Lecturas Matemáticas
Volumen **30** *(2009), páginas 5–13*
ISSN 0120–1980

Una función absolutamente continua con inversa no absolutamente continua y preimagen no medible Lebesgue

Francisco J. Mendoza Torres & Gustavo Mendoza Torres
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

Abstract. From the Cantor set and one Cantor-like set a function f from $[0,1]$ onto $[0,1]$ is built with the following characteristics: strictly increasing, absolutely continuous whose inverse function is not absolutely continuous, and for which there exists a Lebesgue measurable set $H \subset [0,1]$ such that $f^{-1}(H)$ is not Lebesgue measurable.

Key words and phrases. Measurable space, measurable function, absolutely continuous function, Cantor set.

*2000 AMS Mathematics Subject Classification.*28A05; 26A46; 28A20

Resumen. A partir del conjunto de Cantor y de uno semejante al de Cantor, se construye una función f de $[0,1]$ sobre $[0,1]$, con las siguientes propiedades: estrictamente creciente, absolutamente continua, con función inversa no absolutamente continua, y para la cual existe un conjunto $H \subset [0,1]$ medible en el sentido de Lebesgue tal que $f^{-1}(H)$ no es medible en el sentido de Lebesgue.

1. Introducción

Sabemos que la $\sigma-$álgebra de Borel se construye en un espacio topológico, siendo la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a su topología. En $X \subseteq \mathbb{R}^n$ la construcción de la medida de Lebesgue nos define la $\sigma-$álgebra de Lebesgue, de la cual la de Borel es una subálgebra, esto es, si $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ son las $\sigma-$álgebras de Borel y Lebesgue, respectivamente, se tiene que $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Recordemos que dados $(X, \mathcal{M}_\infty)$ y $(Y, \mathcal{M}_\in)$, espacios medibles, la función $f : (X, \mathcal{M}_\infty) \longmapsto (Y, \mathcal{M}_\in)$ es medible si $f^{-1}(M) \in \mathcal{M}_\infty$ para cualquier $M \in \mathcal{M}_\in$. Si cambiamos las $\sigma-$álgebras $\mathcal{M}_\infty$ o $\mathcal{M}_\in$, la función f puede dejar de ser medible. Por ejemplo, si la función f es medible con $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{M}_\in = \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, puede dejar de serlo si cambiamos $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ por cualquier otra $\sigma-$álgebra, en particular si tomamos $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ en lugar de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$.

Un hecho que motiva este trabajo es el siguiente comentario que aparece en la página 50 del libro [10] de Wilcox y Mayers:

> " Another possible analogy with continuity would be to expect that $f^{-1}(B)$ should be measurable for every measurable set B. However there is a measurable function f for which this is not true."

Para ejemplificar lo anterior, Wilcox y Mayers (W-M) nos remiten a realizar un ejercicio en donde se construye una función con estas características. No lo aclaran suficientemente, pero su ejercicio consiste en construir una función $f : [0,1] \to [0,1]$ medible en el sentido de Lebesgue (cuando el dominio tiene la $\sigma-$álgebra de Lebesgue y el codominio la $\sigma-$ álgebra boreliana), que deja de ser medible cuando la σ-álgebra en el codominio es la de Lebesgue. El libro de W-M es un magnifico texto y suponemos que su comentario se debe a que en él sólo se estudian funciones medibles en el sentido de Lebesgue. Lo señalado por ellos puede dar la idea que, cuando en el codominio de la función tenemos un espacio medible que no proviene de una topología, no es posible hacer una generalización del concepto de función medible.

La función propuesta por W-M tiene otras propiedades interesantes, que ellos no mencionan: es una función estrictamente creciente, absolutamente continua, y su función inversa no es absolutamente continua. En [9], Silvia Spataru emplea un *conjunto semejante al de Cantor* para construir una función, diferente a la de W-M, que tiene las propiedades anteriores. Ella señala que no es común encontrar este tipo de funciones en la literatura matemática. La función de W-M también se construye a partir del conjunto de Cantor y de uno *semejante al de Cantor*. Estos conjuntos son básicos para mostrar estas propiedades de la función de W-M.

Recordemos que una función $f : [a,b] \to [c,d]$ es *absolutamente continua* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada partición para cada subpartición $P = \{[t_{i-1}, t_i] : i = 1, 2, \ldots, n\}$ de $[a,b]$, para la que $\sum_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1}) < \delta$, se tiene que $\sum_{i=1}^{i=n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \varepsilon$. Las funciones absolutamente continuas son de suma importancia en la integral de Lebesgue, por ejemplo, tenemos el Segundo Teorema Fundamental de Cálculo el cual nos dice: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si existe una función f integrable en el sentido de Lebesgue en $[a,b]$ tal que, para cada $x \in [a,b]$, $F(x) - F(a)$ es la integral indefinida de f.

Existen algunos teoremas que caracterizan a las funciones absolutamente continuas. Usaremos las siguientes versiones del teorema de Banach-Zaretsky, las cuales se encuentran en [3], donde m representa la medida de Lebesgue.

Teorema de Banach-Zaretsky. *Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ una función.*

a) *Si f es una función continua de variación acotada, entonces f es absolutamente continua sobre $[a, b]$ si y sólo si $m(f(A)) = 0$ para todo A medible tal que $m(A) = 0$.*
b) *Si f es estrictamente creciente y sobreyectiva, f es absolutamente continua sobre $[a, b]$ si y sólo si $m(f(\{x : f'(x) = \infty\})) = 0$.*

En las siguientes secciones construiremos la función señalada y demostraremos las propiedades referidas. Denotaremos al intervalo $[0, 1]$ como X, y la medida de Lebesgue como m. Cuando sea conveniente nos referiremos a $[0, 1]$ en lugar de X. En algunos casos, si sólo decimos que un conjunto o una función es "medible", nos estaremos refiriendo, respectivamente, a que es "medible Lebesgue" o "en el sentido de Lebesgue".

2. Un conjunto semejante al de Cantor

Construiremos lo que se conoce como un *conjunto semejante al de Cantor*, esto es, un conjunto $D \subset [0, 1]$ con las mismas propiedades que el conjunto de Cantor, pero con medida positiva.

Recordemos que C, el conjunto de Cantor, se construye de la siguiente forma: Sean

$$\begin{array}{lcl} X & = & [0,1] \\ C_0 & = & X \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ C_1 & = & C_1 \setminus \left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n & = & C_{n-1} \setminus \left\{\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n}\right)\right\} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{1}$$

Cada C_n resulta de remover los intervalo medios de longitud $\left[\frac{1}{3}\right]^{n+1}$ de cada subintervalo de C_{n-1}.

El conjunto de Cantor en X se define como:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

y tiene las siguientes propiedades:

(i) Es no numerable, medible Lebesgue con medida 0.
(ii) Es perfecto.
(iii) Es denso en ninguna parte.

Las demostraciones de estas propiedades se pueden consultar en [5], [7] o [10].

Para construir D seguimos un proceso similar al realizado con el conjunto de Cantor. D_0 se obtiene de quitarle a $[0, 1]$ un intervalo abierto I_{01} centrado en $1/2$ de longitud $a^{-(1)}$. D_1 es D_0 menos los intervalos abiertos disjuntos I_{11}, I_{12}, respectivamente centrados en los puntos medios de los intervalos cerrados que componen D_0. Secuencialmente, para construir D_n, le quitamos a D_{n-1} la cantidad de 2^n intervalos abiertos disjuntos I_{ni}, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, de longitud $a^{-(n+1)}$ cada uno, centrados en los puntos medios de los intervalos componentes de D_{n-1}. La idea es elegir a de tal forma que la longitud total de los intervalos quitados a X sea menor que 1. Esto es;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{a}}\right) = \frac{1}{a-2} = \varepsilon < 1.$$

Según esto, podemos elegir, para cualquier $0 < \varepsilon < 1$,

$$a = \frac{1}{\varepsilon} + 2.$$

En particular usaremos el caso cuando $\varepsilon = 1/2$, por lo que $a = 4$. Para este caso, la construcción de los D_n es como sigue

$D_0 = [0,1] \setminus (\frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3})$

$D_1 = D_0 \setminus (\frac{5}{2^5}, \frac{7}{2^5}) \cup (\frac{25}{2^5}, \frac{27}{2^5})$ . . .

$D_2 = D_1 \setminus (\frac{9}{2^7}, \frac{11}{2^7}) \cup (\frac{37}{2^7}, \frac{39}{2^7}) \cup (\frac{89}{2^7}, \frac{91}{2^7}) \cup (\frac{117}{2^7}, \frac{119}{2^7})$

D será el complemento de la unión de todos los $I_{ni,}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Tenemos, por las leyes de De Morgan, que

$$D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n.$$

y

$$m(D) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

D tiene las mismas propiedades que el conjunto de Cantor, pero con medida positiva. La propiedad de densidad en ninguna parte de X es importante en nuestra exposición.

3. Un conjunto $B \subset D$ que no es medible Lebesgue

Demostraremos la existencia de un subconjunto de D que no es medible Lebesgue. Recordemos que $X = [0,1]$.

Definición 1. a) En X definimos la *suma módulo 1* como

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 1, \\ x + y - 1 & \text{si } x + y > 1. \end{cases}$$

b) Si $A \subset X$ y $x \in X$, definimos

$$A \dot{+} x = \{a \dot{+} x \ : \ a \in A\}.$$

La resta modulo 1 ($\ominus$) se define de forma similar, haciendo las modificaciones respectivas.

La medida de Lebesgue es invariante con respecto a las operaciones anteriores. A continuación (véase [7]) mencionamos el lema respectivo.

Lema 1. *Si $A \subset X$ es un conjunto medible Lebesgue, entonces para cualquier $x \in X$, $A \dotplus x$ y $A \ominus x$ son medibles Lebesgue y $m(A \dotplus x) = m(A \ominus x) = m(A)$.*

Definition 2. Sean $x, y \in X$, diremos que $x \sim y$ si $x \ominus y \in \mathbb{Q} \cap X$.

La relación anterior es una relación de equivalencia, por lo que la colección de las clases de equivalencia nos define una partición en X. Por el *axioma de elección* (pág. 396 de [8]) podemos elegir un único representante de cada una de esas clases. Denotemos $\widehat{x}$ como el representante de cada una de ellas, y definamos

$$F = \{\widehat{x}\}.$$

En el siguiente lema se caracteriza la partición que nos define esta relación de equivalencia.

Lema 2. *Sea $\{q_i\}_0^\infty$ una numeración de $\mathbb{Q} \cap X$, con $q_0 = 0$. Sean $F_i = F \dotplus q_i$, $i \in \mathbb{N}$ donde $F_0 = F$, entonces:*

(i) *Si $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$.*

(ii) $\bigcup\limits_1^\infty F_i = [0,1] = X$.

Demostración. i) Si $x \in F_i \cap F_j$; entonces $x = f_i \dotplus q_i = f_j \dotplus q_j$, con f_i, $f_j \in F$. Como $f_i \ominus f_j = q_i \ominus q_j \in \mathbb{Q}$, se tiene que $f_i \sim f_j$ y por lo tanto $i = j$.

ii) Si $x \in X$, entonces x está en alguna clase de equivalencia; por lo tanto $\widehat{x} \in F$. Para algún $r_j \in \mathbb{Q}$ tenemos que $x = \widehat{x} \dotplus r_j$, así que $x \in F_j$ y como esto es válido para toda $x \in X$, se tiene que

$$\bigcup_0^\infty F_i = [0,1]\ . \qquad ☑$$

Lema 3. *F no es medible Lebesgue.*

Demostración. Supongamos que F es medible, entonces, por el Lema 1, cada F_i sera medible. Por el Lema 2 se tiene que

$$1 = \sum_0^\infty m(F_i) = \sum_0^\infty m(F \dotplus q_i) = \sum_0^\infty m(F).$$

Como $m(F) = 0$ ó $m(F) > 0$ entonces lo anterior no puede ser, ya que para el primer caso tendríamos que $1 = 0$, y para el segundo tendríamos que una suma infinita de términos iguales positivos es igual a uno. Por lo tanto, F no es medible. ☑

Lema 4. *Si A es medible y $A \subset F$, entonces $m(A) = 0$.*

Demostración. Sea $A_i = A \dot{+} q_i$, por el Lema 1 y por la parte (i) del Lema 2, $\{A_i\}$ es una sucesión disjunta de conjuntos medibles y $m(A_i) = m(A)$. Entonces tenemos que:

$$1 = m(X) \geq m\left(\bigcup_0^\infty A_i\right) = \sum_0^\infty m(A_i) = \sum_0^\infty m(A).$$

Si $m(A) > 0$, entonces lo anterior no puede ser, por lo tanto $m(A) = 0$. ☑

Corolario 1. *Si $A \subset F_i$ y es medible, entonces $m(A) = 0$.*

Teorema 1. *Existe un conjunto $B \subset D$ no medible.*

Demostración. Sea $B_i = D \cap F_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si cada uno de ellos es medible, entonces $m(B_i) = 0$ y

$$0 = \sum_0^\infty m(B_i) = m\left(\bigcup_0^\infty B_i\right) = m(D) = \frac{1}{2},$$

lo cual no puede ser, por lo tanto existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que Bi_0 no es medible. El conjunto no medible B será Bi_0. ☑

4. La construcción de f y sus propiedades

En esta sección construiremos nuestra función. Para demostrar que es medible en el sentido de Lebesgue y que existe $H \subset [0,1]$ medible Lebesgue tal que $f^{-1}(H)$ no es medible Lebesgue, usaremos B, el conjunto no medible Lebesgue del Teorema 1. Emplearemos el Teorema de Banach-Zaretsky para mostrar sus propiedades con respecto a la continuidad absoluta.

Sea $g : [0,1] \setminus D \longrightarrow [0,1] \setminus C$ definida de tal forma que hagamos corresponder linealmente los intervalos que se quitan en la construcción de cada D_n sobre los intervalos que se quitan en C_n. En la figura 1 se muestra el caso cuando $n = 0, 1$. Debido a que en la construcción de D, D_n resulta de quitarle a D_{n-1} la cantidad de 2^n intervalos abiertos disjuntos I_{ni}, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, de longitud igual a $1/4^{n+1}$ cada uno, tenemos que

$$[0,1] \setminus D = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} I_{ni}\right). \tag{2}$$

Sobre cada I_{ni} la función g tiene derivada igual a $(4/3)^{n+1}$, por lo que la función es estrictamente creciente y además biyectiva.

Si $x_0 \in D$, como D es denso en ninguna parte en $[0,1]$, entonces para toda vecindad $V(x_0)$ de x_0, se tiene que $V(x_0) \cap ([0,1] \setminus D) \neq \varnothing$, por lo tanto x_0 es punto de acumulación de $[0,1] \setminus D$. Por lo anterior, tiene sentido considerar $g(x-)$ y $g(x+)$, respectivamente los limites por la izquierda y por la derecha en x_0. En el siguiente lema demostraremos su existencia y encontraremos sus valores.

Lema 5. *Para cada $x_0 \in D$, $g(x_0-)$ y $g(x_0+)$ existen y además se tiene que:*

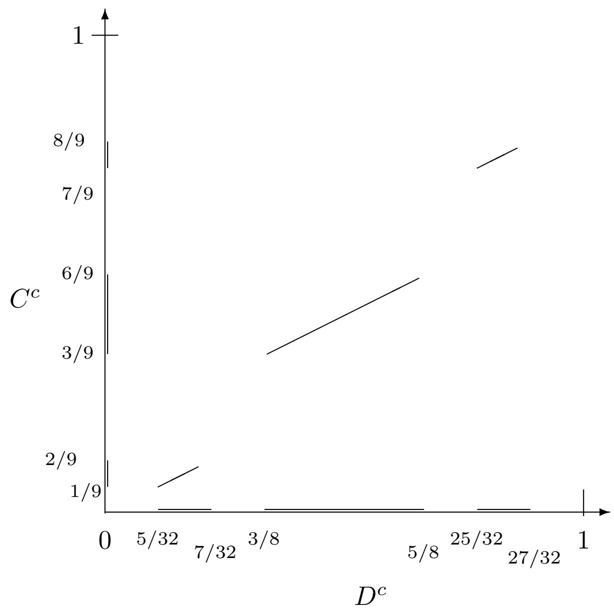

Figura 1.

i) $g\,(x_0-) = \sup\,\{g(x)/x \in [0,1] \setminus D,\ x < x_0\}\,.$
ii) $g\,(x_0+) = \text{ínf}\,\{g(x)/x \in [0,1] \setminus D,\ x_0 < x\}.$

Demostración. i) Sean $T = \{x \in [0,1] \setminus D : \ \ x < x_0\}$ y $Z = \{g(x)\colon x \in T\}\,.$ Sea $x_1 \in (x_0, 1) \bigcap ([0,1] \setminus D)$, se tiene que $g\,(x) \leq g\,(x_1)$ para todo $x \in T.$ Esto nos dice que $\sup Z$ existe y llamémoslo α. Se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in T$ tal que

$$\alpha - \varepsilon \leq g\,(t_0) < \alpha.$$

Como g es creciente en T, entonces para cada $t \in (t_0, x_0) \bigcap T$ se tiene

$$\alpha - \varepsilon \leq g\,(t_0) \leq g\,(t) < \alpha.$$

Esto es; $|g\,(t) - \alpha| < \varepsilon$ si $t \in (t_0, x_0) \bigcap ([0,1] \setminus D)\,.$ Por lo tanto

$$\alpha = g\,(x_0-)\,.$$

De forma similar se prueba la igualdad ii). ☑

Lema 6. *Para cada x_0 en D, existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0.*

Demostración. Sea $x_0 \in D$. Como $g(x) \leq g(x')$ para todas $x, x' \in [0,1] \setminus D$ que cumplan: $x < x_0 < x'$, entonces por el Lema 5 se tiene que $g\,(x_0-) \leq g\,(x_0+)$. Supongamos que $g\,(x_0-) < g\,(x_0+)$. Por la construcción de g, tenemos que $g\,(x_0-)\,, g\,(x_0+) \in C$. Como C es denso en ninguna parte, entonces existe

$g(x^*) \notin C$, con $x^* \in [0,1] \smallsetminus D$ tal que $g(x_0-) < g(x^*) < g(x_0+)$. Pero por la monotonía de g, x^* deberá estar a la izquierda y, a la vez, a la derecha de x_0, lo cual no puede ser. Por lo tanto $g(x_0-) = g(x_0+)$. ☑

Teorema 2. *Existen una función $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ estrictamente creciente, medible en el sentido de Lebesgue, y un conjunto $H \subset [0,1]$ medible Lebesgue tal que $f^{-1}(H)$ no es medible Lebesgue.*

Demostración. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [0,1] \smallsetminus D \\ g(x_0-) & \text{si } x_0 \in D, \end{cases}$$

f es continua, por lo tanto es medible en el sentido de Lebesgue.

Ya sabemos que f es estrictamente creciente en $X \smallsetminus D$, veamos que lo es en $[0,1]$. Sean $x_1 < x_2$ en $[0,1]$. Si $x_1 \in D$ y $x_2 \in X \smallsetminus D$, entonces por la igualdad (2), existe I_{ni} para el que $x_2 \in I_{ni}$. Luego, por el Lema 5 se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Cuando $x_1 \in X \smallsetminus D$ y $x_2 \in D$ se hace una prueba similar. Si x_1 y x_2 están en D, como D es denso en ninguna parte existe $x_3 \in X \smallsetminus D$ tal que $x_1 < x_3 < x_2$, de los casos anteriores se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Por lo tanto f es estrictamente creciente en $[0,1]$. Además observamos que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Sea $H = f(B)$. Como f es biyectiva y $B \subset D$, entonces $f(B) \subset C$. Como la medida de Lebesgue es completa, entonces: $H = f(B)$ es medible Lebesgue y $m(H) = 0$. Además por el Teorema 1, $f^{-1}(H) = B$ no es medible Lebesgue. ☑

Teorema 3. *f es absolutamente continua y su función inversa no.*

Demostración. Sabemos que sobre cada I_{ni} la función f tiene derivada igual a $(4/3)^{n+1}$, por lo que en $X \smallsetminus D$ la derivada de f no es ∞. Esto nos dice que $\left\{x : f'(x) = \infty\right\} \subset D$, y así $f\left(\left\{x : f'(x) = \infty\right\}\right) \subset f(D) = C$. Entonces se tiene que

$$m\left(f\left(\left\{x : f'(x) = \infty\right\}\right)\right) = 0.$$

Por el inciso b) del teorema de Banach-Zaretsky, f es absolutamente continua.

Como: $f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua y monótona, $C \subset [0,1]$ es tal que $m(C) = 0$, y $m\left(f^{-1}(C)\right) = m(D) = 1/2$, entonces por el inciso a) del teorema de Banach-Zaretsky, f^{-1} no es absolutamente continua. ☑

Referencias

[1] Ash, R. B., *Measure, Integration, and Functional Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1972.

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1995.

[3] Benedetto, J. & W. Czaja, *Integration and Modern Analysis*, Birkhauser, Boston, 2009.

[4] Halmos, P. R., *Measure Theory*, Springen-Verlag, New York, 1974.
[5] Kannan, R. & C. King Krueger, *Advanced Analysis on the Real Line*, Springer Verlag, New York, 1996.
[6] Lang, S., *Analisis II*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
[7] Royden, H. L., *Real Analysis, second edition*, Macmillan Publishing, New York, 1968.
[8] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, Boston, Mass., 1987.
[9] Spataru, S., *An absolutely continuous function whose inverse function is not absolutely continuous*, Noti di Matematica. 23, n 1, 2004, 47-49.
[10] Wilcok, H.J. & D. L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, 1978.

(Recibido en enero de 2009. Aceptado para publicación en mayo de 2009)

Francisco J. Mendoza Torres & Gustavo Mendoza Torres
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Pue., México, 72570
e-mail: jmendoza@fcfm.buap.mx; gumendoza@ece.buap.mx