Lecturas Matemáticas
Volumen **33** *(2) (2012), páginas 143–154*
ISSN 0120–1980

Legendre y la medición del meridiano

Legendre and the measure of the meridian

Álvaro Antón Sancho
Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España

Resumen. Tras la caída del absolutismo monárquico en Francia con la Revolución Francesa en 1789, el mundo científico se enfrentó al reto de la definición e implantación de un nuevo sistema de medida extraído de la naturaleza y de carácter universal. Esta empresa, cuya realización conllevó la medición del cuadrante del meridiano terrestre, supuso un momento de extraordinario avance para las diversas ciencias criadas al calor de la Ilustración, en particular para las matemáticas, en plena época de efervescencia en el desarrollo del cálculo infinitesimal. En esta aventura científica son numerosos los nombres protagonistas. En este artículo nos ocuparemos de explicar la aportación del matemático Adrien–Marie Legendre al problema de la medida del meridiano, cuyo trabajo de fundamentación matemática no siempre ha sido justamente reconocido por la historiografía científica.

Key words and phrases. Legendre theorem, new science, measurement of meridian, spherical trigonometry.

Abstract. After the fall of absolute monarchy in France with the French Revolution in 1789, the scientific world was faced with the challenge of defining and implementing a new system of measurement extracted from nature and universal. The work, whose realization involved the measurement of the meridian quadrant, was a time of remarkable progress for the various sciences raised in the Enlightenment, particularly for mathematics, at the height of success in the development of calculus. In this scientific adventure there are numerous players names. In this paper we will explain the contribution of mathematician Adrien–Marie Legendre to the problem of measuring the meridian, whose mathematical foundation work has not always been rightly recognized by the scientific historiography.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 01A80

1. Introducción

Las ideas ilustradas de igualdad entre los hombres que sustentaron la Revolución Francesa de 1789 tuvieron, según ANTONIO TEN,[1] dos expresiones de alcance universal y que hayan perdurado en el tiempo: la Declaración de Derechos del Hombre y el Sistema Métrico Decimal.

Desde la antigüedad, la necesidad de medir obligó al hombre a idear unidades que le permitieran, por comparación, calcular las dimensiones cuantificables de los cuerpos.[2] Al principio se usaron patrones relacionados con las partes del cuerpo, como el palmo o el pie, lo que dio paso al uso de diversos instrumentos como varas de longitud diversa. Todo esto condujo a que en la Francia del siglo XVIII existiera una extraordinaria variedad de sistemas de medida dependientes de las regiones y que incluso podían variar dentro de una misma región. Esta realidad, signo de la antigua realidad pre–revolucionaria, dificultaba las nuevas necesidades comerciales y atentaba contra los principios fundacionales de la Revolución. Se decidió crear un nuevo patrón de medida extraída de la naturaleza para asegurar su perpetuidad y su extensión universal. Tal unidad se obtendría de la medida del meridiano terrestre, cuya medición ya había suscitado el interés de los científicos.

La invención de una nueva medida que, por su carácter universal, contribuya a hacer a todos los hombres iguales, se convirtió en una de las hazañas científicas de mayor impacto de la época contemporánea y en motivo de intenso estudio para matemáticos y físicos, lo que redundó en un significativo avance en el conocimiento de las diversas ciencias. En este avance ocupa un lugar destacado nuestro protagonista, ADRIEN-MARIE LEGENDRE. Si bien no participó activamente en la medida del meridiano, explicaremos en este artículo cómo estuvo involucrado desde su comienzo en el mismo, alcanzando su papel más destacado en los trabajos de fundamentación matemática de la exactitud de la medida y por tanto de la definición de metro.

En la sección *Legendre y su tiempo* haremos un breve repaso por el contexto social y científico en que vivió y desarrolló su labor LEGENDRE; repaso completamente insuficiente pero que nos servirá para comprender la razón de ser en su época de cuanto expliquemos después. En *El sistema métrico decimal* explicaremos cómo la influencia de las ideas revolucionarias en el mundo científico deviene en la orden de establecer un nuevo sistema métrico y cómo

[1]A. TEN: *Medir el metro. La historia de la prolongación del arco de meridiano Dunkerque-Barcelona, base del Sistema Métrico Decimal*, Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia, CSIC, Valencia, 1996.

[2]W. KULA: *Las medidas y los hombres*, México, Siglo XXI, 1980.

esta empresa exige de la obra científica de medida de la longitud del meridiano, cuyos entresijos serán explicados en la siguiente sección, La medición del meridiano, donde, además, explicaremos el papel de Legendre en el proyecto. Finalmente, en *El teorema de Legendre en trigonometría esférica* veremos la obra matemática de Legendre en torno a la cuestión del meridiano, en particular el teorema de Legendre y sus aportaciones en trigonometría esférica, que sustentan la exactitud de las mediciones.

2. Legendre y su tiempo[3]

Nacido el 18 de septiembre de 1752 en París, pocos son los datos que tenemos sobre la ascendencia de Adrien–Marie Legendre. Sus estudios en el colegio Mazarino (nombre popular del Colegio de las Cuatro Naciones) apuntan a su carácter acomodado. El Cardenal Mazarino dispuso una pequeña fortuna para que a su muerte, acaecida en 1661, se fundara un colegio destinado a la formación de jóvenes de las cuatro naciones sometidas a obediencia real francesa desde el final de la guerra de los Treinta Años a través de la Paz de Westfalia y el Tratado de los Pirineos: Artois, Alsacia, Piñerol y Cerdeña. El Colegio de las Cuatro Naciones así nacido y asociado a la Universidad de la Sorbona de París se convirtió pronto en un centro prestigioso de formación elitista destacado por sus estudios científicos, especialmente matemáticos[4]. Y allí fue donde recibió su formación matemática Legendre de la mano del padre Marie, el catedrático de matemáticas, sucesor de De la Caille en la cátedra. Pasaba de esta manera a formar parte de una estirpe intelectual que aglutinaba al astrónomo Bailly, primer alcalde de París, el físico Coulomb o el químico Lavoisier.

Eran escasas las tareas remuneradas que un científico podía realizar, al menos aquellas que le pudieran dejar tiempo para realizar su investigación. Por ejemplo, Bezout o Laplace fueron examinadores de la Escuela de Artillería y Marina. Sin embargo, la posición adecuada para que un científico alcance influencia es la de miembro de la Academia de Ciencias. Creada en 1666 por Colbert, el primer ministro de Luis XIV, bajo el auspicio de la nueva ciencia marcada por el racionalismo cartesiano, se había convertido en la institución científica por excelencia de Francia hasta su disolución en 1793 por las autoridades de la Revolución. La proliferación durante todo este periodo de importantes trabajos de investigación y tratados científicos se debe en buena parte a una exigencia de la Academia para con los científicos que pretenden acceder a ella. Bajo esta perspectiva hay que entender la publicación de un trabajo de balística de Legendre en las *Mémoires des savants étrangers* de la Academia de 1782 o la publicación de sus *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes* en 1783, lo que le valdrá su entrada en la Academia ese mismo año.

[3] M. E. de Beaumont: *Éloge historique de Adrien–Marie Legendre*. Mémoires de l'Académie des Sciences, **32** (1864).

[4] A. Franklin: *Histoire de la Bibliothèque Mazarine et du palais de l'Institut*, Welter, Libraire-Éditeur, París, 1901.

Con la llegada de la Revolución Francesa en 1789, Legendre es un académico consolidado que dedica su trabajo a la trigonometría esférica, a la geodesia y a la elaboración de su tratado de geometría que vendrá a comentar los *Elementos* de Euclides bajo la perspectiva de la nueva ciencia, los *Éléments de géométrie*, cuya primera edición verá la luz en 1794.

Los primeros años de la Revolución no suponen una ruptura en la actividad de la Academia ni en el trabajo científico de Legendre. El verdadero cambio viene con la supresión de la Academia en 1793. Para Legendre esta supresión equivale a la eliminación de su única fuente de ingresos. Parece que las dificultades económicas, junto con la antipatía que a Legendre le generaron los episodios sangrientos protagonizados por la Revolución, provocó un retiro[5] en el que Legendre aprovechó para ultimar los *Éléments de géométrie*. Desde 1795, con el advenimiento de cierta estabilidad política y la fundación del Instituto Nacional de Ciencias y Artes, una verdadera reinstauración de la Academia, comienza también para Legendre un periodo de reflorecimiento científico. Es el momento en que nuestro autor se centrará primero en los trabajos relativos a la medición del meridiano y el establecimiento del Sistema Métrico Decimal, sobre lo que nos ocuparemos después; en el estudio de la teoría de números, lo que culminará con la publicación en 1798 de su *Essai sur la théorie des nombres* y de su tratado *Théorie des nombres* de 1830 en los que trabaja en particular sobre la resolución del último teorema de Fermat; en estudios astronómicos (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, 1806) y sobre el postulado euclidiano de las paralelas (*Reffléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, 1833) aunque sin llegar a la formulación de geometrías no euclídeas, lo que alcanzarán posteriormente Gauss y Bolyai.

Murió en un estado de plena actividad intelectual el 10 de enero de 1833, con un reconocimiento creciente por parte de la comunidad científica a su obra intelectual[6].

3. El sistema métrico decimal

En los albores mismos de la Revolución Francesa, mientras los representantes del tercer estado, la burguesía y el bajo clero juraban fidelidad a los criterios políticos y sociales ilustrados que sustentan la revolución en la sala del *Jeu de Paume* (Juego de Pelota) de Versalles, los miembros de la Academia de Ciencias proclaman asimismo su adhesión a la expresión de este nuevo modo de

[5] C. J. Jacobi, A.–M. Legendre: *Correspondence mathématique entre Legendre et Jacobi*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome **9** (1875), págs. 126–142. Carta de Legendre a Jacobi de 30 de junio de 1832, pág. 141 : "Je me suis marié beaucoup plus tard que vous et à la suite d'une révolution sanglante qui avait détruit ma petite fortune; nos avons eu de grands embarras et des moments bien difficiles à passer."

[6] M. Poisson: *Discours prononcé au funérailles de M. Legendre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), **10** (1833), pp. 360–363.

pensar en el ámbito de sus competencias. La Academia de Ciencias, que había nacido durante el reinado de Luis XIV, y estuvo inicialmente gobernada por el pensamiento de científicos como Descartes, Pascal o Fermat, encarnaba el viejo absolutismo monárquico en lo institucional a la vez que las ideas ilustradas de la nueva ciencia[7] en lo intelectual. Así puede entenderse que fuera suspendida e integrada en el Instituto nacional de ciencias y artes en la época del gobierno de la Convención habiendo sido la autora de uno de los mayores hitos científicos revolucionarios: la creación de un Sistema Métrico Decimal.

La instauración de un nuevo sistema de medidas unificado va de la mano de los grandes cambios sociales de la revolución porque se enfrenta a la pluralidad de sistemas de medida dependientes de la región que abundaban en Francia profundamente ligadas a un sistema monárquico absolutista en extinción. La unificación de pesos y medidas responde al surgimiento de sentimientos tales como la necesaria igualdad entre los seres humanos, la pasión nacionalista y el deseo de expresar en el exterior las nuevas ideas que se están forjando. Esta unificación también respondió al deseo de hacer más eficiente y equitativa la recolección de impuestos (particularmente los impuestos que se pagaban en especie). Asimismo se entendía necesario potenciar unas relaciones comerciales asfixiadas en buena parte debido a la multiplicidad de sistemas de medida. La nueva clase social naciente, la burguesía, altamente dependiente del comercio, se encargó en los meses anteriores a la revolución de expresar de modo muy explícito esta preocupación ante el rey a través de los *Cahiers de doléances*[8] (Cuadernos de quejas), documentos en donde el pueblo de las diferentes regiones podían expresar periódicamente sus inquietudes ante el rey aunque no sólo la burguesía manifestó este deseo, sino que la inquietud por reformar el sistema de pesos y medidas antes del estallido de la revolución fue compartida por campesinos y siervos.

Como se puede leer en las actas de la Asamblea Constituyente, la Asamblea Nacional Francesa aprueba el 8 de mayo de 1790 solicitar a la Academia de Ciencias la definición de un sistema de medida unificado para toda Francia. Los académicos quisieron llevar a cabo esta empresa bajo los criterios de que el sistema métrico sea decimal, ajustándose de esta forma al sistema de numeración usado en occidente, y que tal unidad de medida de longitud se extraiga directamente de la naturaleza. El objetivo era buscar una medida universal en el tiempo y en el conjunto de los seres humanos.

---

[7] A. Antón: *Las ciencias de la naturaleza, el derecho y la moral en la ilustración.* La razón histórica **No. 18** (2012), 45–54.

[8] En los Cahiers de 1788 hay referencias a la unificación de un sistema métrico como las siguientes: “Que en todo el reino haya una sola forma de medir, las mismas pesas, las mismas medidas, ya que tenemos un único idioma.”
“Tanta diversidad en las costumbres influye sobremanera en los caracteres.”
“Que haya una medida general determinada por su Majestad para todos los territorios de su reino.”

La idea de una unidad de medida estable, homogénea y universal no era nueva. El matemático La Condamine (1701–1774) ya había propuesto años antes el uso de la toesa de Perú, que está relacionada con la medición del meridiano y mide unos dos metros y, más tarde, una medida relativa al movimiento del péndulo segundero. Esta última medida no respondía a los criterios buscados de universalidad porque depende de la fuerza local de la gravedad, que varía según el punto de la superficie terrestre. Sin embargo, en la primera propuesta subyace una idea que estará en el fundamento mismo de la definición que dará la Academia para la nueva unidad de longitud respecto de la cual estén ligadas todas las medidas: la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. El 26 de marzo de 1791 la Academia adopta esta definición y la denominación helénica de *métron*, término griego para designar medida, en francés *mètre*, a propuesta del matemático francés Jean-Charles de Borda (1733–1799).

El nuevo sistema métrico verifica que cualquier medida está ligada a la unidad base, el metro. Los múltiplos se denotan a través de prefijos griegos (deca, hexa, kilo) y los submúltiplos a través de prefijos latinos (deci, centi, mili). Entienden los científicos que, de esta manera, se simplifican la expresión de las medidas y los cálculos. Pero supone también varias exigencias. La primera de ellas es adaptar todas las magnitudes al sistema decimal de numeración. Era preciso, en particular, adaptar al sistema decimal la medida del tiempo[9] y de los ángulos, cuya medida más extendida de medición sigue el sistema sexagesimal de numeración. Respecto de los ángulos, Legendre fue firme defensor de que su medición fuese trasladada al sistema decimal, como postula en su Tratado de trigonometría rectilínea y esférica (1849).

La segunda exigencia tiene que ver con la empresa que encarga la Convención a una comisión de la Academia de Ciencias en el decreto de 1795, que constituye la oficial adopción del Sistema Métrico Decimal. Básicamente las tareas asignadas tienen que ver con la difusión entre las clases populares del nuevo sistema de medida y el diseño de los instrumentos precisos para la construcción de modelos para las nuevas unidades. Los miembros nombrados de esta comisión son Adrien–Marie Legendre, Charles–Étienne Cocquebert y François Gattey. Aquí se sitúa el segundo compromiso activo de Legendre con el Sistema Métrico: encabeza todo un proceso de instrucción popular y de difusión de las nuevas medidas a través de las administraciones públicas en contacto con los ciudadanos y de la educación en las escuelas.[10] Decimos

[9]H. Vera, *Decimal Time: Misadventures of a Revolutionary Idea, 1793-2008*, KronoScope: Journal for the Study of Time, vol. 9, 2009, pp. 29–48.

[10]Es parte del trabajo efectuado por el Comité de Instrucción Pública llevado a cabo por la Convención. Puede consultarse en las Memorias sobre la Instrucción Pública del matemático Condorcet (1743-1794). Véase también: G. Weinberg: *Condorcet y la instrucción pública*, Cuadernos Americanos, año III, vol. V, n. 17, 1989.

que es el segundo porque el primero de esos compromisos activos había sido el de colaborar en la medición del cuarto de meridiano.

4. La medición del meridiano

El decreto de la Asamblea Nacional de 1791 por el que se define por primera vez el metro como unidad de longitud extraído de la medida del cuadrante del meridiano propone también que esa medida ha de realizarse midiendo la porción de meridiano que va de Dunkerque (Francia) a Barcelona (España), que corresponde al meridiano que pasa por París. Ya se han desarrollado técnicas en la época para medir la latitud de un punto dado de la superficie terrestre, por lo que es suficiente tener la medida de esta porción de meridiano para conocer la longitud del cuadrante . El 30 de mayo del mismo año, la Academia elige doce comisarios para efectuar los diversos trabajos implicados en la operación de medida. Aquí se encuentran los nombres de los científicos más relevantes de la Francia del momento. Para nuestros propósitos es relevante señalar de entre ellos los nombres de Legendre y Méchain. Es claro que el proyecto de la medición del meridiano se explica dentro de los parámetros de pensamiento de la nueva ciencia de Galileo y Newton, de corte empirista en lo experimental y matemático en su método[11]. También se percibe la relación de este estudio científico con la vida social, rasgo característico de la ciencia europea del momento, lo que se puede comprobar por el auge de academias científicas y revistas de investigación. Pero, de modo particular, la medición del meridiano va a suponer un acontecimiento de gran esplendor para los contenidos mismos de las ciencias físicas y matemáticas. En efecto, como veremos, será necesario el desarrollo de avanzadas técnicas geodésicas y trigonométricas y abundante estudio técnico que dará como resultado un abultado corpus científico derivado de los trabajos necesarios para hacer efectiva la medición. Legendre hará, en este sentido, aportaciones definitivas, como tendremos la oportunidad de explicar.

De los doce miembros de la comisión citados, la Academia elige tres para llevar a cabo la medición efectiva: Legendre, Cassini y Méchain. Por cuestiones ideológicas, Cassini decide abandonar el proyecto y Legendre pidió permiso para no incorporarse con el fin de dedicarse al estudio de las cuestiones trigonométricas y geodésicas que tienen que ver con la medición. Así, la Academia nombró a Jean Baptiste Delambre para que acompañara a Méchain en la expedición. El primero medirá el tramo de Dunkerque a Rodez y el segundo de Rodez a Barcelona. Debido a la configuración abrupta del terreno, una medición longitudinal a base de la yuxtaposición de la unidad de medida sobre la línea del meridiano se muestra imposible. El método adecuado a la medida de una gran longitud sobre la superficie terrestre es el método de

[11] A. Antón: *La nueva ciencia germen de la nueva Europa*, en preparación.

triangulación, inventado en el siglo XVII por el matemático holandés Willebrord Snell[12] (1580–1626). El método de triangulación permite sustituir la medición de la distancia que se desea por la de una distancia accesible junto con la de diversos ángulos escogidos para que sean fácilmente medibles. La distancia deseada resulta de la aplicación de trigonometría plana sobre los datos que se tienen. El método se basa en recubrir el segmento cuya longitud se desea conocer de triángulos con los criterios habituales del teselado de base triangular, en particular, que los triángulos adyacentes lo sean entre sí por un único lado completo. La construcción de un teselado así parte de la elección de un segmento cuya medida sea accesible, llamado base principal de la triangulación, a partir del cual se construyen los triángulos del teselado, llamados triángulos geodésicos. Los triángulos se van construyendo de tal forma que los correspondientes ángulos sean accesibles. De esta forma, la triangulación está formada por triángulos resolubles todos ellos. Finalmente, como la triangulación recubre el segmento deseado, se puede obtener su medida simplemente proyectando lados convenientes de los triángulos que forman el teselado.

La expedición comienza en 1792[13] y concluye seis años después con todas las mediciones hechas. Ahora es necesario comprobar su exactitud y llevar a cabo los cálculos necesarios para concluir la medida del metro. En aras a la anhelada universalidad del nuevo sistema de medida, el gobierno del Directorio convoca a las naciones extranjeras para formar una comisión internacional que concluyera la labor científica. Ocho naciones responden al ofrecimiento. Legendre, que no participó de las labores de medición de la porción de meridiano, se unió ahora de modo activo a las tareas de la comisión como uno de los representantes científicos de Francia, junto con Laplace, Lagrange, Lefèvre-Gineau, Méchain y Delambre.[14] Por fin en 1799 se hizo público en un informe de la comisión de expertos la definitiva medida de la longitud del metro: un metro equivale a 1,94909 toesas[15]. El 22 de junio de 1799 se presentó a la Asamblea Francesa el patrón de metro elaborado en una aleación de platino e iridio.

La comisión tuvo que hacer frente a una latente desconfianza debido a las duras críticas por la aparente imprecisión en la medida del meridiano. Una de las razones está en el hecho de que las mediciones básicas están hechas sobre longitudes planas con técnicas también de trigonometría plana, cuando los triángulos son en realidad triángulos esféricos. Esta es la dificultad que se ocupa de resolver Legendre a través de la formulación de su famoso teorema

[12]W. Snell: *Villebrordi Snelli doctrinæ triangulorum canoniæ libri quatuor*, 1627 (publicado póstumamente).

[13]K. Alder: *La medida de todas las cosas*. Madrid, Taurus, 2004. D. Guedj: *El metro del mundo*. Barcelona, Anagrama, 2003.

[14]T. Bugge: *Science in France in the Revolutionary Era*. Maurice P. Crosland (ed.). Cambridge: MIT Press, 1969.

[15]P. Mechain & J.-B. Delambre: *Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de l'Arc du Méridien*. París, Baudouin, Imprimeur de l´Institut National, Vol I 1806, Vol II 1807, Vol III 1810.

sobre trigonometría esférica que tendremos la oportunidad de explicar en la siguiente sección[16].

Otra discusión que se planteó tiene que ver con la esfericidad de la tierra. Isaac Newton afirmó en los *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687) que la tierra debía estar ligeramente achatada en los polos debido a las fuerzas engendradas por su movimiento de rotación. Esta teoría está sustentada en los resultados sobre variaciones en la gravedad local comprobada en la expedición de los matemáticos Richer y Cayenne a la Guyana Francesa. Estos datos conducen a considerar la tierra como un elipsoide de revolución más que como una esfera. Aprovechando el teorema de mínimos cuadrados de Legendre, Gauss publicó en 1799 sus propios resultados en torno a la determinación del metro considerando la tierra como una elipse de revolución y computando su excentricidad[17]. En el fondo, el desarrollo que hace Gauss se basa en aplicar el floreciente cálculo integral para expresar la medida de una cierta porción del meridiano como una función de las latitudes que determinan esa porción y de la excentricidad de la elipse que lo contiene. Finalmente esa función puede aproximarse mediante polinomios de Taylor y generar así una expresión a la que poder aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener de esta manera una medida de la longitud de la porción de meridiano así como el valor de la excentricidad[18].

5. El teorema de Legendre en trigonometría esférica

El método de triangulación empleado por Méchain y Delambre para calcular la longitud del cuadrante del meridiano exige de justificar en qué condiciones se puede sustituir la resolución de un triángulo esférico por la resolución de un triángulo rectilíneo. Este es el propósito preciso del teorema de Legendre,

[16]El teorema es enunciado y demostrado en los *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien* (1798-1799), de Delambre, obra en la que se explica todo el proceso seguido por Delambre y Méchain para la medición de la porción de meridiano entre Dunkerque y Barcelona y que consta de una primera parte escrita por Legendre con la explicación trigonométrica y geodésica que fundamenta la veracidad de las mediciones hechas. En esta primera parte se demuestra el teorema fundamental que lleva su nombre. Con anterioridad el teorema había sido enunciado por Legendre, aunque sin demostración, en las *Mémoires de l'Académie royale des Sciences* de 1787, tituladas *Mémoires sur les operations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*.

[17]C. F. Gauss: *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, vol. 4, 1799.

[18]H. Estrada, J.M. Ruiz & J.G. Triana: *El origen del metro y la confianza en la matemática*, Educación e Historia, vol. 19, n.1, Junio (2011), págs. 89–101.

enunciado en las *Mémoires de l'Académie des Sciences*[19] de 1787 sin demostración y demostrado por primera vez en *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien*[20] de 1799 y en los *Éléments de Géométrie*[21] de 1794.

El teorema dice que si la suma de tres ángulos de un triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños respecto del radio se supone que es $180^o + \epsilon$ (en general la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor o igual que dos rectos; ϵ denota el exceso) y si de cada ángulo se resta $\frac{\epsilon}{3}$, lo que reducirá la suma de los ángulos a 180^o, entonces los senos de los ángulos así disminuidos serán proporcionales a los lados opuestos, de tal forma que el triángulo podrá ser resuelto como si fuese rectilíneo.

Devuelve, por tanto, a la trigonometría rectilínea la resolución de triángulos esféricos muy poco curvados cuyos lados son muy pequeños comparados con el radio de la esfera. Más explícitamente, la resolución del triángulo esférico de ángulos A, B, C y lados correspondientes a, b, c equivale a la resolución del triángulo rectilíneo de ángulos A, B, C y lados a, b, c[22].

Pongamos que tenemos una esfera de radio r y en ella un triángulo esférico de ángulos A, B, C y lados correspondientes a, b, c verificando las condiciones del teorema de Legendre. Se puede formular un teorema del seno para triángulos esféricos análogo al teorema del seno de la trigonometría plana, que asegura, para el caso $r = 1$,

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}\,.$$

Igualmente se puede formular un teorema del coseno para la esfera unidad:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A\,,\\
\cos b &= \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B\,,\\
\cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C\,.
\end{aligned}$$

---

[19]A.-M. Legendre: *Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la Terre.* Histoire de l'Académie royale de sciences, París, 1787, pp. 352–383.

[20]J.-B. Delambre & A.-M. Legendre: *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien*, París, 1799, págs. 2–3.

[21]A.–M. Legendre: *Éléments de Géometrie : avec des notes*, París, douzième édition 1823, pp. 424–428.

[22]J.-B. Delambre & A.-M. Legendre: *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien*, París, 1799, págs. 2–3: "... pour calculer les différents côtés de la chaîne des triangles de projection, on pourra faire usage du théorème énoncé dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1787 et dont nous donnerons la démonstration ci-après; en conséquence, si, dans le triangle proposé, la somme des angles est $180^o + \omega$, on retranchera $\frac{\omega}{3}$ de chacun des angles, afin que la somme des angles restans soit de 180^o. Cette soustraction faite, on procédera comme si le triangle proposé étoit rectiligne, c'est-à-dire qu'on fera la proposition: Le sinus de l'angle opposé au côté connu est à ce côté comme le sinus d'un autre angle est au côté opposé."

En nuestro caso, del teorema del coseno tenemos

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}}\,.$$

Como sabemos que los lados son muy pequeños respecto del radio, podemos aproximar por los correspondientes polinomios de Taylor truncados en orden 4 y obtenemos:

$$\cos\frac{z}{r} = 1 - \frac{z^2}{2r^2} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\,r^4}\,,\quad z = a, b, c\,,$$
$$\operatorname{sen}\frac{z}{r} = \frac{z}{r} - \frac{z^3}{2\cdot 3\,r^3}\,,\ z = b, c\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad anterior, despreciando los términos de orden mayor que 4 y reduciendo, tenemos

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}$$

Sean A', B', C' los ángulos del triángulo rectilíneo de lados a, b, c. Del teorema del coseno tenemos que

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Y de la expresión $\operatorname{sen}^2 A' = 1 - \cos^2 A'$ obtenemos

$$4b^2c^2\operatorname{sen}^2 A' = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^2 - b^2 - c^2\,.$$

Luego

$$\cos A = \cos A'\frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen}^2 A'\,.$$

Pongamos que $A = A' + x$. Tomando el polinomio de Taylor para la función coseno con centro en A y despreciando los términos no lineales en x tenemos $\cos A = \cos A' - x\operatorname{sen} A'$, lo que significa que $x = \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen} A'$. Ahora, $\alpha = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A'$ es el área del triángulo rectilíneo y, por consiguiente,

$$x = \frac{\alpha}{3r^2}\,.$$

Por consiguiente x es independiente de la elección del vértice. Si llamamos $\epsilon = \frac{\alpha}{r^2}$, tenemos que $A' = \frac{\epsilon}{3}$, $B' = \frac{\epsilon}{3}$, $C' = \frac{\epsilon}{3}$. Esta prueba concluye el teorema anunciado por Legendre[23] para

$$\epsilon = \frac{\alpha}{r^2}\,.$$

[23]Hemos seguido con precisión la notación y la prueba que da Legendre en: A.-M. Legendre: *Éléments de Géométrie: avec des notes*, París, douzième édition 1823, págs. 424-28.

De esta manera observamos que la diferencia entre los ángulos de los triángulos esférico y rectilíneo decrece en razón del cuadrado de la razón entre los lados del triángulo (esférico o rectilíneo) y el radio de la esfera.

La prueba de LEGENDRE pone de manifiesto dos características fundamentales de la ciencia ilustrada. Por una parte la reducción de un problema físico a sus dimensiones cuantificables y por tanto tratables matemáticamente[24]. Por otra parte el uso de las técnicas del nuevo cálculo infinitesimal, puesto de manifiesto en este caso en el manejo del análisis integral y de desarrollos de Taylor, en auge desde que fue introducido paralelamente por NEWTON y LEIBNIZ en el siglo XVII. Como hemos visto en la prueba de LEGENDRE, se han despreciado los elementos de orden mayor que 4 en a, b, c, de modo que en general lo que ocurre es

$$A' = A - \frac{\epsilon}{3} + (4)\,,$$

donde (4) denota los términos en a, b, c de orden mayor que 4. El matemático alemán KARL BUZENGEIGER (1771–1835) expandió la fórmula de Legendre[25] en 1818:

$$A' = A - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{180}(-2a^2 + b^2 + c^2) + (6)$$

Posteriormente, en 1880, el alemán FRIEDRICH HELMERT (1843–1917) vuelve a expandir la fórmula de BUZENGEIGER[26] así:

$$\begin{aligned} A' = A - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{180}(-2a^2 + b^2 + c^2) \\ - \frac{\epsilon}{90720}(-38a^4 + 19b^4 + 19c^4 + a^2b^2 - 2b^2x^2 + a^2c^2) + (8)\,. \end{aligned}$$

(Recibido en julio de 2012. Aceptado para publicación en septiembre de 2012)

ÁLVARO ANTÓN SANCHO
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, MADRID, ESPAÑA
e-mail: antonsancho@gmail.com

[24]A. ANTÓN: *Las ciencias de la naturaleza, el derecho y la moral en la Ilustración*, La razón histórica **No. 18** (2012), 45–54.

[25]K. BUZENGEIGER: *Vergleichung zweier kleiner Dreiecke von gleichen Seiten, wovon das eine sphärisch, das andere eben ist.* Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften **6** (1818), 264–270.

[26]F. HELMERT: *Die mathematischen und physikalischen Teorien der höheren Geodäsie.* Vol. I, Leipzig 1880. Segunda ed, 1962.