

## Figuras de Chladni en tambores

### Chladni figures in drums

JAIME ARANGO, LEÓN ESCOBAR & CARLOS REYES  
Universidad del Valle, Cali, Colombia

RESUMEN. Las figuras de Chladni de una superficie vibrante se modelan mediante las líneas nodales de los modos de vibración de la superficie. En este artículo revisaremos algunos resultados sobre las líneas nodales en placas y membranas vibrantes y presentaremos un nuevo modelo estocástico que explica las figuras de Chladni. El modelo estocástico se valida con los resultados experimentales obtenidos en una caja vallenata (uno de los tres instrumentos de la música vallenata tradicional, parecida a una tambora). Los resultados experimentales y la simulación estocástica se comparan con las líneas nodales de las funciones propias del problema de Helmholtz en una membrana circular con bordes fijos.

*Palabras y frases claves.* Figuras de Chladni, placas, membranas, ecuación de onda, valores propios, problema de Helmholtz.

ABSTRACT. Chladni figures for a vibrating surface are modeled by the nodals lines of the vibration modes of the surface. In this paper we review some of the known results on the nodal lines of the vibration modes of plates and membranes and present a new stochastic model in order to explain Chladni figures. The stochastic model is validated against Chladni figures experimentally obtained in a *caja vallenata* (a drum similar to a *tambora* which is one of the three main traditional instruments of the *Vallenato* music). Experimental results and stochastic simulations are also compared with the nodal lines of the Helmholtz eigenfunctions in a circular membrane with fixed border.

*Key words and phrases.* Chladni's figures, plates, membranes, wave equation, eigenvalues, Helmholtz's problem.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification.* Primary: 97M80, Secondary: 35L05, 47A05.

## 1. Introducción

ERNST FLORENS FRIEDRICH CHLADNI (1756–1826), doctor en derecho, conferencista itinerante y cazador de meteoritos, pasaría a la historia. No como inventor de instrumentos musicales, como seguramente le hubiese gustado ser recordado, sino por la observación sistemática de un singular experimento que daría nacimiento a la acústica moderna. El experimento consistía en frotar con el arco de un violín una placa metálica cuadrada, de unos 15 cm de lado, que se sostenía horizontalmente con las yemas de los dedos índice y pulgar, en la que previamente se había esparcido arena finamente granulada.

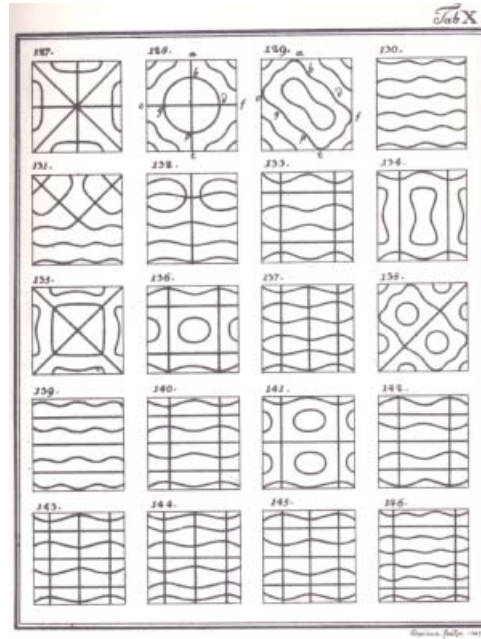


FIGURA 1. Figuras de Chladni en una placa con borde libre

Dependiendo del ángulo que formaba el arco con la placa y del lugar en donde se posaban las yemas de los dedos, la arena formaba figuras regulares a medida que se frotaba el arco, como si obedeciera ordenes del experimentador. El lector puede darse una idea del resultado del experimento observando las ilustraciones que se muestran en la figura 1 elaboradas por el mismo E. CHLADNI para su libro *Die Akustik*, publicado en 1802.

Nos adelantaremos un poco al relato de los hechos. Las vibraciones de una placa se pueden modelar mediante la superposición de un número infinito, pero numerable, de funciones que se llaman *modos de vibración*, y que para los efectos de este trabajo las denotaremos con  $\phi_n = \phi_n(x, y)$ ,  $n = 1 \dots$ . Los modos dependen de la geometría de la placa así como de las condiciones de

contorno de la vibración. Las *figuras de Chladni* resultan ser las curvas nodales de los modos. Es decir, las curvas descritas por  $\phi_n(x, y) = 0$ . En la sección 3 se precisará lo de los modos fundamentales y cómo estos definen las figuras de Chladni.

Determinar estos modos para una placa es una tarea muy difícil ([2]). Para llevarla a cabo existe una conocida simplificación consistente en aproximar las vibraciones de una placa, las que se describen con la ayuda del *operador biarmónico*, por vibraciones de una membrana que se describen con el *operador de Laplace*. En este trabajo se considerarán las vibraciones en un tambor. Aproximaremos las vibraciones del tambor por la *ecuación de onda* y los modos correspondientes serán aproximados con la ayuda de *funciones de Bessel*. Hasta aquí todo es clásico y conocido. El lector puede consultar las fuentes históricas (por ejemplo, a G. KIRCHOFF [3] y LORD RAYLEIGH [10]), que siguen siendo actuales, y comparar con la presentación que hacemos en las secciones 3 y 4.

Volvamos a CHLADNI y sus figuras, que como se dijo se formaban con el reacomodamiento de la arena al excitar la placa con el arco de un violín. La observación del experimento de Chladni muestra que las partículas de arena se mueven a saltos en todas las direcciones posibles. En este artículo propondremos un modelo aleatorio, en donde el movimiento de cada partícula es estocástico, no obstante converge (en algún sentido) a una configuración determinista, que coincide precisamente con las figuras de Chladni. Se trata de una investigación en curso y aún no tenemos pruebas pero nuestras conjeturas tiene algún respaldo en simulaciones numéricas que presentamos en este trabajo.

## 2. Un poco de historia

El experimento de Chladni llamó poderosamente la atención de la comunidad científica de su época. Pronto fue claro que si  $u(t, x, y)$  indicaba la deflexión vertical en el tiempo  $t$  del punto de la superficie media  $\Omega$  de la placa, identificado con abscisa y ordenada  $x$  y  $y$  respectivamente, y si denotamos con

$$C(t) = \{(x, y) \in \Omega : u(t, x, y) = 0\}, \quad (1)$$

entonces, ajustando apropiadamente los movimientos del arco del violín, las figuras estaban dadas por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t).$$

Pero ¿Porqué una ejecución inadecuada del violín conducía a patrones caóticos si es que el movimiento de la arena era perceptible? Y lo más importante ¿A qué ecuación obedecía la función  $u$ ? Se ofrecieron toda suerte de explicaciones y modelos. Y no era para menos. El mismo NAPOLÉON BONAPARTE, probablemente a instancias del entonces CONDE DE LAPLACE, había ofrecido un premio de 3 mil francos a quien explicara el fenómeno (véanse STOECKMANN [9] y ULLMANN [11]). Por cierto, el premio fue concedido a la célebre matemática SOPHIE

GERMAIN en 1817. No obstante haber identificado correctamente la ecuación diferencial (con la ayuda de LAGRANGE), el trabajo de SOPHIE GERMAIN tenía serios errores y llegaba a condiciones de contorno incorrectas, que para el caso del experimento de Chladni eran de frontera libre. Y las condiciones de contorno no eran asunto de poca monta. La explicación de las figuras de Chladni seguiría siendo esquiva hasta que GUSTAV KIRCHOFF (el mismo de los circuitos eléctricos) publicara en 1850 uno de los artículos más influyentes en la teoría de la elasticidad [3]). En este trabajo KIRCHOFF, no solo señala los errores y las contradicciones del trabajo de SOPHIE GERMAIN, sino que deduce las ecuaciones generales, con las debidas condiciones de contorno, que gobiernan la deformación de placas elásticas.

Supongamos que la placa es homogénea con densidad (masa por unidad de área)  $\rho$  y que la placa se encuentra bajo el influjo de una fuerza externa  $F$ . El desplazamiento vertical en el tiempo  $t$ ,  $u(t, x, y)$ , de un punto  $(x, y) \in \Omega$ , está gobernado por la solución de

$$\begin{aligned} \rho h u_{tt} + D \Delta^2 u &= F(t, x, y), \quad \text{en } \mathbb{R} \times \Omega, \\ u &= p, \quad \text{en } \{t = 0\} \times \Omega, \\ u_t &= v, \quad \text{en } \{t = 0\} \times \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

en donde  $\Delta$  es el operador de Laplace,  $\Delta^2$  es el operador biarmónico (la composición del operador de Laplace consigo mismo),  $D$  (rigidez flexural de la placa) es una constante positiva que depende del material de la placa y de su espesor  $h$ .  $p = p(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  representan la posición y velocidad inicial respectivamente. La ecuación (2) debe complementarse con las condiciones de contorno que dependen esencialmente de que parte del borde vibra libremente y que parte está empotrada. En el caso de una placa con bordes firmemente sujetos, digamos que a una caja de resonancia con rigidez infinita, las condiciones de contorno están dadas por

$$u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \quad (3)$$

en donde  $\frac{\partial u}{\partial n}$  es la derivada en la dirección normal exterior al borde  $\partial\Omega$ .

Si el borde de la placa, o una parte de este, se deja vibrar libremente, las condiciones de contorno se complican. Para el caso del experimento de Chladni en una placa cuadrada  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  con todo el borde vibrando libremente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x = \{-1, 1\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad y = \{-1, 1\}, \end{aligned} \quad (4)$$

en donde  $\mu$  es la llamada *razón de Poisson*, que depende del material de la placa. Claro, está la yema de los dedos del experimentador que sostiene la placa, pero supondremos que la zona de contacto es mínima de manera que esencialmente la vibración es libre.

### 3. Las figuras de Chladni

En esta sección revisaremos la solución de la ecuación (2) destacando la conexión entre la teoría espectral y el método de separación de variables. En efecto, la variable temporal  $t$  puede separarse de las variables espaciales  $x$  y  $y$  con ayuda del problema de valores propios

$$\Delta^2 \phi - \lambda \phi = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (5)$$

en donde  $\phi$  satisface una condición de contorno del tipo (3). Los argumentos que viene a continuación también se pueden aplicar a condiciones de contorno del tipo (4). Pero hay dificultades que no pueden superarse sin entrar en algunos tecnicismos debido a que el problema (2) junto con la condición de contorno (4) no siempre tiene solución; y cuando la solución existe no es única.

Para el problema de valores propios (5) y (3) sabemos (véase, por ejemplo, AGMON [1]):

**Teorema 1.** *Los valores propios  $\lambda$  de la ecuación (5) con la condición de borde (3) forman un subconjunto discreto de números reales positivos. Cada valor propio tiene multiplicidad geométrica finita y repitiéndolos de acuerdo con su multiplicidad se tiene*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Más aún, existe una base orto-normal en  $L^2(\Omega)$  de funciones propias  $(\phi_n)_n$ , en donde cada  $\phi_n$  satisface la ecuación (5) con  $\lambda = \lambda_n$ .

Las funciones propias  $(\phi_n)_n$  que forman la base ortonormal en  $L^2(\Omega)$  a que hace referencia el teorema 1 son precisamente los modos fundamentales de vibración mencionados en la introducción del artículo.

Si la fuerza externa  $F$  es una función lo suficientemente suave, podemos suponer que  $F$  admite la siguiente representación uniformemente convergente en  $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ :

$$F(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \phi_n(x, y), \quad (6)$$

en donde  $(\phi_n)_n$  es la base a la que hace referencia el teorema 1 y los coeficientes  $f_n = f_n(t)$  se suponen conocidos para todo  $n = 1, \dots$ . Análogamente, para una clase amplia de condiciones iniciales  $p$  y  $v$ , el problema (2) y (3) tiene una única solución  $u = u(t, x, y)$  que tiene una representación uniformemente convergente en  $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$  en la forma

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x, y), \quad (7)$$

en donde las funciones coeficientes  $a_n = a_n(t)$  se determinan a continuación. Reemplazando la expresión (7) en el problema (2), obtenemos después de algunos cálculos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 a_n}{dt^2} + c^2 \lambda_n a_n - f_n(t) \right) \phi_n(x, y) = 0, \quad (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \Omega.$$

De lo que se deduce

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n = f_n(t), \quad \omega_n^2 = c^2 \lambda_n, \quad (8)$$

junto con las condiciones iniciales

$$a(0) = (p, \phi_n)_{L^2(\Omega)}, \quad a'(0) = (v, \phi_n)_{L^2(\Omega)}, \quad (9)$$

en donde  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  representa el producto escalar usual en  $L^2(\Omega)$ .

Ahora estamos en una posición que nos permite explicar a grandes rasgos las figuras de Chladni. Para ello supongamos que el forzamiento externo es del tipo

$$F(t, x, y) = \cos \omega t \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x, y) \right),$$

en donde los coeficientes  $f_n$  son constantes conocidas. Supondremos también que las condiciones iniciales  $p$  y  $v$  de (2) son nulas, lo que llevará a  $a(0) = 0$  y  $a'(0) = 0$  en (9). Esos supuestos adicionales simplifican (8) y (9). Todo consiste ahora en resolver con condiciones iniciales nulas el problema

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n = f_n \cos \omega t. \quad (10)$$

Como se sabe, el crecimiento en el tiempo de la solución  $a_n$  de (10) dependerá de si la frecuencia externa  $\omega$  entra en resonancia con la frecuencia interna  $\omega_n$ . Un cálculo sencillo muestra

$$a_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n \cos \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}, & \text{si } \omega_n^2 \neq \omega^2, \\ \frac{f_n t \operatorname{sen} \omega t}{2\omega}, & \text{si } \omega_n^2 = \omega^2. \end{cases} \quad (11)$$

De (8) y del teorema 1 deducimos que existe a lo más una frecuencia interna, digamos  $\omega_m$ , con la que entra en resonancia la frecuencia externa  $\omega$ . En tal caso, la solución  $u(t, x, y)$  dada por la series (7) será periódica con período  $2\pi/\omega$ . Más aún, esta serie tendrá como término dominante el coeficiente  $c_m(t)$ . Por eso

$$\frac{u(t, x, y)}{t} = \frac{f_m}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t \phi_m(x, y) + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Tendríamos entonces que, salvo valores del tiempo cercanos a  $2n\pi/\omega$ ,  $n = 1, \dots$ , las curvas  $C(t)$ , para valores grandes de  $t$ , no son otra cosa que las curvas nodales de las soluciones  $\phi$  del problema de valores propios (5).

#### 4. Placas y membranas

Resolver el problema (2) o determinar las funciones propias  $\phi_n$  en el problema (5) es una tarea de considerable dificultad. G. KIRCHOFF [3] resolvió el problema de valores propios (5) en un disco con borde libre. Para una placa cuadrada con borde libre (condiciones de contorno del tipo (4)) las funciones  $\phi$  fueron calculadas por WALTHER RITZ [6] apenas en 1909. El artículo de RITZ, que inspiraría el método de los elementos finitos, se considera un trabajo pionero en la computación científica.

Debido a las dificultades señaladas se han elaborado distintas aproximaciones para el problema (2). Quizá la más importante es el modelo de vibración de membranas mediante la ecuación de onda:

$$\rho u_{tt} = E \Delta u + F(t, x, y), \quad \text{en } \mathbb{R} \times \Omega, \quad (12)$$

en donde  $E$  es una constante que depende del material. Omitimos la escritura de las condiciones iniciales  $p$  y  $v$  por no ser relevantes para las figuras de Chladni. El problema de valores propios análogo al (5) resulta ser el llamado *problema de Helmholtz*

$$\begin{aligned} \Delta \phi + \lambda \phi &= 0 & \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Note la simplificación de las condiciones de contorno. Para las soluciones  $\phi$  del problema de Helmholtz vale el teorema 1. Así que las soluciones del problema de Helmholtz son aproximaciones de los modos de vibración en la placa.

En el caso de las membranas circulares el problema de Helmholtz tiene soluciones explícitas. Escribiendo (13) en coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , se obtienen los valores y propios y las funciones propias mediante separación de las variables  $r$  y  $\theta$  (véase, por ejemplo, [4]). Será conveniente el uso del doble índice  $(h, k)$  para indicar los valores y las funciones propias que resuelven el problema de Helmholtz.

En lo que sigue emplearemos la siguiente notación:

- $J_h(z)$  es la función de Bessel de primera especie de orden  $h$ ,  $h = 0, 1, \dots$ .
- $\xi_{hk}$  es el  $k$ -ésimo cero positivo de  $J_h(z)$ .

**Teorema 2.** *Los valores propios de la ecuación (5) en el disco unitario están dados por*

$$\lambda_{hk} = \xi_{hk}^2, \quad h = 0, 1, \dots, \quad k = 1, \dots.$$

Para todo  $k \geq 1$  el valor propio  $\lambda_{0k}$  es simple y su espacio propio correspondiente está generado por la función radialmente simétrica:

$$\phi_{0k}(r) = J_0(\xi_{0k} r), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Si  $k \neq 0$ , el valor propio  $\lambda_{hk}$  tiene multiplicidad geométrica 2. El espacio correspondiente de funciones propias está generado por

$$\phi_{hk}(r, \theta) = J_h(\xi_{hk} r) \cos k \theta, \quad \hat{\phi}_{hk}(r, \theta) = J_h(\xi_{hk} r) \sin k \theta,$$

con  $0 \leq r \leq 1$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Las aproximaciones de los modos de vibración  $\phi_{hk}$  en una membrana (que aproximan los de la placa) son una de las aplicaciones más espectaculares de las funciones de Bessel. Generaciones de matemáticos se han fascinado con ellos. No presentaremos sus gráficos pues se muestran en muchos sitios de Internet. Para efectos de las figuras de Chladni, lo que importa es el conjunto nodal de los modos  $\phi_{hk}$ . Es costumbre referirse a  $\phi_{hk}$  como el modo  $hk$ .

Empecemos con los modos radialmente simétricos  $\phi_{0k} = J_0(\xi_{0k} r)$ , con  $0 \leq r \leq 1$ . Un poco de reflexión muestra que  $\phi_{0k}$  se anula en el disco unitario en exactamente  $k$  círculos concéntricos de radios  $r_j = \frac{\xi_{0j}}{\xi_{0k}}$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

Análogamente,  $\hat{\phi}_{hk}$  se anula en el disco unitario en la unión de  $k$  círculos concéntricos de radio  $r_p = \frac{\xi_{hp}}{\xi_{hk}}$ ,  $1 \leq p \leq h$  y de  $h$  rayos de ángulo polar  $\theta_n = \frac{n\pi}{k}$ ,  $1 \leq n \leq k$ . El conjunto nodal de  $\phi_{hk}$  se obtiene mediante rotación de ángulo de  $\pi/2$  el conjunto nodal descrito de  $\hat{\phi}_{hk}$ . La superposición de los modos  $\phi_{hk}$  y  $\hat{\phi}_{hk}$  simplemente rotará los conjuntos nodales ya descritos.

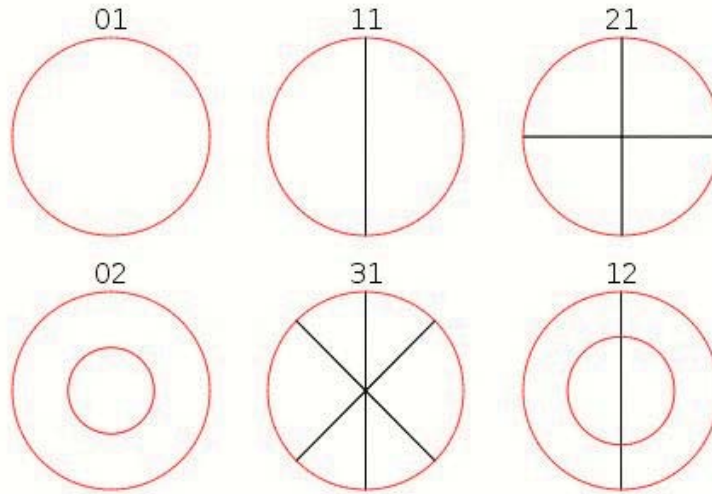


FIGURA 2. Figuras de Chladni en tambores circulares

Los valores  $\xi_{hk}$  están tabulados en muchos libros, se encuentran en numerosos sitios de Internet o pueden calcularse con casi cualquier grado de precisión en programas de dominio público. De manera que su ordenamiento, a la usanza del teorema 1, no causa dificultad. Listamos a continuación el orden de los 6 primeros elementos

$$\xi_{01} < \xi_{11} < \xi_{21} < \xi_{02} < \xi_{31} < \xi_{12} < \dots$$



Precisamente las figuras de Chladni correspondientes a los 6 primeros modos son los más fáciles de obtener experimentalmente. En la figura 2 se muestra el conjunto nodal correspondiente a los 6 primeros nodos.

Concedido. Las figuras de Chladni en un tambor carecen de la belleza y variedad de las que se obtiene en una placa rectangular vibrando libremente. El lector puede comparar las figuras 2 y 1 y formarse su propia opinión. Pero en la próxima sección mostraremos que existen razones prácticas para hallar las figuras de Chladni en un tambor.

## 5. Los experimentos

Chladni era un violinista consumado con oído fino, destreza manual y capacidad pedagógica notable. De hecho él fue uno de los mejores divulgadores científicos de su tiempo. Replicar su experimento original es complicado para quienes no tenemos sus habilidades. Como alternativa, el lector curioso puede comprar por menos de 35 dólares un artefacto que genera las figuras de Chladni en una placa con borde libre, puede visitar el portal de [youtube](#)<sup>1</sup> y con palabra clave **Chladni's figure** buscar y ver los experimentos sin necesidad de experimentar, o puede experimentar el mismo con lo que tenga a disposición.

Se necesita una placa, una fuerza externa armónica y un polvo con una granulación similar a la de la arena fina. Puede ser sal de cocina en la presentación y granulación normal de los restaurantes. Para evitar la formación de grumos se recomienda llevar a cabo los experimentos en un ambiente seco. Como los autores estamos interesados en las propiedades acústicas de los instrumentos tradicionales de percusión ([5]), decidimos usar una caja vallenata. Esta puede verse como una placa de parche acrílico adherida firmemente con un aro metálico a una caja de resonancia igualmente acrílica (aunque de mucho mayor espesor que el parche). Así las cosas, la región  $\Omega$  en consideración es un disco y las condiciones de contorno son del tipo (3).

Para poner a vibrar el parche acrílico de la caja vallenata se necesita más energía de la que suministra un parlante de un equipo de sonido de bajo costo. Fue preciso un montaje experimental inspirado en el trabajo de THOMAS D. ROSSING [7] para estudiar la acústica de los timbales. Describimos a continuación el montaje y el procedimiento para los lectores interesados (véase la figura 5).

Se nivela la superficie del parche y la sal se extiende de manera homogénea. Luego, se emite una señal eléctrica de forma senoidal con frecuencia  $\omega$  con el generador de ondas. La frecuencia de salida se controla con un multímetro digital y se amplifica con un amplificador corriente similar a los que utilizan los equipos de sonido comunes. La señal emitida por el amplificador llega a la primera bobina (bobina 1 en la figura 5) y genera un campo magnético alternante,

---

<sup>1</sup><http://www.youtube.com>

el cual interactúa con los imanes adheridos al parche produciendo oscilaciones periódicas. Es aconsejable que el imán este lo mas cerca posible al punto donde comienza la bobina 1 para que la interacción entre los dipolos magnéticos sea máxima. El imán colocado en la parte interior de la membrana tiene dos propósitos: sostener el imán que interactúa con la bobina 1 y proporcionar flujo magnético a la segunda bobina (bobina 2 en la figura 5), la cual por inducción magnética, transmite una señal al osciloscopio para determinar las frecuencia de vibración del parche. Los detalles del montaje se aprecian en la fotografía de la figura 5. Algunos detalles técnicos pueden ser de interés: Los imanes son de neodimio con un peso de 4 gr cada uno, el campo magnético en cada caso fue de 120 gauss, la bobina 1 tiene 1500 vueltas mientras que la bobina 2 tiene 200 vueltas.

La frecuencia externa  $\omega$  puede variarse en un rango de 60–2000 Hz con el montaje descrito anteriormente. Al ajustarla a las frecuencias de  $\omega = 491\text{Hz}$  y  $\omega = 701\text{Hz}$  la sal granulada se reacomoda formando las figuras 5 y 6, respecti-

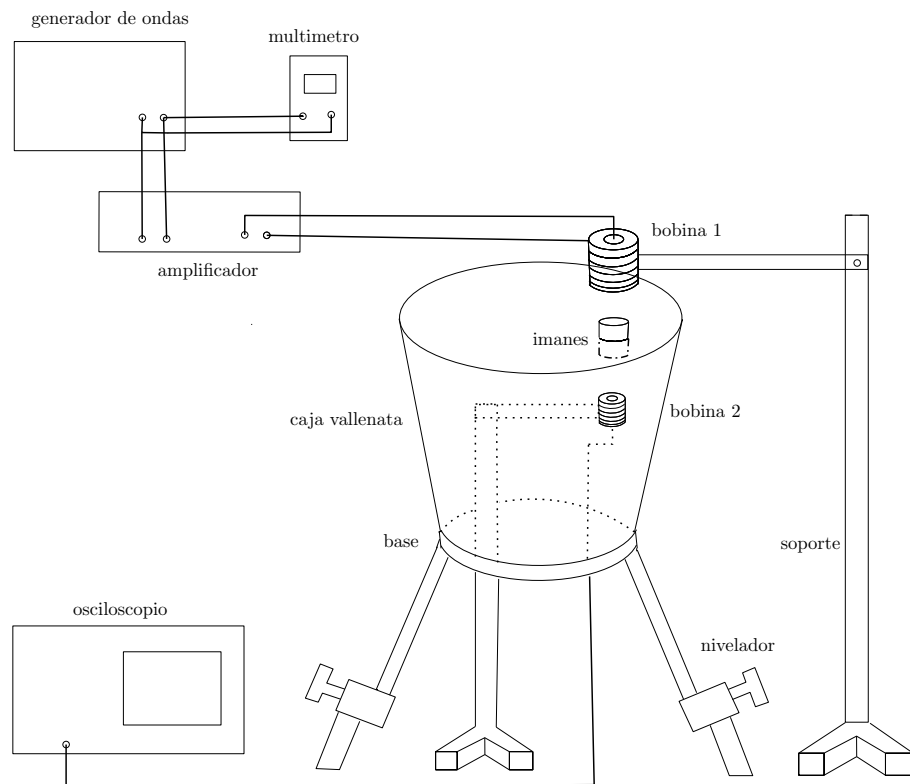


FIGURA 3. Esquema del montaje experimental



FIGURA 4. Montaje experimental para las figuras de Chladni en una caja vallenata



FIGURA 5. Figura de Chladni del modo 11,  $\omega = 491\text{Hz}$



FIGURA 6. de Chladni del modo 21,  $\omega = 701\text{Hz}$

vamente. Los modos 31, 12 y 41 (menos nítidos experimentalmente) se obtienen respectivamente con las frecuencias  $\omega = 900\text{Hz}$ ,  $\omega = 917\text{Hz}$  y  $\omega = 1117\text{Hz}$

Hay un renovado interés en el estudio de las propiedades acústicas de los tambores (Véase ROSSING [7], SATHEJ y ADHIKARI [8]). Por ejemplo, es importante saber cuales son los modos que más contribuyen en la percusión. Determinar los valores espectrales, los  $\omega_n$  del teorema 1, se logra sin mucha dificultad digitalizando una grabación del sonido y aplicando técnicas del análisis de Fourier ([5]). Ahora bien, cuando ya se tiene una lista de valores espectrales (frecuencias), por fuerza incompleta, no se puede saber a que modo corresponde cada valor. Una técnica sencilla para resolver el problema es generando la figura de Chladni correspondiente a cada frecuencia de la lista.

Se aclara que los experimentos con figuras de Chladni pueden llevarse a cabo con una instrumentación menos sofisticada. En lugar de una caja vallenata se puede usar una membrana delgada de látex fija en un tambor de bordar, y en lugar del electro imán se puede usar un parlante común y corriente conectado a un computador con un software de generación de señales.

## 6. Un modelo estocástico

La observación cuidadosa del experimento muestra hechos que no pueden deducirse del modelo matemático desarrollado en las secciones anteriores. Cuando no hay resonancia con la fuerza externa (véanse las ecuaciones (7) y (11)) la superposición de los modos tiende a cancelarse entre sí y casi no se percibe movimiento en las partículas. Las cosas son muy distintas cuando se presenta resonancia. En tal caso, las partículas no se deslizan por la superficie del parche acrílico sino que se mueven a saltos con direcciones y desplazamientos horizontales aleatorios. Digamos que la resonancia se dé con  $\omega_n = \omega$ . La magnitud del desplazamiento horizontal del salto que da la partícula en un punto  $(x, y)$  parece estar relacionada con el desplazamiento vertical  $\phi_n(x, y)$ . Todo indica que se puede dar una explicación estocástica a las figuras de Chladni si se supone que las partículas se mueven saltando de la siguiente forma:

- La dirección de cada salto es aleatoria con distribución uniforme.
- El desplazamiento horizontal del salto que inicia en la posición  $(x, y)$  es una variable aleatoria con distribución normal. La media y la varianza son proporcionales a  $\phi_n(x, y)$ .
- Si una partícula sale de  $\Omega$ , se quedará quieta en lo sucesivo.

Sea  $\phi$  uno cualquiera de los modos de vibración a los que se refiere el teorema 1 y sea  $\alpha > 0$  un factor que utilizaremos para escalar la varianza y la media de variables aleatorias que definiremos a continuación. De otro lado, extenderemos  $\phi$  a todo  $\mathbb{R}^2$  mediante  $\phi(x) = 0$  si  $x \notin \Omega$ .

Definamos primero el espacio  $\mathcal{O}$  formado por sucesiones en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $X_j$  la variable aleatoria definida mediante  $X_j(o) = (x_j, y_j)$ , en donde  $(x_j, y_j)$  es la

proyección  $j$  –ésima de la sucesión  $o$ . Si pensamos que la partícula se mueve a saltos, entonces la variable aleatoria  $X_j$  es un modelo estocástico para la posición de la partícula después del salto  $j$ –ésimo. La razón de tomar sucesiones en  $\mathbb{R}^2$ , y no en  $\Omega$ , es que un salto puede llevar la partícula fuera de  $\Omega$ .

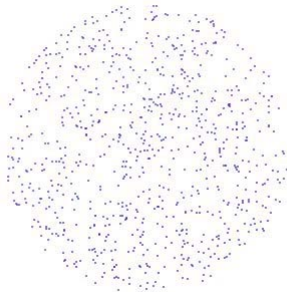


FIGURA 7. Distribución aleatoria inicial de las partículas

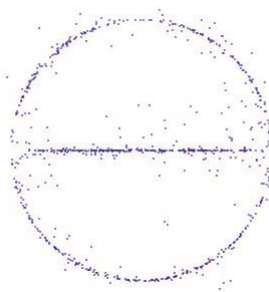


FIGURA 8 Resultado de un paseo aleatorio de 1000 pasos

Dado  $A \in \mathbb{R}^2$  definimos la variable aleatoria condicionada

$$Y_j = (X_j \mid X_{j-1} = A).$$

Supondremos que  $Y_j$  está normalmente distribuida con media  $E(X_j) = A$  y con matriz de covarianza  $\alpha \phi(A)^2 I$ , en donde  $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Lo que la simulación estocástica sugiere es que la variable aleatoria  $X_j$  converge en probabilidad a un punto de la línea nodal de  $\phi$ . De manera más precisa se tendría el siguiente resultado:

**Conjetura.** Para todo  $\epsilon > 0$  y todo modo de vibración  $\phi$  se tiene la convergencia en probabilidad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|\phi(X_n)| > \epsilon) = 0.$$

Con el ánimo de darle algún piso a la conjetura anterior se presenta a continuación una simulación numérica con

$$\alpha = 0,001, \quad \phi = \phi_{11}(r, \theta) = J_1(\xi_{11} r) \cos \theta.$$

El modo de vibración  $\phi$  no es el de la placa sino su correspondiente aproximación en el modelo de membrana. En la simulación estocástica se genera primero una distribución uniforme de 500 partículas tal como lo muestra la figura 7, y cada partícula, de manera independiente entre sí, adelanta una caminata aleatoria de 1000 pasos de acuerdo con los axiomas establecidos para la variable aleatoria  $X_j$ . El resultado puede verse en la figura 8. Llama poderosamente la atención la similitud entre los resultados del experimento físico consignados en la fotografía 5 y los de la simulación estocástica que se muestran en la figura 8.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por el apoyo institucional. Igualmente tienen una deuda

de gratitud con la profesora ADRIANA GÓMEZ, con los profesores MIGUEL MARMOLEJO y ÁLVARO RAMÍREZ y con el técnico CARLOS DELGADO por las valiosas sugerencias y comentarios.

### Referencias

- [1] AGMON, S., *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **15** (1962), 119–147.
- [2] GANDER, M. & WANNER, G., *From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing*. Submitted to SIAM Review, 2011.
- [3] KIRCHOFF, G., *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **44** (1850), 51–92.
- [4] OLVERT, P., *Introduction to partial differential equations*. <http://www.math.umn.edu/~olver/>
- [5] REYES, C., *Panderetas y matemáticas*. Trabajo de Grado, Programa de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Junio de 2011.
- [6] RITZ, W., *Theorie der Transversaleschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*. Annalen der Physik, **18**(4) (1909) 737–80.
- [7] ROSSING, T., *Física de los tímboles*. Investigación y Ciencia, **21** (2000), 24–31.
- [8] SATHEJ, G. & ADHIKARI, *The eigenspectra of Indian musical drums*. <http://arXiv.org/abs/0809.1320v1>, 2008.
- [9] STÖCKMANN, H. J., *Chladni meets Napoleon*. Eur. Phys. J. Special Topics **145** (2007), 15–23.
- [10] STRUTT, J., LORD RAYLEIGH, *The theory of sound*, vol I, London, Macmillan, 1894, 2nd ed., Dover, New York, 1945.
- [11] ULLMANN, D., *Life and work of E.F.F. Chladni*. Eur. Phys. J. Special Topics **145** (2007), 25–32.

(Recibido en abril de 2012. Aceptado para publicación en abril de 2012)

JAIME ARANGO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA  
*e-mail:* [jaime.arango@correounivalle.edu.co](mailto:jaime.arango@correounivalle.edu.co)

LEÓN ESCOBAR  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA  
*e-mail:* [leon.escobar05@gmail.com](mailto:leon.escobar05@gmail.com)

CARLOS REYES  
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA  
*e-mail:* [creyesk@gmail.com](mailto:creyesk@gmail.com)