

Si reemplazamos 2 por 1 y vemos la representación $0.a_1a_2a_3 \dots$ como una sucesión (a_1, a_2, a_3, \dots) , podemos representar los puntos del espacio de Cantor como mostramos en la figura 2.

Con lo anterior, podemos identificar que la relación dada en el numeral (2) del teorema 7 se hace sobre puntos en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{1\}$ como mostramos es la figura 3.

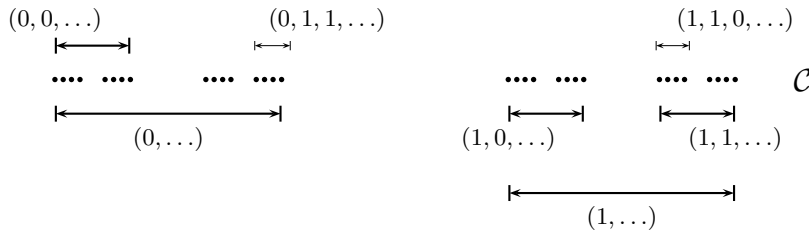


FIGURA 2. Representación del espacio de Cantor

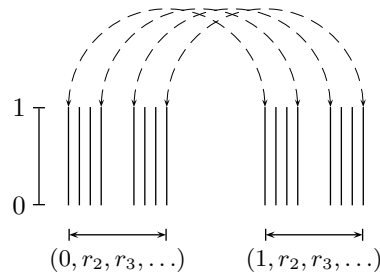


FIGURA 3. $((0, r_2, r_3, \dots), 1) \sim ((1, r_2, r_3, \dots), 1)$.

De manera similar, la relación que presentamos en el teorema 7(3), la mostramos en la figura 4. Observe que esta relación se hace en la segunda mitad del conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0\}$.

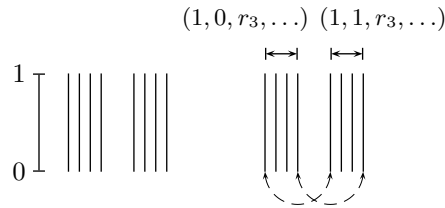
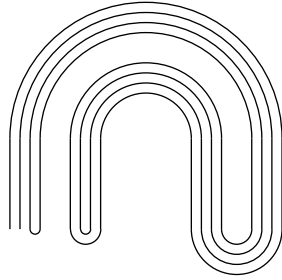


FIGURA 4. $((1, 0, r_3, \dots), 0) \sim ((1, 1, r_3, \dots), 0)$.

Continuando, con la relación descrita en el numeral (4) del teorema 7, para cada $m \geq 3$, podemos ver que el espacio cociente, el cuál es homeomorfo a \mathcal{K}_2 , es el que mostramos en la figura 5 (para una descripción detallada de este espacio ver [3, Fig.4, pág.205]).

5. Modelos de continuos tipo Knaster

En esta sección, describiremos geoméricamente cualquier continuo tipo Knaster, basados en las construcciones que usamos en la sección anterior.

FIGURA 5. Un modelo geométrico de \mathcal{K}_2 .

Sea $T_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua y abierta. Por [5, (1.3), pág.184], podemos suponer que la gráfica de T_n es la unión de n segmentos de recta, que unen sucesivamente los puntos $(0, 0), (1/n, 1), (2/n, 0), \dots, (1, 0)$, si n es par, o $(0, 0), (1/n, 1), (2/n, 0), \dots, (1, 1)$, si n es impar.

Sea $t \in [0, 1]$. En adelante, supondremos que $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$ donde $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$; es decir, t lo representaremos en base n .

Definamos $h : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ la función multivaluada definida por $h(0.a_1a_2a_3 \dots) = 0.a_2a_3a_4 \dots$. Es fácil ver que h es semicontinua superiormente y por tanto $\varprojlim\{[0, 1], h\}$ es un espacio métrico compacto y diferente del vacío, por [1, teorema 3]. Mas aún, en la prueba de la proposición 3, podemos simplemente cambiar el conjunto $\{0, 1\}$ por $\{0, \dots, n-1\}$ y obtenemos que la función definida en (2), es en realidad un homeomorfismo entre $\{0, \dots, n-1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ y $\varprojlim\{[0, 1], h\}$. Así, es inmediata la prueba del siguiente teorema.

Teorema 8. Sea $\Sigma = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $t = 0.a_1a_2a_3 \dots \in [0, 1]$. Entonces la función $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \varprojlim\{[0, 1], h\}$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) &= (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{donde} \\ x_1 &= 0.a_1a_2 \dots, \quad \text{y} \\ x_n &= 0.r_{n-1} \dots r_1a_1a_2 \dots, \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

De lo anterior, representamos el espacio $\varprojlim\{[0, 1], h\}$ como mostramos en la figura 6.

A continuación, definiremos formalmente la función $T_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, usando la numeración en base n .

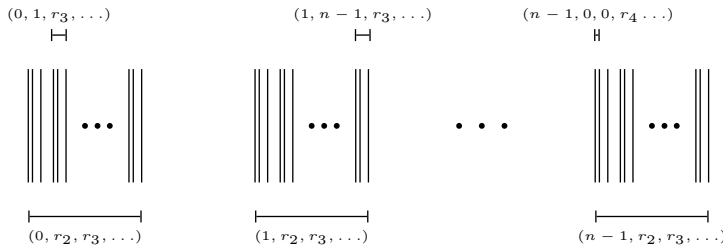


FIGURA 6. $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$.

Definición 9. Sea $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$, donde $a_i \in \Sigma$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $T_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ lo definimos por:

$$T_n(t) = \begin{cases} 0.a_2a_3 \dots, & \text{si } t = 0.a_1a_2a_3 \dots, \text{ y } a_1 \text{ es par;} \\ 0.(n-1-a_2)(n-1-a_3) \dots, & \text{si } t = 0.a_1a_2a_3 \dots, \text{ y } a_1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que $T_n(0.i\overline{n-1}) = T_n(0.i + 1\overline{0})$, para cada $i \in \{0, \dots, n-2\}$, de lo que podemos concluir que T_n es una función continua. Definimos $\mathcal{K}_n = \varprojlim \{[0, 1], T_n\}$. Ahora, tomando la misma idea que mostramos en la definición 4, tenemos la siguiente descripción natural:

Definición 10. Sean $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $t = 0.a_1a_2a_3 \dots$ en $[0, 1]$. Definamos $\xi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_n$ por $\xi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ inductivamente de la siguiente manera:

- (1) $z_1 = t = 0.a_1a_2a_3 \dots$;
- (2) Si $z_k = 0.b_1b_2b_3 \dots$, entonces

$$z_{k+1} = \begin{cases} 0.r_k b_1 b_2 b_3 \dots, & \text{si } r_k \text{ es par;} \\ 0.r_k(n-1-b_1)(n-1-b_2)(n-1-b_3) \dots, & \text{si } r_k \text{ es impar.} \end{cases}$$

De la definición 9, es fácil ver que $T_n(z_{k+1}) = z_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$; es decir, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma_n$ y la función ξ está bien definida. Reescribiendo la prueba de la proposición 5 para nuestro conjunto Σ , podemos concluir que ξ es continua y sobreyectiva. Luego sólo nos resta describir la relación de equivalencia que induce la función ξ sobre el conjunto $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ para obtener el modelo geométrico de \mathcal{K}_n .

Sean $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ puntos en $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tales que $\xi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \xi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente, $t = l = z_1$. Sea $z_1 = 0.a_1a_2a_3 \dots$, donde $a_i \in \Sigma$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \neq s_k$. Sea $z_k = 0.b_1b_2b_3 \dots$. Si r_k y s_k son pares, entonces $z_{k+1} = 0.r_k b_1 b_2 \dots =$

$0.s_k b_1 b_2 \dots$. Pero esto claramente contradice que $r_k \neq s_k$. De la misma manera tenemos una contradicción si r_k y s_k son impares. Supongamos ahora que r_k es par y s_k impar. Entonces, por la definición 10, $z_{k+1} = 0.r_k b_1 b_2 \dots = 0.s_k(n-1-b_1)(n-1-b_2)\dots$. Tenemos dos posibles soluciones de esta igualdad:

- (1) $b_i = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y $r_k = s_k + 1$. Esto es, r_k y s_k son consecutivos y el mayor debe ser par.
- (2) $b_i = n-1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y $r_k = s_k - 1$. Esto es, r_k y s_k son consecutivos y el mayor debe ser impar.

Antes de dar la descripción de la relación enunciaremos un lema que nos ayudará a tener una idea previa de este cociente.

Lema 11. Sean $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ puntos en $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tales que $\xi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \xi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces:

- (1) Si $r_k \neq s_k$ para alguna k , entonces $r_i \in \{0, n-1\}$, para todo $i < k$;
- (2) Si $r_k \neq s_k$ para alguna k , entonces $r_i = s_i$ para todo $i \neq k$.

Demostración. Supongamos que $r_k \neq s_k$, para algún k . Entonces, por el análisis hecho previamente al enunciado de este lema, r_k y s_k deben ser consecutivos y además, $b_i = 0$ ó $b_i = n-1$, para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $z_k = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$. Supongamos que $r_i \notin \{0, n-1\}$ para algún $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Entonces z_{i+1} no puede ser $0 = 0.\overline{0}$ ni $1 = 0.\overline{n-1}$ (ver definición 10). Como $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_n$; es decir, $T_n(z_{i+1}) = z_i$, tenemos que z_{i+1} no puede ser tampoco 0 ni 1, e inductivamente tenemos que z_j no puede ser 0 ni 1, para ninguna $j \geq i+1$, por la definición 9. Pero esto contradice que $z_k = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$, donde $k \geq i$ y $b_i = 0$ ó $b_i = n-1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, $r_i \in \{0, n-1\}$, para todo $i < k$.

Para probar la segunda parte. Supongamos de nuevo que $r_k \neq s_k$, para alguna k . Notemos que r_k y s_k son consecutivos; tomemos r_k par y s_k impar. Como $z_{k+1} = 0.r_k b_1 b_2 \dots = 0.s_k(n-1-b_1)(n-1-b_2)\dots$, tenemos que alguno de los dos, r_k o s_k , no puede estar en $\{0, n-1\}$. Así, z_{k+1} es diferente a 0 y 1, por la definición 9, y z_j no puede ser 0 ni 1 para ninguna $j \geq k+1$, con lo que nuestra afirmación se sigue de la primera parte. \square

Para hacer una descripción detallada de la relación de equivalencia que la función ξ induce sobre $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$, debemos hacer una diferencia si n , el cardinal de Σ , es par o impar. Las dos demostraciones son esencialmente la misma, luego, mostraremos únicamente una prueba del caso cuando n es impar.

Teorema 12. Sea $\xi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_n$ la función dada como en la definición 10, donde n es impar. Entonces dos puntos $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ en $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tienen la misma imagen bajo ϕ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:

- (1) $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$;
- (2) $t = s = 1 = 0.\overline{n-1}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que r_k es par, $r_k = s_k - 1$, $r_i = s_i = n - 1$, para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, y $r_i = s_i$ para cada $i \geq k + 1$;
- (3) $t = s = 0.\overline{0}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que r_k es par, $r_k = s_k + 1$, $r_i = s_i = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, y $r_i = s_i$ para cada $i \geq k + 1$.

Demostración. Sean $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ en $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$. Es fácil ver que si los puntos satisfacen alguna de las afirmaciones (1), (2) o (3), entonces $\xi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \xi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$.

Supongamos que $\xi((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = \xi((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por la definición 10, sabemos que $z_1 = t = l$. Además, por el lema 11, si $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) \neq ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$, entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \neq s_k$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $r_k < s_k$ y r_k par. Como r_k y s_k deben ser consecutivos, tenemos que $r_k = s_k - 1$. Por la definición 10 de ξ , sabemos que $z_{n+1} = 0.r_k b_1 b_2 b_3 \dots = 0.s_k (n-1-b_1)(n-1-b_2)(n-1-b_3) \dots$, de lo que se sigue que $b_i = n - 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Pero, como n es impar, no es difícil ver que $t = 0.\overline{n-1}$ y $r_i = n - 1$, para $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, con lo que tenemos la condición (2).

De manera similar se obtiene la afirmación (3) cuando $s_k < r_k$ y r_k es par. De esta manera descartamos todas las posibilidades y tenemos la prueba de nuestro teorema. \checkmark

A continuación en la figura 7, mostramos de acuerdo al teorema 12, la representación geométrica de los continuos tipo Knaster \mathcal{K}_3 y \mathcal{K}_5 .

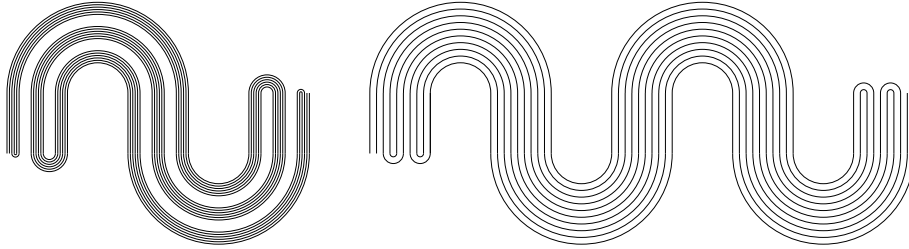


FIGURA 7. \mathcal{K}_3 y \mathcal{K}_5 , respectivamente.

Finalizaremos nuestro artículo enunciando un teorema cuya demostración es muy similar a lo que hemos desarrollado en el teorema 12, donde describimos la relación de equivalencia sobre $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ para obtener un modelo geométrico de \mathcal{K}_n , cuando n es par.

Teorema 13. Sea $\xi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_n$ la función dada como en la definición 10, donde n es par. Entonces dos puntos $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t)$ y $((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$ en $\Sigma^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ tienen la misma imagen bajo ϕ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:

- (1) $((r_n)_{n \in \mathbb{N}}, t) = ((s_n)_{n \in \mathbb{N}}, l)$;
- (2) $t = s = 1 = 0.\overline{n-1}$, r_1 par, $r_1 = s_1 - 1$ y $r_i = s_i$, para cada $i \geq 2$;
- (3) $t = s = 0.\overline{0}$, existe $k \geq 2$ tal que r_k es par, $r_k = s_k - 1$, $r_{k-1} = s_{k-1} = n - 1$, $r_i = s_i = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n - 2\}$, y $r_i = s_i$ para cada $i \geq k + 1$;
- (4) $t = s = 0.\overline{0}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que r_k es par, $r_k = s_k + 1$, $r_i = s_i = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, y $r_i = s_i$ para cada $i \geq k + 1$.

Usando el teorema 13, mostramos en la figura 8 el modelo del continuo tipo Knaster \mathcal{K}_4 .

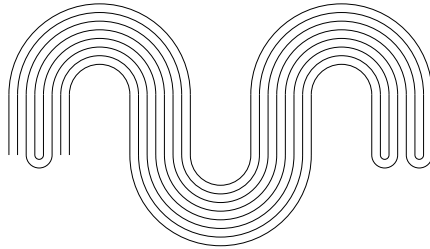


FIGURA 8. \mathcal{K}_4 .

Referencias

- [1] W. T. Ingram and W. S. Mahavier, *A Inverse Limits of Upper Semi-Continuous Set Valued Functions*, Houston J. Math. **32** (2006), no. 1, 119–130.
- [2] F. L. Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, vol. 27, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [3] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, USA, 1968.
- [4] Jr. S. B. Nadler, *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, USA, 1992.

- [5] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, USA, 1942.

(Recibido en agosto de 2012. Aceptado en abril de 2013)

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
CIUDAD UNIVERSITARIA, CARRERA 27, CALLE 9
BUCARAMANGA, SANTANDER, A.A.678, COLOMBIA
e-mail: jcam@matematicas.uis.edu.co
e-mail: risaacs@uis.edu.co

