

Autour des propriétés spectrales des semi-groupes

LUDOVIC DAN LEMLE

Université Claude Bernard Lyon1, 69622 Villeurbanne, France
Université “Politehnica” de Timișoara, 331128 Hunedoara, Roumanie

ABSTRACT. In this paper we present a study concerning the spectral properties of the strongly continuous semigroups of linear bounded operators on a Banach space.

Key words and phrases. Uniformly continuous semigroups, C_0 -semigroups, differentiable C_0 -semigroups, spectral theorem.

MSC2010 : 47D03

RESUMÉ. Dans ce papier nous présentons une étude concernant les propriétés spectrales pour les semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach.

1. Préliminaires

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en outre, l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique aditif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \mapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$, est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec CAUCHY même. D'autre part, il est très bien connu que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{ta}$ est la solution unique sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance après l'année 1888, quand le grand mathématicien GIUSEPPE PEANO a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I, \end{cases}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \mapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératoriels $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach \mathcal{X} , qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \mapsto e^{tA}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modèle général dans le cadre des algèbres de Banach abstraites. Plus précisément, si \mathcal{B} est une algèbre de Banach avec l'unité I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni t &\mapsto e^{ta} \in \mathcal{B} \\ e^{ta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!} \end{aligned}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = I. \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{ta}$ satisfait sur \mathbb{R} à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le problème réciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus difficile, mais il a été résolu par NATHAN [Na'35] et YOSIDA [Yo'36]. Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algèbres de Banach abstraites.

Ces caractérisations importantes ont suggéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette manière est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach \mathcal{X} . La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été réalisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0 . Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se réfère aux fonctions

$$[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$. Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach ont été obtenus par HILLE [Hi'36], [Hi'48], [Hi'52],

YOSIDA [Yo'48], [Yo'57], FELLER [Fe'52], [Fe'53], MIYADERA [Mi'52], [Mi'56] et PHILLIPS [Ph'52], [HP'57] qui ont créé la théorie des C_0 -semi-groupes et de leurs générateurs. Le célèbre théorème de Hille-Yosida-Feller-Miyadera-Phillips rétablit le lien entre l'équation fonctionnelle de Cauchy $T(t+s) = T(t)T(s)$ et l'équation différentielle $x' = Ax$, où A est un opérateur non-borné fermé et densément défini dans un espace de Banach \mathcal{X} . Dans ce cas-là, $T(t)$ représente dans un certain sens la fonction exponentielle. Beaucoup de résultats intéressants concernant l'engendrement, la représentation, les propriétés spectrales et de convergence peuvent être trouvés dans les excellentes monographies de AHMED [Ah'91], BARBU [Ba'76], BUTZER et BERENS [BB'67], CLÉMENT, HEIJMANS, ANGENENT, VAN DUJIN et de PATGER [CHADP'87], VAN CASTEREN [vCa'85], DAVIES [Da'80], GOLDSTEIN [Go'85], PAZY [Pa'83], VRABIE [Vr'01], YOSIDA [Yo'67], etc.

Dans la suite nous noterons par \mathcal{E} un espace de Banach sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} et par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans \mathcal{E} . Nous désignerons par I l'unité de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ nous noterons par

$$\mathcal{I}m A = \{Ax \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$$

l'image de A et par

$$\mathcal{K}er A = \{x \in \mathcal{D}(A) \mid Ax = 0\}$$

le noyau de A .

L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}m A$ est surjectif. Si $\mathcal{K}er A = \{0\}$, alors A est injectif. Pour un opérateur bijectif, on peut définir l'opérateur inverse :

$$A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par $A^{-1}y = x$ si $Ax = y$. Evidemment $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{I}m A$. Dans la suite nous noterons par $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. L'ensemble $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ ([Is'81, Theorem 4.1.13, pag. 145]). Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons :

$$A^n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathcal{E}$$

par

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad \dots, \quad A^n = A(A^{n-1}),$$

où

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \mid A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{E}$ une fonction continue. Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds = f(a) \quad .$$

Preuve. Nous avons :

$$\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds - f(a) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} [f(s) - f(a)] ds \right\| \leq \sup_{s \in [a, a+t]} \|f(s) - f(a)\| .$$

L'égalité de l'énoncé résulte de la continuité de l'application f . \square

Lemme 1.2. Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $\|A\| < 1$, alors $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n .$$

Preuve. Soit $Y_n = I + A + A^2 + \dots + A^n$. Alors :

$$\|Y_{n+p} - Y_n\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty .$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Mais $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est une algèbre de Banach. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente. Notons $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ sa limite. De l'égalité $(I - A)Y_n = I - A^{n+1}$, il résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - A)Y_n = I$, d'où $(I - A)Y = I$. Nous obtenons $Y(I - A) = I$ de façon analogue. Finalement, on voit que $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et que $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. \square

Remarque 1.3. Si $\|I - A\| < 1$, alors $A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$.

Définition 1.4. L'ensemble

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(\mathcal{E}) \right\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Proposition 1.5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert.

Preuve. Définissons l'application

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

par

$$\phi(\lambda) = \lambda I - A .$$

Evidemment, ϕ est continue. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et par suite $\rho(A) = \phi^{-1}(\mathcal{GL}(\mathcal{E}))$. Comme $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert, on voit que $\rho(A)$ est ouvert. \square

Définition 1.6. L'application

$$\begin{aligned} R(\cdot; A) &: \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E}) \\ R(\lambda; A) &= (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

s'appelle la résolvante de A .

Proposition 1.7. *La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, a les propriétés suivantes :*

i) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A) \quad ;$$

ii) $R(\cdot; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$;

iii) si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad ;$$

iv) nous avons

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve. i) Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} R(\lambda; A) - R(\mu; A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A - \lambda I + A) (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \end{aligned}$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

ii) Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons $D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|}\right)$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|}\right)$, nous avons :

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)](\lambda_0 I - A) \quad .$$

Mais :

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)\| = |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0; A)\| < 1 \quad .$$

Compte tenu du lemme 1.2, il résulte que :

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in \mathcal{GL}(\mathcal{E}) \quad ,$$

d'où $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1} [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0; A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1} \quad . \end{aligned}$$

Donc $R(\cdot; A)$ est analytique sur $\rho(A)$.

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, d'où $I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$.
De plus :

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Par conséquent :

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

L'assertion (iv) s'obtient par récurrence. Pour $n = 1$, nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = -R(\lambda; A)^2.$$

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda; A) = (-1)^k k! R(\lambda; A)^{k+1}.$$

Montrons que :

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda; A) = (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda; A)^{k+2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda; A) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda; A) \right) = \frac{d}{d\lambda} [(-1)^k k! (\lambda I - A)^{-k-1}] \\ &= (-1)^k k! (-k-1) (\lambda I - A)^{-k-2} = (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda; A)^{k+2} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*. \quad \square$$

Remarque 1.8. Compte tenu de la proposition 1.7 (iii), il résulte que :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

Définition 1.9. L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Proposition 1.10. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors :

- i) $\sigma(A) \neq \emptyset$;
- ii) $\sigma(A)$ est un ensemble compact.

Preuve. i) Supposons que $\sigma(A) = \emptyset$. Alors $\rho(A) = \mathbb{C}$. Par conséquent, l'application $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ est définie sur \mathbb{C} . De plus, pour $|\lambda| > \|A\|$, nous avons :

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}, \quad (\forall) \lambda \in \rho(A).$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda; A) = 0.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que $\|R(\lambda; A)\| < M$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{C}$. Le théorème de Liouville ([DS'67, pag. 231]) implique que $R(\cdot; A)$ est constante sur \mathbb{C} et que cette constante ne peut être que 0. Donc $(\lambda I - A)^{-1} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde. Par conséquent $\sigma(A) \neq \emptyset$.

ii) Compte tenu de la proposition 1.7 (iii), nous obtenons que :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

L'ensemble $\sigma(A)$ est donc borné. Comme nous avons vu que $\sigma(A)$ est un ensemble fermé, il est donc compact. \checkmark

Définition 1.11. Pour un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, le nombre

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

s'appelle le rayon spectral de A .

Remarque 1.12. Evidemment, pour un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $\sigma(A)$ est contenu dans l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $r(A)$. De plus, on peut montrer que

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

et on voit que $r(A) \leq \|A\|$.

Par la suite, nous présenterons quelques problèmes concernant la théorie spectrale pour un opérateur linéaire fermé $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Définition 1.13. L'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{E} \text{ est opérateur bijectif}\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de A .

Remarque 1.14. Il résulte du théorème du graphe fermé ([DS'67, Theorem II.2.4, pag. 57]) que l'opérateur :

$$(\lambda I - A)^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

est continu dans \mathcal{E} .

Définition 1.15. L'application

$$R(\cdot; A) : \rho(A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad (\forall)\lambda \in \rho(A)$$

s'appelle la résolvante de A .

Proposition 1.16. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, un opérateur linéaire fermé. Alors :

i) $\rho(A)$ est un ensemble ouvert et $R(\cdot; A)$ est une application analytique sur

$\rho(A)$;

ii) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A) \quad ;$$

iii) nous avons

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve. Elle est analogue à celle de la proposition 1.7. \square

Définition 1.17. L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de A .

Remarque 1.18. $\sigma(A)$ est un ensemble fermé.

Remarque 1.19. Il existe des opérateurs fermés qui ont un spectre non borné.

Exemple 1.20. Prenons $\mathcal{E} = \mathcal{C}_{[0,1]}$ et considérons l'opérateur

$$D : \mathcal{C}_{[0,1]}^1 \longrightarrow \mathcal{E}$$

défini par

$$Df = f'$$

Dans ce cas, nous avons $\sigma(D) = \mathbb{C}$.

Définition 1.21. Soit $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert. Une application analytique

$$\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

qui vérifie la propriété

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu, \quad (\forall) \lambda, \mu \in \mathbf{D},$$

s'appelle une pseudo-résolvante.

Théorème 1.22. Soit $\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une pseudo-résolvante. Alors :

i) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, $(\forall) \lambda, \mu \in \mathbf{D}$;

ii) $\text{Ker} R_\lambda$ et $\text{Im} R_\lambda$ ne dépendent pas de $\lambda \in \mathbf{D}$;

iii) R_λ est la résolvante d'un opérateur linéaire A fermé et défini sur un sous espace dense si et seulement si $\text{Ker} R_\lambda = \{0\}$ et $\overline{\text{Im} R_\lambda} = \mathcal{E}$.

Preuve. i) Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$. Alors, nous avons :

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

et :

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda,$$

d'où :

$$0 = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu + (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda.$$

Par suite, on a $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

ii) Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $x \in \mathcal{Ker} R_\mu$. Alors $R_\mu x = 0$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, on a :

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu x .$$

Donc $R_\lambda x = 0$. Par conséquent $x \in \mathcal{Ker} R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{Ker} R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$. Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $y \in \mathcal{Im} R_\mu$. Alors il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $R_\mu x = y$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, nous avons :

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu x .$$

Donc :

$$R_\lambda x - y = (\mu - \lambda)R_\lambda y ,$$

ou bien :

$$y = R_\lambda (x + (\lambda - \mu)y) .$$

Donc il existe $u = x + (\lambda - \mu)y \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda u$. Par conséquent $y \in \mathcal{Im} R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{Im} R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$.

iii) \implies Si R_λ est une résolvante pour un opérateur linéaire A fermé et défini sur un sous espace dense, alors R_λ est une application bijective, d'où $\mathcal{Ker} R_\lambda = \{0\}$ et $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. Par suite, $R_\lambda^{-1} = \lambda I - A$ et $\mathcal{D}(R_\lambda^{-1}) = \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Par conséquent $\overline{\mathcal{Im} R_\lambda} = \overline{\mathcal{D}(R_\lambda^{-1})} = \mathcal{E}$.

\Leftarrow Soient $\mathbf{D} \ni \lambda \mapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une pseudo-résolvante et $\lambda \in \mathbf{D}$ tel que $\mathcal{Ker} R_\lambda = \{0\}$. Alors pour $y \in \mathcal{Im} R_\lambda$, il existe un seul $x_\lambda \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda x_\lambda$. Mais pour $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$, on a :

$$R_\lambda y - R_\mu y = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu y .$$

D'autre part :

$$R_\lambda y - R_\mu y = R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\mu R_\lambda x_\lambda = R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\lambda R_\mu x_\lambda = R_\lambda R_\mu (x_\mu - x_\lambda) .$$

Donc $x_\mu - x_\lambda = (\mu - \lambda)y$, d'où $\lambda y - x_\lambda = \mu y - x_\mu$. Par conséquent, l'opérateur :

$$A : \mathcal{Im} R_\lambda \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$Ay = \lambda y - x_\lambda = \lambda y - R_\lambda^{-1}y$$

est correctement défini (valeur indépendante de λ). De même $\overline{\mathcal{D}(A)} = \overline{\mathcal{Im} R_\lambda} = \mathcal{E}$. Puis que $R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte du théorème du graphe fermé ([DS'67, Theorem II.2.4, pag. 57]) que R_λ^{-1} est un opérateur fermé. Donc $A = \lambda I - R_\lambda^{-1}$ est un opérateur fermé. De plus, on a :

$$R_\lambda^{-1}y = x_\lambda = \lambda y - Ay = (\lambda I - A)y .$$

Par conséquent $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante de A . \checkmark

2. Semi-groupes uniformément continus

Dans la suite nous présenterons quelques problèmes concernant les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach \mathcal{E} .

Définition 2.1. On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{E} une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $(\forall)t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

Le plus important objet associé a un semi-groupe est son générateur.

Définition 2.2. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ l'opérateur linéaire

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$A = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t}.$$

Lemme 2.3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{E} dont le générateur infinitésimal est A .

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une application définie par :

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$ quels que soient $t, s \geq 0$. Compte tenu de l'inégalité :

$$\|T(t) - I\| \leq e^{t\|A\|} - 1, \quad (\forall)t \geq 0,$$

il résulte :

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Donc la famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe uniformément continu.

D'autre part, puisque :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \frac{1}{t} (e^{tA} - I - tA) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| = \\
& = \left\| \frac{1}{t} \left(I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| \leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \\
& = \frac{1}{t} \left(1 + t\|A\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 - t\|A\| \right) = \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) = \\
& = \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|} \|A\| - \|A\| \longrightarrow 0 \quad \text{si } t \searrow 0,
\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A . \square

Lemme 2.4. *Étant donné un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$*

$$T(t) = e^{tA}, \quad (\forall) t \geq 0,$$

ayant pour générateur l'opérateur A .

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors il existe un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ engendré par A . Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un autre semi-groupe uniformément continu engendré par A , alors nous avons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A$$

et :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A.$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| = 0.$$

Pour $a \in]0, \infty)$, nous considérons l'intervalle $I_a = [0, a[$. Comme $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continus, nous voyons que les applications

$$t \longmapsto \|T(t)\|$$

et

$$t \longmapsto \|S(t)\|$$

sont continues. Il existe $c_a \in [1, \infty)$ tel que :

$$\sup_{t \in I_a} \{\|T(t)\|, \|S(t)\|\} \leq c_a.$$

Si $\varepsilon > 0$, il existe $t_0 \in I_a$, $t_0 > 0$, tel que :

$$\left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2}, \quad (\forall) t \in]0, t_0[.$$

Soit $t \in I_a$ arbitrairement fixé et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{t}{n} \in]0, t_0[$. Alors :

$$\begin{aligned} T(t) - S(t) &= \left[T\left(\frac{t}{n}\right) \right] - \left[S\left(\frac{t}{n}\right) \right] = \\ &= T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(0\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(1\frac{t}{n}\right) + \\ &+ T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(1\frac{t}{n}\right) - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) + \\ &+ T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) - \dots - T\left(0\frac{t}{n}\right) S\left(n\frac{t}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right) \end{aligned}$$

quel que soit $t \in I_a$.

De l'inégalité :

$$\left\| \frac{T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2},$$

nous obtenons :

$$\left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n}$$

et par suite :

$$\|T(t) - S(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_a \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n} c_a < \varepsilon, \quad (\forall) t \in I_a.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $T(t) = S(t)$, pour tout $t \in I_a$. Mais, comme $a \in]0, \infty)$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t)$, $(\forall) t \in [0, \infty)$. \square

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 2.5. *Un opérateur $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Preuve. \implies Soit $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors :

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

L'application $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est continue et par suite $\int_0^t T(s) ds \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Avec le lemme 1.1, on voit que :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds = T(0) = I.$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que :

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t) dt - I \right\| < 1.$$

Compte tenu de la remarque 1.3, l'élément $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t) dt$ est inversible, d'où il s'ensuit que $\int_0^\tau T(t) dt$ est inversible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\tau T(t) dt &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\tau T(t+h) dt - \int_0^\tau T(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(u) du - \frac{1}{h} \int_0^h T(u) du. \end{aligned}$$

Avec le lemme 1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\tau T(t) dt &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(u) du - \frac{1}{h} \int_0^{0+h} T(u) du \right] \\ &= T(\tau) - T(0) = T(\tau) - I, \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(h) - I}{h} = [T(\tau) - I] \left[\int_0^\tau T(t) dt \right]^{-1}.$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur :

$$A = [T(\tau) - I] \left[\int_0^\tau T(t) dt \right]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}).$$

⇐ Cette implication est évidente compte tenu du lemme 2.3 et du lemme 2.4. \checkmark

Corollaire 2.6. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Alors :

i) il existe $\omega \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $(\forall) t \geq 0$;

ii) l'application $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est différentiable pour la topologie de la norme et

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. i) Nous avons :

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Pour $\omega = \|A\|$, nous obtenons l'inégalité :

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

L'assertion (ii) provient des égalités suivantes :

$$A = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - T(0)}{t - 0},$$

nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t = 0$. Soient $t > 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0.$$

Par conséquent, l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a :

$$\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t), \quad (\forall) t > 0.$$

Soient $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t+h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{I - T(-h)}{h} - AT(-h) \right\| \|T(t+h)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(-h) - I}{-h} - AT(-h) \right\| e^{(t+h)\|A\|}, \end{aligned}$$

d'où il vient :

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = AT(t).$$

Par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons :

$$\frac{d^-T(t)}{dt} = AT(t), \quad (\forall)t > 0.$$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$ et nous avons :

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t), \quad (\forall)t \geq 0.$$

On vérifie que $AT(t) = T(t)A$, $(\forall)t \geq 0$. \square

3. Semi-groupes de classe C_0

Dans le cadre de ce paragraphe, nous introduisons une classe plus générale que la classe des semi-groupes uniformément continus et nous étudions ses propriétés élémentaires.

Définition 3.1. On appelle C_0 -semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{E} une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $(\forall)t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$, $(\forall)x \in \mathcal{E}$.

Définition 3.2. On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \left| \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right. \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 3.3. Puisque :

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \|x\|$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $t \geq 0$, il en résulte que les semi-groupes uniformément continus sont C_0 -semi-groupes. Mais il existe des C_0 -semi-groupes qui ne sont pas uniformément continus, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 3.4. Soient $p \in [1, \infty)$ et

$$l_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right. \right\}$$

avec la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Considérons une suite de nombres réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et définissons une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur l'espace l_p par

$$T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \forall t \geq 0$$

pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. On voit que

$$T(0)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n 0} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

donc $T(0) = I$. De même, pour tous $t, s \geq 0$ nous avons

$$\begin{aligned} T(t)T(s)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &= T(t)(e^{-a_n s} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} e^{-a_n s} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ &= (e^{-a_n(t+s)} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = T(t+s)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \end{aligned}$$

quelque soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tous $t, s \geq 0$. De plus, pour tout $t \geq 0$ et tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ nous avons

$$\begin{aligned} \|T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p^p &= \left\| (e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-a_n t} - 1|^p |x_n|^p. \end{aligned}$$

Comme

$$|e^{-a_n t} - 1|^p |x_n|^p \leq |x_n|^p$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ est convergente, avec le théorème de Weierstrass il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-a_n t} - 1|^p |x_n|^p$$

est uniformément convergente. Donc

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \searrow 0} |e^{-a_n t} - 1|^p |x_n|^p = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{t \searrow 0} T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. Il s'ensuit donc que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l_p .

Dans la suite, nous prouvons que le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire A défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

par

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} .$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ tel que la limite

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t}$$

existe et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ sa valeur. Donc

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p = 0$$

d'où il résulte que

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{(e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p = 0 .$$

Il vient

$$\lim_{t \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} - y_n \right|^p = 0$$

d'où

$$y_n = \lim_{t \searrow 0} \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} = -a_n x_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

et pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}(A)$ on a

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} .$$

Pour l'inclusion inverse, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ tel que $(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. On voit que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^p < \infty$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^p$ est convergente. Alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ &= \left\| \frac{(e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} + a_n x_n \right|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p . \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} + 1, \quad (\forall) x > 0.$$

Alors

$$g'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}, \quad (\forall)x > 0.$$

Pour l'application

$$h(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1, \quad x \geq 0$$

on voit que $h'(x) \geq 0$, pour tout $x \geq 0$. Compte tenu de la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[0, \infty)$, on déduit que $g'(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1,$$

il vient

$$g(x) < 1, \quad (\forall)x > 0.$$

Par suite

$$\left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p < |a_n x_n|^p$$

et comme la série $\sum |a_n x_n|^p$ est convergente, avec le théorème de Weierstrass on déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p$$

est uniformément convergente. Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ = \lim_{t \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p = 0. \end{aligned}$$

Par suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}(A)$ et

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Donc

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\} \subseteq \mathcal{D}(A)$$

Finalement on voit que

$$\mathcal{D}(A) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

et

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad (\forall)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}(A).$$

De plus, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, alors $\mathcal{D}(A) = l_p$ et A est un opérateur linéaire borné. Donc il engendre un semi-groupe uniformément continu. Par contre, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non-bornée, alors il existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ avec les propriétés $n_k > k$

et $a_{n_k} > k^\alpha$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, où $\alpha = 1$ pour $p > 1$ et $\alpha > 1$ pour $p = 1$. Définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & , \quad n = n_k \\ 0 & , \quad n \neq n_k \end{cases}$$

Il est évident que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$, mais $(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \notin l_p$. Par suite, dans ce cas, on a $\mathcal{D}(A) \neq l_p$ et, par conséquent, A ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu sur l_p .

Dans la suite, nous étudions les propriétés des C_0 -semi-groupes.

Théorème 3.5. *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :*

i) *il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M, \quad (\forall) t \in [0, \tau];$$

ii) *il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. i) Supposons que pour tout $\tau > 0$ et tout $M \geq 1$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$. Pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$. Donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non bornée. Si la suite $(\|T(t_n)x\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était bornée pour tout $x \in \mathcal{E}$, alors compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus ([DS'67, Theorem II.1.11, pag. 52]), il en résulterait que $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait bornée, mais cela contredit l'affirmation précédente. Donc il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit non bornée. D'autre part, compte tenu de la définition 3.1 (iii), il résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t_n)x_0\| = \|x_0\|$ et cela est contradictoire.

ii) Pour $\tau > 0$ et $t > \tau$, nous noterons $m = \left[\frac{t}{\tau}\right] \in \mathbb{N}^*$. Compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r \in [0, \tau)$ tel que $t = m\tau + r$. Alors :

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(m\tau)T(r)\| \leq \|T(\tau)\|^m \|T(r)\| \leq \\ &\leq M^m M \leq M e^{\frac{t}{\tau} \ln M}. \end{aligned}$$

L'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant $\omega = \frac{1}{\tau} \ln M$. \square

Corollaire 3.6. *Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, alors l'application*

$$[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est continue sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Preuve. Soient $t_0 \in [0, \infty)$, $h > 0$ et $x \in \mathcal{E}$. Si $t_0 < h$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\omega t_0} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0 - h)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega(t_0 - h)} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

La continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évidente. \checkmark

Remarque 3.7. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, alors avec le théorème 3.5 (ii) on voit qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Si $\omega < 0$, alors nous obtenons :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq M, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Par conséquent on peut considérer que $\omega \geq 0$.

Nous noterons par $\mathcal{SG}(M, \omega)$ l'ensemble des C_0 -semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Proposition 3.8. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité

$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $(\forall) t \geq 0$. \checkmark

Remarque 3.9. On voit que

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A), \quad (\forall) t \geq 0.$$

Théorème 3.10. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application

$$[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et nous avons :

$$i) \quad \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad (\forall) t \geq 0;$$

$$ii) \quad T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. i) Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)Ax, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Si $t - h > 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(h)Ax - Ax\| \right). \end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax$$

et :

$$\frac{d^-}{dt} T(t)x = T(t)Ax, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad (\forall) t \geq 0.$$

ii) Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$\frac{d}{ds} T(s)x = T(s)Ax, \quad (\forall) s \in [0, t], t \geq 0,$$

d'où :

$$\int_0^t T(s)Ax ds = \int_0^t \frac{d}{ds} T(s)x ds = T(t)x - x, \quad (\forall) t \geq 0. \quad \checkmark$$

Lemme 3.11. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe. Alors :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$.

Preuve. L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s) - T(t))x \, ds \right\| \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in \mathcal{E}$. \square

Proposition 3.12. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{E}$, alors $\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité

$$A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(u)x \, du - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(u)x \, du - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)x \, du - \frac{1}{h} \int_0^t T(u)x \, du \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(u)x \, du - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)x \, du. \end{aligned}$$

Par passage à limite pour $h \searrow 0$ et compte tenu du lemme 3.11, nous obtenons :

$$A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x, \quad (\forall) t \geq 0$$

et :

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A). \quad \square$$

Théorème 3.13. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :

i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;

ii) A est un opérateur fermé.

Preuve. i) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A), \quad (\forall)n \in \mathbb{N},$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x \, ds = T(0)x = x.$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.

ii) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0, t]$. Par suite $T(s)Ax_n \rightarrow T(s)y$, pour $n \rightarrow \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$. D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax_n \, ds,$$

ou bien :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = y.$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé.

✓

Théorème 3.14. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si

$$F\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et

$$FAx = AFx, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve. \implies Soit $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que :

$$T(t)F = FT(t), \quad (\forall)t \geq 0$$

et $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors, nous avons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)Fx - Fx}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{FT(t)x - Fx}{t} = \lim_{t \searrow 0} F \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Par conséquent $Fx \in \mathcal{D}(A)$ et on a $AFx = FAx$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

\Leftarrow Soit $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que :

$$F\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et

$$AFx = FAx, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, définissons l'application :

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)FT(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}[T(t-s)]FT(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}FT(s)x \\ &= -[T(t-s)]AFT(s)x + T(t-s)FAT(s)x = 0, \end{aligned}$$

compte tenu de la commutativité. Par conséquent :

$$U(0)x = U(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on obtient :

$$T(t)Fx = FT(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$. Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $T(t)F, FT(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour tout $t \geq 0$, nous obtenons :

$$T(t)Fx = FT(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{E}$. \square

4. C_0 -semi-groupes différentiables

Par la suite, nous étudierons les propriétés des C_0 -semi-groupes pour lesquels l'application $]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$ est différentiable, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Définition 4.1. On dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe différentiable (et notons $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$) si l'application

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est différentiable, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Remarque 4.2. Avec le Théorème 3.10 nous avons vu que si $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$

est un C_0 -semi-groupe avec le générateur A et $x \in \mathcal{D}(A)$, alors l'application $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour tout $t \geq 0$. De plus, si $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour tous $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$, alors $\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$ et donc A est un opérateur borné.

Théorème 4.3. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$;
- ii) $\text{Im } T(t) \subset \mathcal{D}(A)$, $(\forall) t > 0$.

Preuve. i) \implies ii) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t, h > 0$. Puisque l'application :

$$]0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est différentiable, la limite du rapport

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h},$$

lorsque $h \searrow 0$, existe et est égale par définition avec $AT(t)x$. Par conséquent, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$.

ii) \implies i) Considérons $x \in \mathcal{E}$ et $t, h > 0$. Comme $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$\frac{d^+ T(t)x}{dt} = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = AT(t)x.$$

D'autre part, pour $h \in]0, t[$ et $\delta \in]0, t-h[$ on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - AT(t)x \right\| \\ &= \left\| \frac{T(t-\delta)T(\delta)x - T(t-h-\delta)T(\delta)x}{h} - AT(\delta)T(t-\delta)x \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \left[\int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \frac{d}{d\tau} T(\tau)T(\delta)x \, d\tau - \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} AT(\delta)T(t-\delta)x \, d\tau \right] \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} [AT(\delta)T(\tau) - AT(\delta)T(t-\delta)] x \, d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \|AT(\delta)\| \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \|T(\tau)x - T(t-\delta)x\| \, d\tau \\ &= \frac{1}{h} \|AT(\delta)\| h \|T(c)x - T(t-\delta)x\| \\ &= \|AT(\delta)\| \|T(c)x - T(t-\delta)x\|, \end{aligned}$$

où $c \in [t - h - \delta, t - \delta]$. Par conséquent :

$$\frac{d^-T(t)x}{dt} = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = AT(t)x.$$

Donc $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe différentiable. \square

Proposition 4.4. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$. Alors l'application

$$]0, \infty[\ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve. Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_1, t_2 \in]0, \infty[$ tel que $t_1 < t_2$. Compte tenu du théorème 4.3, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t_1)x - T(t_2)x\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} T(s)x \, ds \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} AT(t_1)T(s-t_1)x \, ds \right\| \\ &\leq \|AT(t_1)\| \int_{t_1}^{t_2} M e^{(s-t_1)\omega} \|x\| \, ds. \end{aligned}$$

Par suite, nous avons :

$$\|T(t_1) - T(t_2)\| \leq \|AT(t_1)\| M \int_{t_1}^{t_2} e^{(s-t_1)\omega} \, ds,$$

d'où résulte la continuité uniforme de l'application considérée dans l'énoncé. \square

Théorème 4.5. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathcal{E}$, on a $T(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ et

$$A^n T(t)x = \left[AT \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n x, \quad (\forall) t > 0;$$

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$]0, \infty[\ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}(A^n)$$

est n fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et

$$T(t)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} T(t) = A^n T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \quad (\forall) t > 0;$$

iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$]0, \infty[\ni t \longmapsto T(t)^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve. Prouvons les affirmations de l'énoncé par récurrence.

i) Avec le théorème 4.3, on voit que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$AT(t)x = \left[AT \left(\frac{t}{1} \right) \right]^1 x, \quad (\forall) t > 0.$$

Supposons que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on ait $T(t)x \in \mathcal{D}(A^k)$ et :

$$A^k T(t)x = \left[AT \left(\frac{t}{k} \right) \right]^k x, \quad (\forall) t > 0.$$

Soient $x \in \mathcal{E}$ et $\delta \in]0, t[$. On voit que $T(t - \delta)T(\delta)x \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$AT(t)x = AT(t - \delta)T(\delta)x = T(t - \delta)AT(\delta)x \in \mathcal{D}(A^k).$$

Par conséquent $T(t)x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, $(\forall) t > 0$. De plus :

$$\begin{aligned} A^{k+1}T(t)x &= A [A^k T(t - \delta)T(\delta)] x = A [T(t - \delta)A^k T(\delta)] x \\ &= AT(t - \delta) \left[AT \left(\frac{\delta}{k} \right) \right]^k x. \end{aligned}$$

Si $\delta = \frac{kt}{k+1}$, il vient :

$$A^{k+1}T(t)x = \left[AT \left(\frac{t}{k+1} \right) \right]^{k+1} x.$$

Finalement, nous obtenons (i).

ii) Pour $n = 1$, compte tenu du théorème 4.3 et de la proposition 4.4, il résulte que l'application :

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}(A)$$

est différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :

$$T(t)' = AT(t), \quad (\forall) t > 0.$$

Comme A est un opérateur fermé et $T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte que $AT(t)$ est un opérateur fermé défini sur \mathcal{E} . Avec le théorème du graphe fermé ([DS'67, Theorem II.2.4, pag. 57]), on voit que $AT(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $(\forall) t > 0$. Supposons que l'application :

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}(A^k)$$

est k fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :

$$T(t)^{(k)} = A^k T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \quad (\forall) t > 0.$$

De plus, avec la preuve précédente, on voit que $T(t)x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, pour tout $t > 0$. Soient $x \in \mathcal{E}$, $\|x\| \leq 1$ et $t > 0$. Si $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$, on a :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{T(t+h)^{(k)}x - T(t)^{(k)}x}{h} - A^{k+1}T(t)x \right\| \\
&= \left\| \frac{A^k T(\delta)T(t+h-\delta)x - A^k T(\delta)T(t-\delta)x}{h} - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} [T(t+h-\delta) - T(t-\delta)]x - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} \frac{d}{d\tau} T(\tau)x \, d\tau - A^{k+1}T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} T(t-\delta)x \, d\tau \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} AT(\tau)x \, d\tau - A^{k+1}T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} T(t-\delta)x \, d\tau \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{h} A^{k+1}T(\delta) \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} [T(\tau) - T(t-\delta)]x \, d\tau \right\| \\
&\leq \frac{\|A^{k+1}T(\delta)\|}{h} \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} \|T(\tau) - T(t-\delta)\| \|x\| \, d\tau \\
&= \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(c) - T(t-\delta)\| \|x\|,
\end{aligned}$$

où $c \in [t-\delta, t+h-\delta]$. Il s'ensuit que :

$$\left\| \frac{T(t+h)^{(k)} - T(t)^{(k)}}{h} - A^{k+1}T(t) \right\| \leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(c) - T(t-\delta)\|,$$

où $c \in [t-\delta, t+h-\delta]$. Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)^{(k)} - T(t)^{(k)}}{h} = A^{k+1}T(t), \quad (\forall) t > 0.$$

Si $h > 0$ tel que $t-h > 0$ et $\delta \in]0, t-h[$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{T(t-h)^{(k)}x - T(t)^{(k)}x}{-h} - A^{k+1}T(t)x \right\| \\
&= \left\| \frac{A^k T(\delta)T(t-\delta)x - A^k T(\delta)T(t-h-\delta)x}{h} - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} [T(t-\delta) - T(t-h-\delta)]x - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \frac{d}{d\tau} T(\tau)x \, d\tau - A^{k+1}T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} T(t-\delta)x \, d\tau \right\| \\
&= \left\| A^k T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} AT(\tau)x \, d\tau - A^{k+1}T(\delta) \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} T(t-\delta)x \, d\tau \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{h} A^{k+1}T(\delta) \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} [T(\tau) - T(t-\delta)]x \, d\tau \right\| \\
&\leq \frac{\|A^{k+1}T(\delta)\|}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \|T(\tau) - T(t-\delta)\| \|x\| \, d\tau \\
&= \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(c) - T(t-\delta)\| \|x\|,
\end{aligned}$$

où $c \in [t-h-\delta, t-\delta]$. Il vient :

$$\left\| \frac{T(t-h)^{(k)} - T(t)^{(k)}}{-h} - A^{k+1}T(t) \right\| \leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(c) - T(t-\delta)\|,$$

où $c \in [t-h-\delta, t-\delta]$. Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)^{(k)} - T(t)^{(k)}}{-h} = A^{k+1}T(t), \quad (\forall) t > 0.$$

Il s'ensuit que $T(t)^{(k)}$ est différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :

$$\left(T(t)^{(k)} \right)' = T(t)^{(k+1)} = A^{k+1}T(t), \quad (\forall) t > 0.$$

Comme A est un opérateur fermé et $A^k T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte que $A(A^k T(t))$ est un opérateur fermé défini sur \mathcal{E} . Avec le théorème du graphe fermé ([DS'67, Theorem II.2.4, pag. 57]), on voit que $T(t)^{(k+1)} = A^{k+1}T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $(\forall) t > 0$. Finalement, on a obtenu (ii).

iii) Soient $x \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| \leq 1$ et $t > 0$. Pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t+h)'x - T(t)'x\| &= \|AT(t+h)x - AT(t)x\| \\ &\leq \|AT(\delta)\| \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \|x\|, \end{aligned}$$

d'où il résulte :

$$\|T(t+h)' - T(t)'\| \leq \|AT(\delta)\| \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\|.$$

De façon analogue, pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t-h[$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t-h)'x - T(t)'x\| &= \|AT(t-h)x - AT(t)x\| \\ &\leq \|AT(\delta)\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \|x\|, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|T(t-h)' - T(t)'\| \leq \|AT(\delta)\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\|.$$

Il est clair que l'application :

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)' \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Supposons que l'application :

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)^{(k)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Si $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t+h)^{(k+1)}x - T(t)^{(k+1)}x\| &= \|A^{k+1}T(t+h)x - A^{k+1}T(t)x\| \\ &\leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \|x\|, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\|T(t+h)^{(k+1)} - T(t)^{(k+1)}\| \leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\|.$$

D'autre part, pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t-h[$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t-h)^{(k+1)}x - T(t)^{(k+1)}x\| &= \|A^{k+1}T(t-h)x - A^{k+1}T(t)x\| \\ &\leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \|x\| \end{aligned}$$

et on voit que :

$$\|T(t-h)^{(k+1)} - T(t)^{(k+1)}\| \leq \|A^{k+1}T(\delta)\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\|.$$

Donc l'application :

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)^{(k+1)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. La propriété (iii) en découle immédiatement. \square

Remarque 4.6. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$, alors l'application

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est de classe $C_{]0,\infty)}^\infty$.

Remarque 4.7. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$T(t)^{(n)} = A^n T(t) = \left[AT \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n, \quad (\forall) t > 0.$$

5. Propriétés spectrales des semi-groupes

5.1. Le cas des semi-groupes uniformément continus. Nous commençons par quelques problèmes de théorie spectrale pour un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour le générateur infinitésimal l'opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Théorème 5.1. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$. Alors l'application

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$. Avec le corollaire 2.6 (i), on voit que :

$$\|T(t)\| \leq e^{\|A\|t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

De même, nous avons :

$$\|e^{-\lambda t} T(t) x\| \leq e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \|A\|)t} \|x\|, \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

et :

$$\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \|A\|)t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \|A\|}.$$

L'application R_λ est donc bornée et il est clair que R_λ est linéaire. Pour $x \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) Ax dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t) x dt \\ &= -x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt = -x + \lambda R_\lambda x, \end{aligned}$$

d'où $x = R_\lambda(\lambda I - A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent $R_\lambda(\lambda I - A) = I$. De même, nous avons :

$$\begin{aligned} AR_\lambda x &= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax \, dt = R_\lambda Ax, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Par suite, on a $AR_\lambda x = R_\lambda Ax = -x + \lambda R_\lambda x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Il en résulte que $(\lambda I - A)R_\lambda = I$. Par conséquent $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda = R(\lambda; A)$. \square

Définition 5.2. L'opérateur $R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ défini par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re} \lambda > \|A\|,$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A .

Remarque 5.3. On a :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \|A\|\} \subset \rho(A)$$

et :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq \|A\|\}.$$

De même, nous obtenons :

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \|A\|}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$.

Pour obtenir des représentations de type Riesz-Dunford, on a besoin d'une classe spéciale de contours de Jordan.

Définition 5.4. Un contour de Jordan lisse et fermé qui entoure $\sigma(A)$, s'appelle un contour de Jordan A -spectral s'il est homotope avec un cercle C_r de centre O et de rayon $r > \|A\|$.

Théorème 5.5. Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si Γ_A est un contour de Jordan A -spectral, alors nous avons :

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A) \, d\lambda, \quad (\forall)t \geq 0.$$

Preuve. Soit Γ_A un contour de Jordan A -spectral. Alors Γ_A est homotope avec un cercle C_r de centre O et de rayon $r > \|A\|$. Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Compt tenu de la proposition 1.7 (iii), on voit que :

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}},$$

uniformément par rapport à λ sur les sous-ensembles compacts de $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\}$, particulièrement sur le cercle C_r . On a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} d\lambda A^n.$$

Appliquons la formule de Cauchy ([DS'67, pag. 228]) avec la fonction $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{t^n}{n!}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{tA} = T(t), \quad (\forall) t \geq 0. \quad \checkmark$$

Prouvons le théorème spectral pour les semi-groupes uniformément continus.

Théorème 5.6. *Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Alors :*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve. Montrons que $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$, $(\forall) t \geq 0$. Soit $\xi \in \sigma(A)$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application :

$$g_\xi(\lambda) = \frac{e^{\xi t} - e^{\lambda t}}{\xi - \lambda}$$

est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$. Compte tenu du théorème 5.5, on voit que :

$$e^{\xi t} I - e^{At} = (\xi I - A)g_\xi(A).$$

Si $e^{\xi t} \in \rho(T(t))$, alors il existe $Q = [e^{\xi t} I - T(t)]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Par conséquent :

$$I = (\xi I - A)g_\xi(A)Q,$$

d'où il résulte que $\xi \in \rho(A)$, ce qui est absurde. Donc $e^{\xi t} \in \sigma(T(t))$ et par suite $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$.

Montrons que $\sigma(T(t)) \subset e^{t\sigma(A)}$. Soit $\mu \in \sigma(T(t))$. Supposons par absurde que $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$. Alors pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application :

$$h(\lambda) = (\mu - e^{\lambda t})^{-1}$$

est définie sur un voisinage du $\sigma(A)$. Donc :

$$h(A) (\mu I - e^{tA}) = I$$

et il en résulte que $\mu \in \rho(T(t))$ et cela est absurde. Par suite $\mu \in e^{t\sigma(A)}$, d'où $\sigma(T(t)) \subset e^{t\sigma(A)}$. Finalement on voit que :

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \quad (\forall) t \geq 0. \quad \square$$

5.2. Le cas des C_0 -semi-groupes. Nous présentons maintenant quelques propriétés spectrales des C_0 -semi-groupes. Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$.

Théorème 5.7. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors l'application

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur \mathcal{E} , $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Puisque $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$, nous avons :

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t} T(t)x\| \leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)\| \|x\| \leq M e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} \|x\|, \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Définissons l'application :

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

par :

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} T(t)x\| \, dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|x\|, \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné. Si $x \in \mathcal{E}$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds - \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \right) - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x \, ds.
\end{aligned}$$

Par passage à limite, on obtient :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x.$$

Il en résulte que $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

ou bien

$$(\lambda I - A)R_\lambda x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}
R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x \, dt \\
&= [e^{-\lambda t} T(t)x]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = -x + \lambda R_\lambda x,
\end{aligned}$$

d'où :

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. \square

Remarque 5.8. On voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a

$$\mathcal{I}m R(\lambda; A) = \mathcal{I}m R_\lambda \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Définition 5.9. L'opérateur

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad \lambda \in \Lambda_\omega,$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.

Remarque 5.10. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors nous avons

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

et

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}.$$

Lemme 5.11. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $t > 0$, l'application

$$B_\lambda(t) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds$$

définit un opérateur linéaire borné sur \mathcal{E} vérifiant les propriétés suivantes :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus $B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$.

Preuve. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \|B_\lambda(t)x\| &= \left\| \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \right\| \leq \int_0^t e^{\operatorname{Re} \lambda(t-s)} \|T(s)\| \|x\| \, ds \\ &\leq M e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|x\| \int_0^t e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \omega)s} \, ds < \infty. \end{aligned}$$

Comme la linéarité est évidente, il en résulte que $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, quels que soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $t > 0$. Si $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} B_\lambda(t)x &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(h+s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau+h)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left[\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \right] - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \\
&\quad + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} B_\lambda(t)x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau .
\end{aligned}$$

En passant à limite, on a :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)B_\lambda(t)x - B_\lambda(t)x}{h} = T(t)x + \lambda B_\lambda(t)x - e^{\lambda t}x ,$$

d'où $B_\lambda(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x , \quad (\forall)x \in \mathcal{E} .$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t)Ax &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)Ax \, ds \\ &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{d}{ds}T(s)x \, ds = T(t)x - e^{\lambda t}x + \lambda B_\lambda(t)x, \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus, nous obtenons que :

$$B_\lambda(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = B_\lambda(t)(\lambda I - A)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où :

$$AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Compte tenu du théorème 3.14, on voit que :

$$B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t), \quad (\forall)t \geq 0. \quad \checkmark$$

On peut formuler maintenant le théorème spectral pour C_0 -semi-groupes.

Théorème 5.12. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :*

$$e^{t\sigma(A)} = \{e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(T(t)), \quad (\forall)t \geq 0.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$. Alors on peut considérer l'opérateur $Q = (e^{\lambda t}I - T(t))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Compte tenu du lemme 5.11, on a :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Par multiplication avec Q à droite dans la première égalité et à gauche dans la seconde, nous obtenons :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$QB_\lambda(t)(\lambda I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Mais, avec le lemme 5.11, il en résulte que :

$$(e^{\lambda t}I - T(t))B_\lambda(t) = B_\lambda(t)(e^{\lambda t}I - T(t)),$$

et nous voyons que $QB_\lambda(t) = B_\lambda(t)Q$. Par conséquent :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$B_\lambda(t)Q(\lambda I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Il s'ensuit que $\lambda \in \rho(A)$ et finalement on voit que :

$$\rho(T(t)) \subset e^{t\rho(A)}, \quad (\forall)t \geq 0,$$

ou bien :

$$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)), \quad (\forall)t \geq 0. \quad \checkmark$$

Remarque 5.13. Nous avons vu que pour les semi-groupes uniformément continus on a l'égalité :

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \quad (\forall)t \geq 0.$$

Mais il existe des C_0 -semi-groupes pour lesquels l'inclusion du théorème 5.12 est stricte.

Définition 5.14. On dit que le C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est nilpotent s'il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0$, pour tout $t > t_0$.

Proposition 5.15. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ un semi-groupe nilpotent et A son générateur infinitésimal. Alors $\sigma(A) = \emptyset$.

Preuve. Comme le C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est nilpotent, il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0$, $(\forall)t > t_0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathcal{E}$, on a :

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leq e^{-\operatorname{Re}\lambda t} M e^{\omega t} \|x\|, \quad (\forall)t \in [0, t_0]$$

et comme :

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)x dt = 0,$$

on peut définir la transformée de Laplace :

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$R_\lambda x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)x dt = \int_0^{t_0} e^{-\lambda t}T(t)x dt$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Avec le théorème 5.7, il vient $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Donc $\rho(A) = \mathbb{C}$, c'est-à-dire $\sigma(A) = \emptyset$. \checkmark

Remarque 5.16. Pour un semi-groupe nilpotent $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur $A \notin \mathcal{B}(\mathcal{E})$, l'inclusion du théorème 5.12 est stricte.

Théorème 5.17. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :

$$\sigma(R(\lambda; A)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \mid \zeta \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}$$

quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$.

Preuve. Soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\mu \in \rho(A)$, $\mu \neq \lambda$. Définissons :

$$S : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par :

$$S = (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A).$$

Comme S est un opérateur fermé, avec le théorème du graphe fermé, on voit que $S \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{E}$ nous avons :

$$\begin{aligned} SR(\lambda; A)x &= (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A)R(\lambda; A)x \\ &= (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\lambda; A)R(\mu; A)x \\ &= (\lambda - \mu)R(\mu; A)x \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)Sx &= R(\lambda; A)(\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A)x \\ &= (\lambda - \mu)R(\lambda; A)(\lambda I - A)R(\mu; A)x \\ &= (\lambda - \mu)R(\mu; A)x. \end{aligned}$$

Par conséquent $SR(\lambda; A) = R(\lambda; A)S$. De même, pour $x \in \mathcal{E}$ on a :

$$\begin{aligned} S \left[\frac{1}{\lambda - \mu} I - R(\lambda; A) \right] x &= (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A) \left[\frac{1}{\lambda - \mu} I - R(\lambda; A) \right] x \\ &= [(\lambda I - A)R(\mu; A) - (\lambda - \mu)R(\mu; A)] x \\ &= (\lambda I - A - \lambda I + \mu I)R(\mu; A)x \\ &= (\mu I - A)R(\mu; A)x = x. \end{aligned}$$

De façon analogue, pour tout $x \in \mathcal{E}$ on peut montrer que :

$$\left[\frac{1}{\lambda - \mu} I - R(\lambda; A) \right] Sx = x.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\lambda - \mu} \in \rho(R(\lambda; A)),$$

d'où :

$$\left\{ \frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \rho(A) - \{\lambda\} \right\} \subset \rho(R(\lambda; A)).$$

Il s'ensuit que :

$$\sigma(R(\lambda; A)) \subset \left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \mid \zeta \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}.$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \lambda$, tel que $\frac{1}{\lambda - \mu} \in \rho(R(\lambda; A))$.

Alors il existe $R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ nous avons :

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x &= R(\lambda; A)\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]^{-1}x \\ &= [R(\lambda; A)^{-1}]^{-1}\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]^{-1}x \\ &= \left\{\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]R(\lambda; A)^{-1}\right\}^{-1}x \\ &= \left[\frac{1}{\lambda - \mu}R(\lambda; A)^{-1} - I\right]^{-1}x = \left\{R(\lambda; A)^{-1}\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]\right\}^{-1}x \\ &= \left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]^{-1}R(\lambda; A)x = R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)R(\lambda; A)x. \end{aligned}$$

Posons :

$$Q = R(\lambda; A)R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right).$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$\begin{aligned} (\mu I - A)Qx &= (\mu I - \lambda I + \lambda I - A)R(\lambda; A)R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x \\ &= [(\lambda I - A)R(\lambda; A) - (\lambda - \mu)R(\lambda; A)]R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x \\ &= [I - (\lambda - \mu)R(\lambda; A)]R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x \\ &= (\lambda - \mu)\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x = (\lambda - \mu)x, \end{aligned}$$

d'où il résulte que :

$$\frac{1}{\lambda - \mu}(\mu I - A)Qx = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q(\mu I - A)x &= R(\lambda; A)R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)(\mu I - A)x \\ &= R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)R(\lambda; A)(\mu I - \lambda I + \lambda I - A)x \\ &= R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)[R(\lambda; A)(\lambda I - A) - R(\lambda; A)(\lambda - \mu)]x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R\left(\frac{1}{\lambda-\mu}; R(\lambda; A)\right) [I - (\lambda - \mu)R(\lambda; A)]x \\
&= (\lambda - \mu)R\left(\frac{1}{\lambda-\mu}; R(\lambda; A)\right) \left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda; A)\right]x = (\lambda - \mu)x,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{\lambda - \mu}Q(\mu I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Par conséquent $\mu \in \rho(A) - \{\lambda\}$. Il s'ensuit que :

$$\rho(R(\lambda; A)) \subset \left\{ \frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \rho(A) - \{\lambda\} \right\},$$

ou bien :

$$\left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \mid \zeta \in \sigma(A) \right\} \subset \sigma(R(\lambda; A)), \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

De plus, si $0 \in \rho(R(\lambda; A))$, alors il existe $(0I - R(\lambda; A))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, d'où $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ ce qui est absurde. Par conséquent $0 \in \sigma(R(\lambda; A))$ et donc

$$\left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \mid \zeta \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\} \subset \sigma(R(\lambda; A))$$

quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Finalement, nous voyons que :

$$\sigma(R(\lambda; A)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \mid \zeta \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}, \quad (\forall)\lambda \in \Lambda_\omega. \quad \square$$

5.3. Le cas des C_0 -semi-groupes différentiables. Nous finissons cette section avec le théorème spectral pour les C_0 -semi-groupes différentiables (voir [LBPS'09]). Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $t > 0$, nous avons défini l'opérateur linéaire borné :

$$B_\lambda(t) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds$$

et nous avons étudié ses propriétés avec le lemme 5.11. Si le C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est différentiable, on peut montrer le résultat suivant.

Lemme 5.18. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :

i) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $t > 0$, l'opérateur $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est indéfiniment dérivable et

$$B_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right), \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*;$$

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $t > 0$ on a

$$B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Montrons les affirmations de l'énoncé par récurrence.

i) Soient $x \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t > 0$. Alors :

$$B_\lambda(t)'x = \lambda \left(B_\lambda(t)x + \frac{T(t)x}{\lambda} \right).$$

Supposons que :

$$B_\lambda(t)^{(k)}x = \lambda^k \left(B_\lambda(t)x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{T(t)^{(i)}x}{\lambda^{i+1}} \right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t)^{(k+1)}x &= \left(B_\lambda(t)^{(k)}x \right)' = \lambda^k \left(\lambda B_\lambda(t)x + T(t)x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{T(t)^{(i+1)}x}{\lambda^{i+1}} \right) \\ &= \lambda^{k+1} \left(B_\lambda(t)x + \sum_{i=0}^k \frac{T(t)^{(i)}x}{\lambda^{i+1}} \right) \end{aligned}$$

et nous obtenons (i).

ii) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t > 0$. Compte tenu du théorème 4.5, pour $x \in \mathcal{E}$, on voit que $T(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ et :

$$\begin{aligned} A^n T(t)x &= A^n T\left(\frac{nt}{n}\right)x = A^n T\left(\underbrace{\frac{t}{n} + \frac{t}{n} + \dots + \frac{t}{n}}_{n \text{ fois}}\right)x \\ &= A^n \underbrace{T\left(\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) \dots T\left(\frac{t}{n}\right)}_{n \text{ fois}}x = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x \\ &= \left[T\left(\frac{t}{n}\right) A \right]^n x = T\left(\frac{nt}{n}\right) A^n = T(t)A^n x, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

parce que le semi-groupe commute avec son générateur infinitésimal. De même, avec le lemme 5.11 il résulte que :

$$B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t).$$

Alors pour $x \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)^{(n)}T(t)x &= \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) T(t)x \\
&= \lambda^n \left(B_\lambda(t)T(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i T(t)T(t)}{\lambda^{i+1}} \right) x \\
&= \lambda^n \left(T(t)B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)A^i T(t)}{\lambda^{i+1}} \right) x \\
&= T(t)\lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) x \\
&= T(t)B_\lambda(t)^{(n)}x, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)B_\lambda(t)x,$$

d'où il résulte :

$$B_\lambda(t)Ax = AB_\lambda(t)x.$$

Supposons que pour $x \in \mathcal{D}(A^k)$ nous avons :

$$B_\lambda(t)A^k x = A^k B_\lambda(t)x.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, il vient :

$$B_\lambda(t)A^{k+1}x = B_\lambda(t)A^k(Ax) = A^k B_\lambda(t)Ax = A^k AB_\lambda(t)x = A^{k+1}B_\lambda(t)x.$$

Il s'ensuit donc que :

$$B_\lambda(t)A^n x = A^n B_\lambda(t)x,$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A^n)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. De même, si $x \in \mathcal{D}(A^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)^{(n)}A^n x &= \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) A^n x \\
&= \lambda^n \left(B_\lambda(t)A^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i T(t)A^n}{\lambda^{i+1}} \right) x \\
&= \lambda^n \left(A^n B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^n A^i T(t)}{\lambda^{i+1}} \right) x \\
&= A^n \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) x = A^n B_\lambda(t)x, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in \mathcal{E}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)}x &= {}^{(n)}A^nT(t)x = A^nB_\lambda(t)^{(n)}T(t)x \\ &= A^nT(t)B_\lambda(t)^{(n)}x = T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}x, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Maintenant nous présentons un théorème spectral pour C_0 -semi-groupes différentiables.

Théorème 5.19[spectral mapping]. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(e^{t\sigma(A)}\right)^{(n)} := \{\lambda^n e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma\left(T(t)^{(n)}\right), \quad (\forall)t > 0.$$

Preuve. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t > 0$, nous considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} B_\lambda(t) : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ B_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds. \end{aligned}$$

Avec le lemme 5.18, on déduit que l'opérateur $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est indéfiniment dérivable et :

$$B_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right), \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Compte tenu du lemme 5.11, il résulte que :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et que :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il s'ensuit que :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)^{(n)}x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$B_\lambda(t)^{(n)}(\lambda I - A)x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\lambda^n e^{\lambda t} \in \rho\left(T(t)^{(n)}\right)$, alors on peut considérer :

$$Q = \left(\lambda^n e^{\lambda t}I - T(t)^{(n)}\right)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)^{(n)}Qx = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et

$$QB_\lambda(t)^{(n)}(\lambda I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais, avec le lemme 5.18, il résulte :

$$B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc :

$$\lambda^n e^{\lambda t} B_\lambda(t)^{(n)} - B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t} B_\lambda(t)^{(n)} - T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}$$

et :

$$B_\lambda(t)^{(n)} \left(\lambda^n e^{\lambda t} I - T(t)^{(n)} \right) = \left(\lambda^n e^{\lambda t} I - T(t)^{(n)} \right) B_\lambda(t)^{(n)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite :

$$B_\lambda(t)^{(n)}Q = QB_\lambda(t)^{(n)}, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

et nous voyons que :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)^{(n)}Qx = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et :

$$B_\lambda(t)^{(n)}Q(\lambda I - A)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on obtient que $\lambda \in \rho(A)$. Nous en déduisons que $\lambda \in \sigma(A)$ implique $\lambda^n e^{\lambda t} \in \sigma \left(T(t)^{(n)} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent :

$$\{ \lambda^n e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A) \} \subset \sigma \left(T(t)^{(n)} \right),$$

ou bien :

$$\{ (e^{\lambda t})^{(n)} \mid \lambda \in \sigma(A) \} \subset \sigma \left(T(t)^{(n)} \right)$$

et finalement :

$$\left(e^{t\sigma(A)} \right)^{(n)} \subset \sigma \left(T(t)^{(n)} \right),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$. \square

Acknowledgements : The author is grateful to the anonymous referee for his/her careful reading of the paper and valuable suggestions.

References

- [Ah'91] AHMED, N.U. *Semigroup theory with application to systems and control*. Logman Scientific & Tehnical, London, 1991.
- [Ba'76] BARBU, V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach Spaces*. Editura Academiei R.S.R. București and Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.
- [BB'67] BUTZER, P.L., BERENS, H. *Semi-Groups of Operators and Approximations*. Springer Verlag, New York Inc., 1967.
- [vCa'85] VAN CASTEREN, J. *Generators of Strongly Continuous Semigroups*. Pitman, Boston, 1985.
- [CHADP'87] CLÉMENT, P.H., HEIJMANS, H.J.A.M., ANGENENT, S., VAN DUIJN, C.J., DE PATGER, B. *One-parameter Semigroups*. CWI Monograph 5, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987.
- [Da'80] DAVIES, E.B. *One-parameter semigroups*. Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

- [DS'67] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T. *Linear Operators. Part.I*. Interscience Publishers, Inc. New York, Wiley, 1967.
- [Fe'52] FELLER, W. *The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations*. Ann. of Math. **55** (1952), 468–519.
- [Fe'53] FELLER, W. *On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators*. Ann. of Math., **58** (1953), 166–174.
- [Go'85] GOLDSTEIN, J.A. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [Hi'36] HILLE, E. *Notes on linear transformation*. Trans. Amer. Math. Soc., **39** (1936), 131–153.
- [Hi'48] HILLE, E. *Functional Analysis and Semi-Groups*. A.M.S., New York, 1948.
- [Hi'52] HILLE, E. *A note on Cauchy's problem*. Ann. Soc. Pol. Math., **25** (1952), 56–68.
- [HP'57] HILLE, E., PHILLIPS, R.S. *Functional Analysis and Semi-Groups*. A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957.
- [Is'81] ISTRĂȚESCU, V.I. *Introduction to Linear Operator Theory*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.
- [LBPS'09] LEMLE, L.D., BINZAR, T., PATER, F.L., STOICA, D.M. *Sur le théorème spectral des semi-groupes différentiables*. Proceedings of the 12-th Symposium of Mathematics and its Applications, Timișoara, 2009, pp. 124–129.
- [Mi'52] MIYADERA, I. *Generation of strongly continuous semi-groups of operators*. Tohoku Math. J., **4** (1952), 109–114.
- [Mi'56] MIYADERA, I. *On the representation theorem by Laplace transformation of vector-valued functions*. Tohoku Math. J., **8** (1956), 170–180.
- [Na'35] NATHAN, D.S. *One parameter groups of transformations in abstract vector spaces*. Duke Math. J., **1** (1935), 518–526.
- [Pa'83] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.
- [Ph'52] PHILLIPS, R.S. *On the generation of semi-groups of linear operators*. Pacific J.Math., **2** (1952), 393–415.
- [Vr'01] VRABIE, I.I. *Semigrupuri de operatori liniari și aplicații*. Editura Universității “Al. I. Cuza”, Iași, 2001.
- [Yo'36] YOSIDA, K. *On the group embeded in the metrical complete ring*. Japan J. Math., **13** (1936), 7–26.
- [Yo'48] YOSIDA, K. *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators*. J. Math. Soc. Japan, **1** (1948), 15–21.
- [Yo'57] YOSIDA, K. *Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [Yo'67] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer Verlag, New York, 1967.

(Recibido en junio 18 de 2008. Versión revisada en septiembre 20 de 2010. Aceptado para publicación en noviembre de 2010)

LUDOVIC DAN LEMLE, INSTITUT CAMILLE JORDAN, CNRS-UMR 5208
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON1, 69622 VILLEURBANNE, FRANCE
FACULTÉ D'INGÉNIEURIE, UNIVERSITÉ “POLITEHNICA” DE TIMIȘOARA
331128 HUNEDOARA, ROUMANIE
e-mail : dan.lemle@fih.upt.ro